

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.1.4](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.4)

УДК 536-12:519.633

## НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ МЕХАНОДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ПРОЦЕССА ВНЕДРЕНИЯ ПОТОКА ЧАСТИЦ В ПОВЕРХНОСТЬ МИШЕНИ

Е.С. Парфенова<sup>1,2</sup>, А.Г. Князева<sup>1,2</sup><sup>1</sup> *Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Российская Федерация*<sup>2</sup> *Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Инженерная школа новых производственных технологий, Томск, Российская Федерация*

Представлена в неизоотермическом приближении связанная математическая модель начальной стадии процесса внедрения частиц в поверхность металла. Предполагается, что имплантируемые частицы в момент столкновения с мишенью обладают энергией, достаточной для генерации упругих механических возмущений, которые влияют на перераспределение имплантируемого материала. В общем случае модель включает уравнения неразрывности, теплопроводности, баланса для внедряемого компонента и уравнение движения. Определяющие соотношения соответствуют теории обобщенной термоупругой диффузии. В модели учитываются конечность времен релаксации к термодинамическому равновесию потоков тепла и массы и взаимодействие волн разной физической природы (волн концентрации примеси, волн напряжений (деформаций) и температуры). Подробно описаны упрощающие приближения, процесс обезразмеривания уравнений модели и метод их решения. Задача реализована численно с использованием метода прогонки. Приведены примеры решения связанной задачи для системы материалов Mo(Ni). Детально процессы внедрения и перераспределения примеси в поверхностном слое мишени рассмотрены в моменты времени, меньшие и большие значений относительных времен релаксации потоков тепла и массы. Установлено, что с течением времени взаимодействие процессов проявляется по-разному. Показано, что взаимовлияние волн различной физической природы приводит к распределениям температуры и концентрации, которые не отвечают классическим представлениям, следующим из моделей с законами Фурье и Фика. В работе продемонстрированы искажения волн деформации и температуры, которые и свидетельствуют о взаимодействии исследуемых процессов. Выявлено, что чем ближе текущий момент времени к относительному времени релаксации потока массы и времени действия внешнего импульса, тем заметнее меняются профили волн.

*Ключевые слова:* поверхностная обработка, связанная модель, поток частиц, распространение волн, нелинейные эффекты, упругие напряжения, диффузия, теплопроводность, релаксация потока тепла, релаксация потока массы

## NON-ISOTHERMAL MECHANODIFFUSION MODEL OF THE INITIAL STAGE OF PENETRATION OF PARTICLE FLOW IN A TARGET SURFACE

E.S. Parfenova<sup>1,2</sup> and A.G. Knyazeva<sup>1,2</sup><sup>1</sup> *Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS, Tomsk, Russian Federation*<sup>2</sup> *National Research Tomsk Polytechnic University, School of Advanced Manufacturing Technologies, Tomsk, Russian Federation*

The paper presents a coupled mathematical model of the initial stage of particle penetration in the metal surface in non-isothermal approximation. It is assumed that, at the moment of collision with a target, the particles have enough energy to generate mechanical disturbances, which affect the redistribution of the implanted material. The simplified one-dimensional model includes the heat conduction equation, the equation of implanted component balance and the equation of motion. The governing relations correspond to the theory of generalized thermoelastic diffusion. The model takes into account the finiteness of relaxation times of heat and mass fluxes and the interaction of waves of different physical nature – impurity concentration, stresses (strain) and temperature. The non-dimensioning of the equation system and the problem solving method are described in detail. The problem was solved numerically using the double sweep method. The paper presents examples of coupled problem solving for the system of materials Mo(Ni). The processes of penetration and redistribution of the impurity on the target surface are considered at time moments smaller/longer than the relative relaxation times of heat and mass fluxes. It is shown that the interaction of waves of different physical nature leads to temperature and concentration distributions, which do not comply with the classical Fourier and Fick laws. The obtained results demonstrated distortions in deformation and temperature waves which are indicative of the interaction between the processes under consideration.

*Key words:* surface treatment, coupled model, particle flow, wave propagation, nonlinear effects, elastic stress, diffusion, heat conduction, relaxation of heat flux, relaxation of mass flux

### 1. Введение

Поверхностная обработка металлов потоками частиц — один из эффективнейших методов улучшения механических свойств и повышения износостойкости обрабатываемых материалов [1–5]. По сравнению с традиционно используемыми в машиностроении методами радиационные технологии обладают рядом существенных преимуществ, а именно возможностью обработки высокоточных деталей сложной формы, малым временем обработки, простотой автоматизации процесса и другим [6]. За счет изменения параметров внешнего воздействия (пучка) удастся получать требуемые поверхностные свойства материала [7, 8]. Недостаточное понимание сути физических процессов, протекающих в твердом теле при его обработке пучками частиц, ограничивает потенциал данного метода, несмотря на имеющийся экспериментальный и теоретический материал. Поэтому исследования в данной области остаются актуальными.

На процессе перераспределения внедряемых частиц в поверхностном слое обрабатываемого металла сказывается целый ряд факторов, которые связаны со скоростью и степенью нагрева, распылением поверхностного слоя, перемешиванием частиц, фазовыми переходами и другим. В момент столкновения частиц с поверхностью мишени генерируются волны механических возмущений, которые также оказывают влияние на перераспределение имплантируемой примеси [9]. Поскольку в условиях ионной имплантации температуры невысоки, вполне корректно говорить об упругих волнах, которые теряют энергию по мере распространения вглубь вещества в результате взаимодействия с концентрационными волнами и волнами дефектов. Выявить экспериментально роль отдельных явлений вне зависимости от остальных практически невозможно вследствие их одновременного существования. Кроме того, эксперимент ориентирован, как правило, на конечный результат и не включает исследование процессов, протекающих на малых временах [10]. Преимущество перед экспериментом имеет в данном случае математическое моделирование. Оно позволяет исследовать внедрение частиц в материал в деталях, изучить роль каждого сопутствующего процесса в отдельности, проследить его динамику начиная с момента соприкосновения частиц с поверхностью мишени.

Как отмечено выше, вследствие контакта частиц с поверхностью мишени генерируются упругие волны [11, 12]. Термоупругий механизм образования поля напряжений обусловлен расширением нагретого пучком слоя вещества и дает о себе знать на начальном этапе облучения или при малой интенсивности пучка. При этом поверхность мишени остается в твердой фазе [6]. Объем материала после обработки мишени частицами не претерпевает деструктивных изменений, в то время как на ее поверхности, при определенных параметрах пучка, возникает эрозия [9]. Кроме того, в работе [13] экспериментально установлено увеличение скорости диффузии углерода в поверхность вольфрама под действием генерируемых напряжений. Исследования взаимовлияния волн напряжений и диффузии актуальны не только при изучении процесса обработки материалов потоком частиц, но и, например, при выяснении роли вибрационного и ударного нагружения в механизмах диффузии [14, 15]. Взаимодействие именно этих полей — механических и диффузионных — на начальном этапе обработки вносит значительный вклад в итоговое распределение внедряемой примеси. Связанность механических и температурных полей становится существенной при высокочастотных периодических и импульсных воздействиях [16, 17]. Таким образом, при построении математических моделей процесса обработки поверхности материала потоком частиц важно учитывать взаимовлияние разных процессов.

В работах [18, 19] представлены математические модели эволюции механических возмущений — откликов на облучение поверхности металла потоком ионов, но процесс внедрения ионов (начальная стадия обработки) не изучается. Аналитический метод решения задачи определения напряженно-деформированного состояния упругой среды с учетом структурных изменений, обусловленных наличием нестационарных диффузионных потоков, описан в [20–22]. Взаимовлияние тепловых, диффузионных и механических процессов при различных параметрах внешнего воздействия исследовано в [23]. Авторами установлено, что напряжения, возникающие в области высоких градиентов температуры, способствуют здесь более интенсивному протеканию диффузионных процессов. Математическая модель генерации термоупругих волн при тепловом воздействии на образец конечных размеров без учета диффузионных явлений продемонстрирована в [24]. В работе [25] принимается во внимание взаимосвязь разномасштабных процессов — диффузии примеси и распространения упругих волн — в изотермических условиях.

При разработке связанных моделей могут возникнуть трудности вследствие разномасштабности исследуемых процессов, необходимости аккуратного подбора «коэффициентов связанности». Немаловажное значение имеет выбор метода решения. Так, в [25] рассмотрены разные варианты численной реализации связанной задачи и из них, на основе полученных результатов, выделен оптимальный.

В настоящей работе представляется математическая модель для исследования начальной стадии процесса внедрения потока частиц в поверхность мишени в предположении, что энергии частиц достаточно для генерации упругих волн в поверхностном слое. На основе модели изучаются совместно распространяющиеся нелинейные волны деформации, напряжений, концентрации примеси в неизотермических условиях.

## 2. Математическая постановка задачи

Процесс взаимодействия потока заряженных частиц с поверхностью мишени опишем уравнениями неразрывности и теплопроводности, а также уравнением баланса внедряемого компонента и уравнением движения:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\rho C_\sigma \frac{dT}{dt} + \alpha_T T \frac{d\sigma_{kk}}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q, \quad (2)$$

$$\rho \frac{dC}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (3)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (4)$$

Здесь:  $t$  — время;  $\rho$  — плотность обрабатываемого материала;  $\mathbf{v}$  — среднемассовая скорость;  $\nabla \cdot \dots = \text{div}(\dots)$ ;  $C_\sigma$  — удельная теплоемкость;  $T$  — температура;  $\alpha_T$  — коэффициент теплового расширения;  $\sigma_{kk}$  — первый инвариант тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ ;  $\mathbf{J}_q$  — поток тепла;  $\mathbf{J}$  — поток массы;  $C$  — концентрация имплантируемого материала.

Определяющие соотношения соответствуют теории обобщенной термоупругой диффузии [26–28]. Согласно термодинамике необратимых процессов, потоки тепла и массы с учетом того, что значения их времен релаксации конечны, представим в виде [26–29]:

$$\mathbf{J} = -\rho D \nabla C + BC \nabla \sigma_{kk} - t_D \frac{d\mathbf{J}}{dt}, \quad (5)$$

$$\mathbf{J}_q = -\lambda_T \nabla T - t_q \frac{d\mathbf{J}_q}{dt}, \quad (6)$$

где  $D = D^0 f(C)$  — коэффициент диффузии, в котором  $D^0 = D_0 \exp(-E_a/RT)$  — коэффициент самодиффузии,  $f(C)$  — функция, учитывающая зависимость коэффициента диффузии от состава, при этом  $E_a$  — энергия активации самодиффузии,  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $B = D^0 m \Delta \alpha / RT$  — коэффициент переноса под действием напряжений, включающий  $m$  — молярную массу,  $\Delta \alpha = \alpha - \alpha_0$  — разность коэффициентов концентрационного расширения внедряемого элемента —  $\alpha$ , и элемента, составляющего основу —  $\alpha_0$  (или эффективного коэффициента в случае многокомпонентных материалов);  $t_D$  — время релаксации потока массы,  $\lambda_T$  — коэффициент теплопроводности,  $t_q$  — время релаксации потока тепла. Обобщенные законы переноса с явным учетом конечных значений времен релаксации применимы для совместно протекающих процессов диффузии, переноса тепла и распространения механических возмущений в том случае, когда характерное время наблюдения и/или время воздействия сравнимы со временами релаксации. Именно при этих временах, представляющих интерес для процесса обработки потоками частиц, проявляется конечность скоростей распространения тепла и массы. Значения коэффициентов концентрационного расширения  $\alpha$  и  $\alpha_0$  оцениваются на основе знаний о молярных или атомных объемах диффузантах. В связанных моделях эти же коэффициенты определяют в диффузионной зоне величину напряжений, вызванных неоднородным распределением концентраций. Функция  $f(C)$  для большого класса материалов может быть записана в виде:

$$f(C) = a + bC + dC^2 > 0.$$

Если  $f(C) = 1$ , то коэффициент диффузии  $D$  равен коэффициенту самодиффузии  $D^0$ .

Приращения компонент тензора напряжений связаны с приращениями компонент тензора деформаций, приращениями концентраций и температуры обобщенными соотношениями:

$$d\sigma_{ij} = 2\mu d\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} (\lambda d\varepsilon_{kk} - K d\omega), \quad (7)$$

где  $\mu$ ,  $\lambda$  — коэффициенты Ламе (коэффициент  $\mu$  совпадает с модулем сдвига),  $K$  — изотермический модуль всестороннего сжатия,  $K = \lambda + 2\mu/3$ ,  $\omega = 3[\alpha_T(T - T_0) + \Delta\alpha(C - C_0)]$  — функция температуры и концентрации, в которой  $T_0$ ,  $C_0$  отвечают недеформированному состоянию, которое может совпадать с начальным.

В случае малых деформаций соотношения (7) могут быть представлены в виде:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} (\lambda\varepsilon_{kk} - K\omega).$$

При этом справедливы выражения:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{d\varepsilon_{kk}}{dt},$$

$$\rho = \rho_0 \exp(-\varepsilon_{kk}) \approx \rho_0,$$

то есть плотность мишени не изменяется в течение всего процесса поверхностной обработки.

Если также малы скорости и ускорения, то левая часть уравнений движения (4) может быть записана в виде [30]:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx \rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \approx \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений с компонентами  $u_x, u_y, u_z$ . Малые деформации удовлетворяют соотношениям Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right), \quad (8)$$

где  $i, j = x, y, z$ .

Заметим, что приближение малых деформаций позволяет линеаризовать уравнения движения. Однако это не исключает наличия больших напряжений и их градиентов. Скорее наоборот, малым деформациям соответствуют высокие напряжения, что не позволяет осуществить линеаризацию уравнений для потоков.

### 3. Упрощенная одномерная модель

Направленный поток частиц равномерно распределен по обрабатываемой поверхности, поэтому можно ограничиться одномерной задачей. Полагаем, что в этих условиях реализуется одноосное нагружение [25]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu\varepsilon_{xx} + (\lambda\varepsilon_{kk} - K\omega) \neq 0, \\ \sigma_{yy} &= 0 = 2\mu\varepsilon_{yy} + (\lambda\varepsilon_{kk} - K\omega), \\ \sigma_{zz} &= 0 = 2\mu\varepsilon_{zz} + (\lambda\varepsilon_{kk} - K\omega), \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xz} = \sigma_{zy} = 0. \end{aligned}$$

Просуммировав три первых равенства, найдем:

$$\sigma_{kk} = \sigma_{xx} \equiv \sigma = 3K(\varepsilon_{kk} - \omega).$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma}{3K} + \omega, \quad \sigma = E \left( \varepsilon_{xx} - \frac{\omega}{3} \right).$$

Заметим, что другие отличные от нуля компоненты тензора деформаций —  $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$ ,  $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$ , также могут быть найдены из представленных соотношений. Так как далее в явном виде они не используются, то для удобства введем обозначение  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon$ .

Из трех уравнений движения (4) в одномерном случае остается только одно:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

После дифференцирования по координате и учета введенных обозначений перейдем в нем от компоненты вектора перемещений  $u_x$  к деформации  $\varepsilon$ . В результате получим систему одномерных связанных уравнений:

$$\rho \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial x}, \quad (9)$$

$$\rho C_\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha_T T \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{J}_q}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}, \quad (11)$$

и следующие одномерные определяющие соотношения:

$$\mathbf{J} = -\rho D \frac{\partial C}{\partial x} + BC \frac{\partial \sigma}{\partial x} - t_D \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \quad (12)$$

$$\mathbf{J}_q = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} - t_q \frac{\partial \mathbf{J}_q}{\partial t}, \quad (13)$$

$$\sigma = E[\varepsilon - \alpha_T (T - T_0) - \Delta \alpha (C - C_0)]. \quad (14)$$

Из (9)–(11) с учетом (12)–(14) в приближении одноосного нагружения следует система из трех дифференциальных уравнений второго порядка (для концентрации внедряемой примеси  $C$ , напряжений в направлении нагружения  $\sigma$  и температуры  $T$ ):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + t_D \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ D \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{BC}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right], \quad (15)$$

$$\frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + \rho \alpha_T \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \rho \Delta \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}, \quad (16)$$

$$\rho C_\sigma \left[ t_q \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \alpha_T T \frac{\partial \sigma}{\partial t} - t_q \frac{\partial}{\partial t} \left( \alpha_T T \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right). \quad (17)$$

Начальные и граничные условия для задачи (15)–(17) имеют вид:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad \mathbf{J} &= m_0 \varphi(t), \quad \mathbf{J}_q = q_0 \varphi(t), \quad \sigma = \sigma_0 \varphi(t); \\ x \rightarrow \infty: \quad C &= 0, \quad \sigma = 0; \\ t = 0: \quad C &= 0, \quad \sigma = 0, \quad T = T_0, \quad \frac{\partial C}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $m_0, q_0, \sigma_0$  — интенсивности потоков массы и тепла, а также интенсивность напряжений, которые вызывает внешнее воздействие.

Для численной реализации модели удобнее перейти к безразмерным переменным.

#### 4. Переход к безразмерным переменным

В работе [25] осуществлен детальный анализ размерностей и приведена система уравнений в безразмерных переменных, описывающая изотермический процесс поверхностной обработки однородного материала потоком частиц. По аналогии введем безразмерные переменные для системы (15)–(17):

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \quad \xi = \frac{x}{x_*}, \quad S = \frac{\sigma}{\sigma_*}, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0}, \quad e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}, \quad (19)$$

где  $t_*, x_*, \sigma_*, T_*, \varepsilon_*$  — масштабы для  $t, x, \sigma, T, \varepsilon$ , вычисляются, соответственно, как

$$t_* = \frac{D(T_*)}{E/\rho}, \quad e = \Theta + \gamma(C - C_0), \quad x_* = \sqrt{t_* D(T_*)},$$

$$\sigma_* = E\alpha_T(T_* - T_0), \quad T_* = T_0 + q_0 x_* / \lambda_T, \quad \varepsilon_* = \alpha_T(T_* - T_0).$$

Тогда из (15)–(17) с помощью (19) найдем:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \tau_D \frac{\partial^2 C}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ F(\Theta) \frac{\partial C}{\partial \xi} \right] - M\omega\gamma \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ C \frac{F(\Theta)}{\Theta + \sigma} \frac{\partial S}{\partial \xi} \right], \quad (20)$$

$$\tau_q \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - \omega(\sigma + \Theta) \frac{\partial S}{\partial \tau} - \tau_q \omega \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ (\sigma + \Theta) \frac{\partial S}{\partial \tau} \right], \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} + \gamma \frac{\partial^2 C}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2}. \quad (22)$$

В (20) функция  $F(\Theta) = \exp(-1/[\beta(\sigma + \Theta)])$  — безразмерный коэффициент диффузии. Остальные безразмерные комплексы, образующиеся из величин разной физической природы, представлены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры модели

| Комплекс | Выражение                                       | Комплекс         | Выражение                                  | Комплекс | Выражение                                      |
|----------|---|------------------|--|----------|--|
| $\gamma$ | $\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_T(T_* - T_0)}$ | $S_0$            | $\frac{\sigma_0 D(T_*) \rho}{\sigma_* E}$  | $\omega$ | $\frac{\alpha_T E}{\rho C_\sigma} (T_* - T_0)$ |
| $Le$     | $\frac{D(T_*)}{\lambda_T / (\rho C_\sigma)}$    | $\tau_D, \tau_q$ | $\frac{t_D E}{D\rho}, \frac{t_q E}{D\rho}$ | $M$      | $\frac{mC_\sigma}{R}$                          |
| $\beta$  | $\frac{R(T_* - T_0)}{E_a}$                      | $\mu$            | $\frac{m_0}{\sqrt{\rho E}}$                | $\sigma$ | $\frac{T_0}{(T_* - T_0)}$                      |

Граничные и начальные условия также выразим в безразмерных переменных:

$$\xi = 0: \quad \mathbf{J} = \mu\varphi(\tau), \quad \mathbf{J}_q = \varphi(\tau), \quad S = S_0\varphi(\tau); \quad (23)$$

$$\xi \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \xi} = 0, \quad S = 0; \quad (24)$$

$$\tau = 0: \quad C = 0, \quad S = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \tau} = 0, \quad \Theta = \Theta_0. \quad (25)$$

Запишем в безразмерном виде и определяющие соотношения (12)–(14):

$$\mathbf{J} = -F(\Theta) \frac{\partial C}{\partial \xi} + \frac{F(\Theta)}{(\Theta + \sigma)} \gamma C M \omega \frac{\partial S}{\partial \xi} - \tau_D \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \tau}, \quad (26)$$

$$\mathbf{J}_q = -\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \tau_q \frac{\partial \mathbf{J}_q}{\partial \tau}, \quad (27)$$

$$S = (e - \Theta - \gamma(C - C_0)). \quad (28)$$

## 5. Метод решения

Система (20)–(22) с условиями (23)–(25) решалась численно с использованием для представления производных неявной разностной схемы второго порядка аппроксимации как по времени, так и по координате. Например, для концентрации внедряемой примеси (20)

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \tau_D \frac{\partial^2 C}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ F(\Theta) \frac{\partial C}{\partial \xi} \right] - M\omega\gamma \frac{\partial W}{\partial \xi},$$

где  $W = C \frac{F(\Theta)}{\Theta + \sigma} \frac{\partial S}{\partial \xi}$ , конечно-разностная запись выглядела так:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{(i)}^{j+1} - C_{(i)}^j}{\Delta t} + \tau_D \frac{C_{(i)}^{j+1} - 2C_{(i)}^j + C_{(i)}^{j-1}}{\Delta t^2} = \\ & = \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{F_{(i+1)}^j + F_{(i)}^j}{2} \frac{C_{(i+1)}^{j+1} - C_{(i)}^{j+1}}{\Delta x} - \frac{F_{(i)}^j + F_{(i-1)}^j}{2} \frac{C_{(i)}^{j+1} - C_{(i-1)}^{j+1}}{\Delta x} \right] - M\omega\gamma \frac{W_{(i)}^j - W_{(i-1)}^j}{\Delta x}. \end{aligned}$$

В уравнении движения (22) удобнее было перейти от напряжений к деформациям. Для этого использовалось равенство (28). Тогда получалось выражение

$$\frac{\partial^2 e}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 e}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - \gamma \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2},$$

которое в разностном представлении приобретало вид:

$$\frac{e_{(i)}^{j+1} - 2e_{(i)}^j + e_{(i)}^{j-1}}{\Delta t^2} = \frac{e_{(i-1)}^{j+1} - 2e_{(i)}^j + e_{(i+1)}^{j-1}}{\Delta x^2} - \frac{\Theta_{(i+1)}^j - 2\Theta_{(i)}^j + \Theta_{(i-1)}^j}{\Delta x^2} - \gamma \frac{C_{(i+1)}^j - 2C_{(i)}^j + C_{(i-1)}^j}{\Delta x^2}.$$

С уравнением теплопроводности поступали аналогично. Далее эти уравнения приводили к виду, подходящему для метода прогонки. Граничные условия записывали также со вторым порядком аппроксимации. Для этого использовали разложения в ряд Тейлора величин, ближайших к границе (с индексом  $i = 1$ ), относительно граничных точек (точек, лежащих на границе, то есть с индексом  $i = 0$ ) с точностью до величин второго порядка малости. Появившиеся в разложениях вторые производные находили из основных дифференциальных уравнений, справедливых и в граничных точках.

Разработанный численный алгоритм продемонстрировал устойчивость во всей области изменения параметров модели. Сходимость проверяли экстраполяцией на нулевой шаг. Во всех расчетах контролировалось выполнение закона сохранения массы.

## 6. Примеры расчета

В случае, когда времена релаксации равны нулю и связанность процессов не учитывается, уравнения (20) и (21) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ F(\Theta) \frac{\partial C}{\partial \xi} \right], \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} &= \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

и могут быть решены независимо друг от друга. Волновых решений при этом нет. Для изотермических моделей этот факт продемонстрирован в [25].

Для детального исследования динамики разномасштабных процессов, протекающих одновременно, а также установления взаимосвязи между ними представляет интерес анализ распределений концентраций, температуры и деформаций в разных временных интервалах, соответствующих масштабам различных явлений. Такими масштабами являются характерное время импульса, времена релаксации для диффузии и теплопроводности, характерное время распространения механических возмущений. Соотношения между этими четырьмя временами сводятся к трем безразмерным параметрам:  $\tau_D$ ,  $\tau_q$  и  $\tau_{imp}$ ; для выбранных материалов  $\tau_q < \tau_{imp} < \tau_D$ . Числовые значения параметров модели приведены в таблице 2.

Полагаем, что на поверхность мишени действует одиночный синусоидальный импульс:

$$\phi(\tau) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi\tau}{\tau_{imp}}\right), & \tau \leq \tau_{imp}, \\ 0, & \tau > \tau_{imp}, \end{cases} \quad \tau_{imp} = 0,025.$$

Таблица 2. Значения параметров модели

|        | $\gamma$ | $Le$ | $\omega$ | $M$  | $\mu$ | $S_0$ | $\tau_D$ | $\tau_q$ | $\beta$ | $\sigma$ |
|--------|----------|------|----------|------|-------|-------|----------|----------|---------|----------|
| Mo(Ni) | -0,003   | 40,7 | 0,002    | 10,5 | 0,05  | 0,001 | 0,03     | 0,006    | 0,0018  | 110,0    |

На рисунках 1–3 представлены результаты решения связанной задачи для системы Mo(Ni): распределения концентрации имплантируемой примеси (слева) и профили волн деформаций (справа) на глубине  $\xi \cdot 10^2$  от обрабатываемой поверхности. Расчеты осуществлены для моментов времени, меньших  $\tau_q$  (Рис. 1), сравнимых с ним (Рис. 2) и больших (Рис. 3). По мере проникания диффузанта в образец увеличиваются значения максимума и минимума деформаций (Рис. 1б). Смена знака деформаций наблюдается перед фронтом концентрационной волны. Положение переднего фронта этой волны (отмечено на рисунках точками) никак не сказывается на профиле деформаций. Если  $\tau > \tau_q$ , то знак деформаций на левой свободной границе меняется на противоположный (см. кривые 2 и 3, Рис. 3). К моменту времени  $\tau \geq \tau_{imp}/2$  максимум волны концентрации Ni смещается в объем материала. На волне деформаций в местах максимумов концентрации появляются новые минимумы, отвечающие моментам времени  $\tau = 0,013$  и  $\tau = 0,015$  (см., соответственно, Рис. 3а и б).

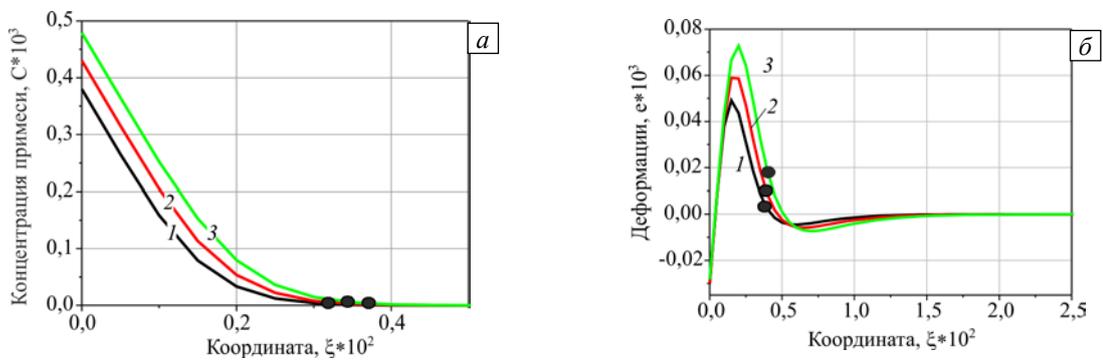


Рис. 1. Моменты времени  $\tau$ : 0,0035 (кривая 1); 0,004 (2); 0,0045 (3); распределение концентрации диффузанта Ni (а); профили волн деформации (б)

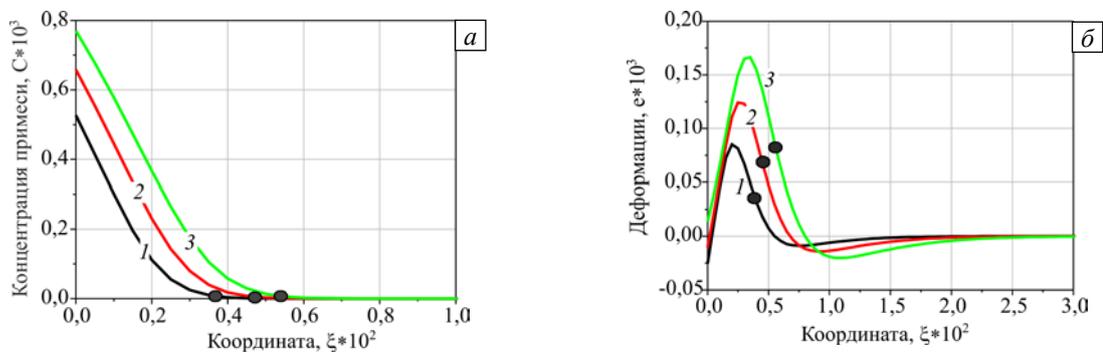


Рис. 2. Моменты времени  $\tau$ : 0,005 (кривая 1); 0,0065 (2); 0,008 (3); распределение концентрации диффузанта Ni (а); профили волн деформации (б)

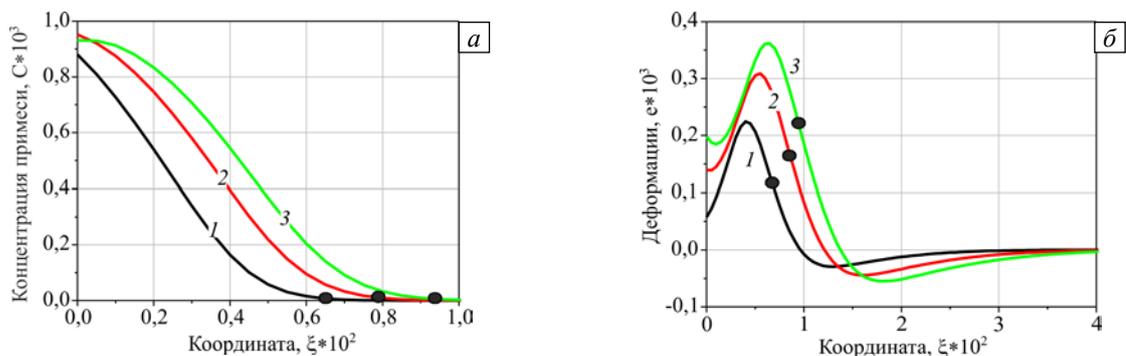


Рис. 3. Моменты времени  $\tau$ : 0,01 (кривая 1); 0,013 (2); 0,015 (3); распределение концентрации диффузанта Ni (а); профили волн деформации (б)

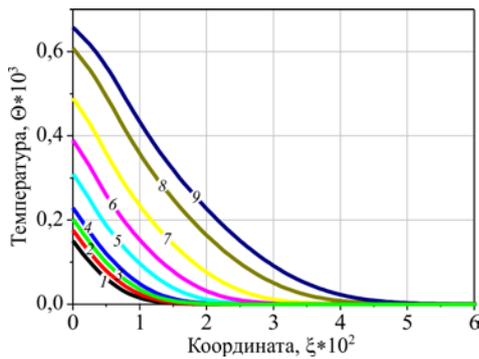


Рис. 4. Распределение температуры в большие, чем времена релаксации потока тепла моменты времени  $\tau$ : 0,0035 (кривая 1); 0,004 (2); 0,0045 (3); 0,005 (4); 0,0065 (5); 0,008 (6); 0,01 (7); 0,013 (8); 0,015 (9)

распределения для моментов времени  $\tau > \tau_D, \tau_{imp}, \tau_q$ . Здесь изменения видны уже на волне деформаций. Искажение формы волны деформаций согласуется с положением переднего фронта волны концентрации. Так как внешний импульс перестал действовать, вглубь материала внедряется одно и то же количество примеси. Об этом говорит равенство площадей под кривыми концентраций на рисунке 5б) в последовательные моменты времени. Волна деформаций постепенно затухает (Рис. 5з), и все процессы сказываются на распределении температуры, на котором квадратики соответствуют смене знака деформаций, а кружки — максимумам кривых концентрации примеси.

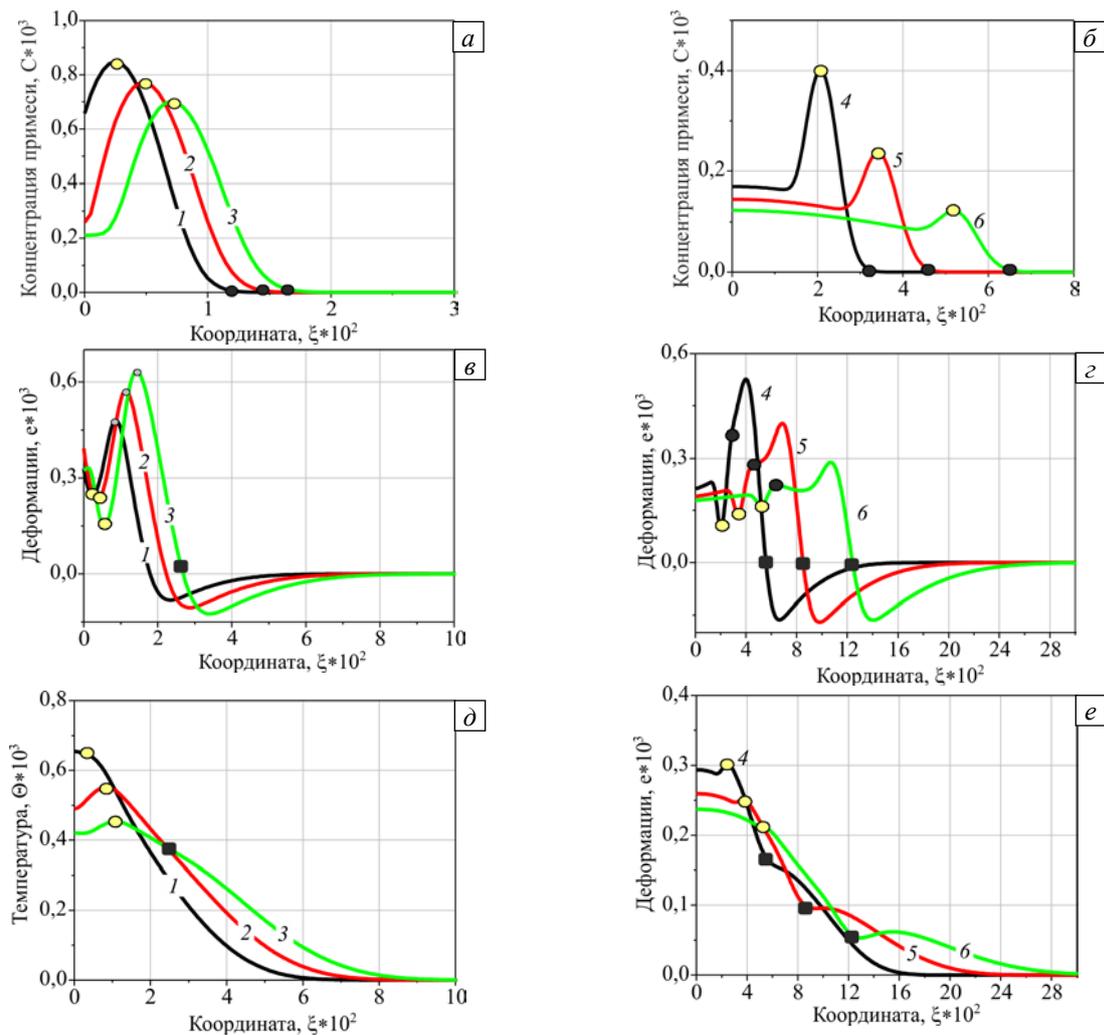


Рис. 5. Результаты решения связанной задачи для системы Mo(Ni) при близких к  $\tau_D$  и  $\tau_{imp}$  значениях времени  $\tau$ : 0,02 (кривая 1), 0,025 (2), 0,03 (3), 0,06 (4), 0,09 (5), 0,13 (6): распределение концентрации диффузанта Ni (а, б); профили волн деформации (в, з); распределение температуры (д, е)

На рисунке 4 представлено распределение температуры в указанные в примерах выше моменты времени (см. Рис. 1–3). Никаких особенностей, отличающих его от соответствующих распределений температуры для классической задачи теплопроводности, при выбранных параметрах не наблюдается.

Взаимовлияние разных физических процессов в большей степени проявляется при временах, близких к  $\tau_D$  и  $\tau_{imp}$ . Положению переднего фронта волны концентрации отвечает максимальное значение деформаций (точки, Рис. 5а, в). В момент времени  $\tau = \tau_D = 0,03$  видимые искажения появляются в распределении температуры, что связано со сменой знака деформаций (квадратики, Рис. 5з, д). На рисунке 5б, з, е представлены

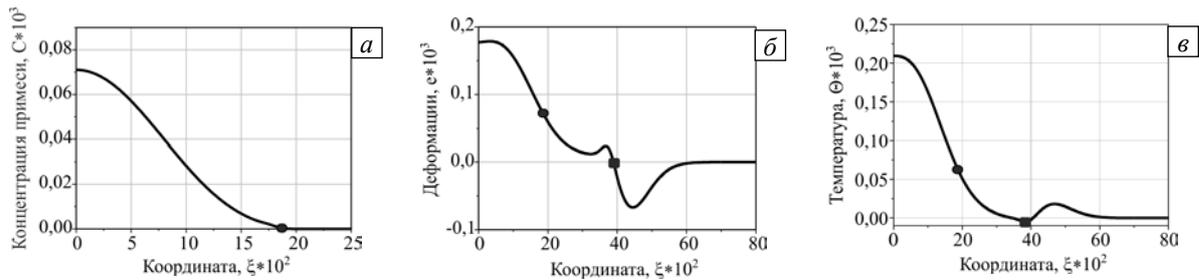


Рис. 6. Пример решения связанной задачи для системы Mo(Ni) при большем  $\tau_D$  и  $\tau_{imp}$  значении времени  $\tau = 0,4$ : распределение концентрации диффузанта Ni (а); профили волны деформации (б); распределение температуры (в)

В более поздние моменты времени диффузия примеси не вносит никакого вклада в распространение нелинейных волн деформации и температуры. Волна концентраций значительно отстает от других волн. Температура стремится к исходному значению (квадратик на Рис. 6б, в), после достижения которого наблюдается ее незначительное повышение.

## 7. Заключение

Таким образом, в работе представлена нелинейная математическая модель начальной стадии процесса внедрения потока частиц в поверхность металла. Модель учитывает неизотермический характер процесса и взаимодействие разномасштабных явлений, среди которых диффузия, распространение тепла и деформирование.

Выявлено, что волны разной физической природы влияют друг на друга. Взаимодействие волн и дополнительные нелинейные эффекты — следствие явлений теплового и концентрационного расширения, зависимости коэффициента диффузии от температуры; переноса компонента под действием градиента напряжений — приводят к тому, что распределения температуры и концентрации в разные моменты времени не соответствуют классическим, основанным на законах Фурье и Фика.

Продемонстрированы искажения волн деформации и температуры, которые являются результатом взаимодействия процессов.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы (направление III.23).

## Литература

1. Бельй А.В., Макушко Е.М., Поболь И.Л. Поверхностная упрочняющая обработка с применением концентрированных потоков энергии. Минск: Наука і техника, 1990. 78 с.
2. Комаров Ф.Ф., Новиков А.П. Ионно-лучевое перемешивание при облучении металлов // Итоги науки и техники. Серия: Пучки заряженных частиц и твердое тело. Распыление. М.: ВИНТИ, 1993. Т. 7. С. 54-81.
3. Комаров Ф.Ф., Новиков А.П., Буренков А.Ф. Ионная имплантация. Минск: Універсітэцкае, 1994. 303 с.
4. Panin A.V., Kazachenok M.S., Borodovitsina O.M., Perevalova O.B., Stepanova O.M., Ivanov Yu.F. Modification of the structure of surface layers of commercial titanium in the process of treatment by low-energy high-current electron beams // Phys. Metals Metallogr. 2016. Vol. 117. P. 550-561. DOI
5. Hao S., Zhao L., Zhang Y., Wang H. Improving corrosion and wear resistance of FV520B steel by high current pulsed electron beam surface treatment // Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B. 2015. Vol. 356-357. P. 12-16. DOI
6. Лейви А.Я., Талала К.А., Красников В.С., Яловец А.П. Модификация свойств конструкционных материалов интенсивными потоками заряженных частиц и плазмы // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». 2016. Т. 16, № 1. С. 28-55.
7. Zagulyaev D., Konovalov S., Gromov V., Glezer A., Ivanov Yu., Sundeev R. Structure and properties changes of Al-Si alloy treated by pulsed electron beam // Mater. Lett. 2018. Vol. 229. P. 377-380. DOI
8. Панин А.В., Казаченок М.С., Перевалова О.Б., Синякова Е.А., Круковский К.В., Мартынов С.А. Многоуровневые механизмы деформационного поведения технического титана и сплава Ti-6Al-4V, подвергнутых обработке высокочастотными электронными пучками // Физ. мезомех. 2018. Т. 21, № 4. С. 45-56. DOI
9. Бойко В.И., Скворцов В.А., Фортвов В.Е., Шаманин И.В. Взаимодействие импульсных пучков заряженных частиц с веществом. М.: Физматлит, 2003. 288 с.
10. Бойко В.И., Данейкин Ю.В., Хадкевич А.В., Юшицин К.В. Влияние механизмов генерации на профиль импульса механических напряжений в металлической мишени при воздействии мощных ионных пучков // Известия ТПУ. 2007. Т. 310, № 2. С. 87-93.
11. Chason E., Karlson M., Colin J.J., Magnfalt D., Sarakinos K., Abadias G. A kinetic model for stress generation in thin films grown from energetic vapor fluxes // J. Appl. Phys. 2016. Vol. 119. 145307. DOI
12. Амриханов И.В., Дидык А.Ю., Музафаров Д.З., Пузынин И.В., Пузынина Т.П., Саркар Н.Р., Сархатов И., Шарипов З.А. Модельное описание термоупругих напряжений в материалах при облучении тяжелыми ионами высоких энергий // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2010. № 3(2). С. 68-71.

13. Remnev G.E., Uglov V.V., Shymanski V.I., Pavlov S.K., Kuleshov A.K. Formation of nanoscale carbon structures in the surface layer of metals under the impact of high intensity ion beam // Appl. Surf. Sci. 2014. Vol. 310. P. 204-209. [DOI](#)
14. Индейцев Д.А., Мочалова Ю.А. Диффузия примеси в материале под действием вибрационных нагрузок // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 3. С. 292-305. URL: <https://www.chebsbornik.ru/jour/article/view/360/325>
15. Индейцев Д.А., Мецержков Ю.И., Кучмин А.Ю., Вавилов Д.С. Многомасштабная модель распространения стационарных упругопластических волн // Изв. РАН. МТТ. 2014. Т. 459, № 2. С. 165-168. [DOI](#)
16. Eringen A.C. Mechanics of continua. New York: Huntington, 1980. 605 p.
17. Кожеевникова М.Е., Ротанова Т.А., Валов А.В. Компьютерное моделирование плоских задач термоупругости: сравнительный анализ решений в связанной и несвязанной постановках // Вычисл. мех. сплош. сред. 2017. Т. 10, № 4. С. 388-398. [DOI](#)
18. Амирханов И.В., Пузынин И.В., Пузынина Т.П., Сархадов И. Исследование термоупругих эффектов в металлах в рамках модифицированной модели термического пика // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2013. № 2. С. 77-84.
19. Бойко В.И., Данейкин Ю.В., Пименов Э.Ю., Лисов В.И. Характеристики ударно-волнового возмущения в металлах при облучении ионными пучками // Известия ВУЗов. Физика. 2014. Т. 57, № 11-2. С. 151-156.
20. Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Двухкомпонентное упруго диффузионное полупространство под действием нестационарных возмущений // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2014. № 2. С. 31-38.
21. Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Упругое полупространство под действием одномерных нестационарных диффузионных возмущений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2014. Т. 156, № 1. С. 70-78.
22. Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Поверхностные функции Грина в нестационарных задачах термомехано-диффузии // ППП. 2017. Т. 79, № 1. С. 38-47. [DOI](#)
23. Чумаков Ю.А., Князева А.Г. Связанные процессы тепломассопереноса и эволюция напряжений в диске с включением в условиях воздействия концентрированного потока энергии // Физ. мезомех. 2013. Т.16, № 2. С. 85-91
24. Konovalov S., Chen X., Sarychev V., Nevskii S., Gromov V., Trtica M. Mathematical modeling of the concentrated energy flow effect on metallic materials // Metals. 2017. Vol. 7(1). 4. [DOI](#)
25. Ильина Е.С., Демидов В.Н., Князева А.Г. Особенности моделирования диффузионных процессов в упругом теле при его поверхностной модификации частицами // Вестник ПНИПУ. Механика. 2012. № 3. С. 25-49.
26. Sherief H.H., Hamza F.A., Saleh H.A. The theory of generalized thermoelastic diffusion // Int. J. Eng. Sci. 2004. Vol. 42. P. 591-608. [DOI](#)
27. Aouadi M. Generalized theory of thermoelastic diffusion for anisotropic media // J. Therm. Stresses. 2008. Vol. 31. P. 270-285. [DOI](#)
28. Князева А.Г. Диффузия и реология в локально-равновесной термодинамике // Вестник ПНИПУ. Механика. 2005. № 13. С. 45-60.
29. Князева А.Г. Нелинейные модели деформируемых сред с диффузией // Физ. мезомех. 2011. Т. 14, № 6. С. 35-51.
30. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 1. М: Наука, 1970. 492 с.

## References

1. Belyu A.V., Makushok E.M., Pobol' I.L. *Poverkhnostnaya uprochnyayushchaya obrabotka s primeneniye koncentrirovannykh potokov energii* [Surface hardening treatment with concentrated energy flows]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1990. 78 p.
2. Komarov F.F., Novikov A.P. Ionno-luchevoye peremeshivaniye pri obluchenii metallov [Ion-beam mixing with metal irradiation]. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya: Puchki zaryazhennykh chastits i tverdoye telo. Raspyleniye* [Results of science and technology. Series: Charged particle beams and solid. Spraying]. Moscow, VINITI, 1993, vol. 7, pp. 54-81.
3. Komarov F.F., Novikov A.P., Burenkov A.F. *Ionnaya implantatsiya* [Ion implantation]. Minsk, Universitetskaya, 1994. 303 p.
4. Panin A.V., Kazachenok M.S., Borodovitsina O.M., Perevalova O.B., Stepanova O.M., Ivanov Yu.F. Modification of the structure of surface layers of commercial titanium in the process of treatment by low-energy high-current electron beams. *Phys. Metals Metallogr.*, 2016, vol. 117, pp. 550-561. [DOI](#)
5. Hao S., Zhao L., Zhang Y., Wang H. Improving corrosion and wear resistance of FV520B steel by high current pulsed electron beam surface treatment. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B*, 2015, vol. 356-357, pp. 12-16. [DOI](#)
6. Leyvi A.Ya., Talala K.A., Krasnikov V.S., Yalovets A.P. Modification of the constructional materials with the intensive charged particle beams and plasma flows. *Vestnik YuUrGU. Seriya «Mashinostroyeniye» – Bulletin of South Ural State University. Series "Mechanical Engineering Industry"*, 2016, vol. 16, no. 1, pp. 28-55.
7. Zagulyaev D., Konovalov S., Gromov V., Glezer A., Ivanov Yu., Sundeev R. Structure and properties changes of Al-Si alloy treated by pulsed electron beam. *Mater. Lett.*, 2018, vol. 229, pp. 377-380. [DOI](#)
8. Panin A.V., Kazachenok M.S., Perevalova O.B., Sinyakova E.A., Krukovsky K.V., Martynov S.A. Mutiscale deformation of commercial titanium and Ti-6Al-4V alloy subjected to electron beam surface treatment. *Fiz. Mezomeh.*, 2018, vol. 21, pp. 441-451. [DOI](#)
9. Boyko V.I., Skvortsov V.A., Fortov V.E., Shamanin I.V. *Vzaimodeystviye impul'snykh puchkov zaryazhennykh chastits s veshchestvom* [The interaction of pulsed beams of charged particles with matter]. Moscow, Fizmatlit, 2003. 288 p.
10. Boyko V.I., Daneykin Yu.V., Khadkevich A.V., Yushitsin K.V. Influence of generation mechanisms on pulse profile of mechanical stress in metal target under the action of power ion beams. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2007, vol. 310, no. 2, pp. 82-88.
11. Chason E., Karlson M., Colin J.J., Magnfalt D., Sarakinos K., Abadias G. A kinetic model for stress generation in thin films grown from energetic vapor fluxes. *J. Appl. Phys.*, 2016, vol. 119, 145307. [DOI](#)
12. Amirkhanov I.V., Didyk A. Yu., Muzafarov D.Z., Puzynin I.V., Puzynina T.P., Sarker N.R., Sarhadov I., Sharipov Z.A. Model description of thermoelastic tensions in materials exposed to high energy heavy ions. *Vestnik RUDN. Seriya Matematika. Informatika. Fizika – RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*, 2010, no. 3(2), pp. 68-71.

13. Remnev G.E., Uglov V.V., Shymanski V.I., Pavlov S.K., Kuleshov A.K. Formation of nanoscale carbon structures in the surface layer of metals under the impact of high intensity ion beam. *Appl. Surf. Sci.*, 2014, vol. 310, pp. 204-209. [DOI](#)
14. Indeytsev D.A., Mochalova Yu.A. Impurity diffusion in material under vibration loads. *Chebyshevskii Sbornik*, 2017, vol.18, no. 3, pp. 292-305. URL: <https://www.chebsbornik.ru/jour/article/view/360/325>
15. Indeytsev D.A., Meshcheryakov Yu.I., Kuchmin A.Yu., Vavilov D.S. A Multiscale model of propagation of steady elasto-plastic waves. *Dokl. Phys.*, 2014, vol. 59, pp. 423-426. [DOI](#)
16. Eringen A.C. *Mechanics of continua*. New York: Huntington, 1980. 605 p.
17. Kozhevnikova M.E., Rotanova T.A., Valov A.V. Computer simulation of the plane thermoelasticity problems: comparative analysis of coupled and uncoupled statements. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2017, vol. 10, no. 4, pp. 388-398. [DOI](#)
18. Amirkhanov I.V., Puzynin I.V., Puzynina T.P., Sarhadov I. Investigation of thermoelastic effects in metals in the frame of the modified thermal spike model. *Vestnik RUDN. Seriya Matematika. Informatika. Fizika – RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*, 2013, no. 2, pp. 77-84.
19. Boyko V.I., Daneykin Yu.V., Pimenov E.Yu., Lisov V.I. Kharakteristiki udarno-volnovogo vozmushcheniya v metallakh pri obluchenii ionnymi puchkami [Characteristics of a shock wave perturbation in metals irradiated by ion beams]. *Izv. Vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*, 2014, vol. 57, no. 11/2, pp. 151-156.
20. Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. Dvukhkompontnoye uprugoye diffuzionnoye poluprostranstvo pod deystviyem nestatsionarnykh vozmushcheniy [Two-component elastic diffusion half-space under the action of non-stationary perturbations]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov ChES – Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2014, no. 2, pp. 31-38.
21. Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. Uprugoye poluprostranstvo pod deystviyem odnomernykh nestatsionarnykh diffuzionnykh vozmushcheniy [An elastic half space under the action of one-dimensional time-dependent diffusion perturbations]. *Uchen. zap. Kazan. un-ta. Fiz.-matem. Nauki – Scientific notes of the Kazan State University. Series: Physics and mathematics*, 2014, vol. 156, no. 1, pp. 70-78.
22. Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. Surface green's function in non-stationary problems of thermomechanical diffusion. *PPP – The Problems of Strength and Plasticity*, 2017, vol.79, no. 1, pp. 38-47.
23. Chumakov Yu.A., Knyazeva A.G. Interrelated processes of heat mass transfer and stress evolution in a disk with an inclusion under the action of high-density energy flow. *Fiz. mezomekh. – Physical mesomechanics*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 85-91.
24. Konovalov S., Chen X., Sarychev V., Nevskii S., Gromov V., Trtica M. Mathematical modeling of the concentrated energy flow effect on metallic materials. *Metals*, 2017, vol. 7(1), 4. [DOI](#)
25. Il'ina E.S., Demidov V.N., Knyazeva A.G. The modeling features of diffusion processes in elastic body under particles surface treatment. *Vestnik PNIPU. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*, 2012, no. 3, pp. 25-49.
26. Sherief H.H., Hamza F.A., Saleh H.A. The theory of generalized thermoelastic diffusion. *Int. J. Eng. Sci.*, 2004, vol. 42, pp. 591-608. [DOI](#)
27. Aouadi M. Generalized theory of thermoelastic diffusion for anisotropic media. *J. Therm. Stresses*, 2008, vol. 31, pp. 270-285. [DOI](#)
28. Knyazeva A.G. Diffuziya i reologiya v lokal'no-ravnesnoy termodinamike [Diffusion and rheology in locally-equilibrium thermodynamics]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*, 2005, no. 13, pp. 45-60.
29. Knyazeva A.G. Nonlinear diffusion models of deformed media. *Fiz. mezomekh. – Physical mesomechanics*, 2011, vol. 14, no. 6, pp. 35-51.
30. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. Moscow, Nauka, 1970. Vol. 1. 492 p.

Поступила в редакцию 26.01.2019; после доработки 08.02.2019; принята к опубликованию 11.02.2019

---

Сведения об авторах

Парфенова Елена Сергеевна, б/с, мнс., Институт физики прочности и материаловедения СО РАН (ИФПМ СО РАН), 614050, Томск, просп. Академический, 2/4; e-mail: linasergg@mail.ru

Князева Анна Георгиевна, дфмн, проф., Инженерная школа новых производственных технологий Томского политехнического университета (ИШНПТ ТПУ), 634028, Томск, ул. Тимакова, д. 12; e-mail: anna-knyazeva@mail.ru