

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.4.35](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.35)

УДК 534.

АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

С.А. Бочкарёв, С.В. Лекомцев, А.Н. Сенин

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Работа посвящена численному исследованию собственных колебаний горизонтально ориентированных упругих коаксиальных оболочек, кольцевой зазор между которыми полностью или частично заполнен сжимаемой вязкой жидкостью. Решение задачи осуществляется в трёхмерной постановке с использованием метода конечных элементов. Движение жидкости описывается в рамках акустического приближения в терминах потенциала скоростей. Соответствующие уравнения совместно с граничными условиями, отвечающими полному контакту на смоченных поверхностях, преобразуются с помощью метода Бубнова–Галёркина. Гидродинамические усилия находятся из тензора вязких напряжений. Математическая постановка задачи динамики тонкостенных конструкций основывается на вариационном принципе возможных перемещений, в который включены нормальные и тангенциальные компоненты сил, действующих со стороны жидкости на смоченные части упругих тел. При моделировании оболочек предполагается, что их криволинейные поверхности достаточно точно аппроксимируются совокупностью плоских сегментов, деформации которых определяются согласно классической теории пластин. Достоверность полученных результатов подтверждена путём сопоставления с известными из литературы данными для случая, когда весь объём кольцевого зазора заполнен идеальной жидкостью. Оценено влияние степени заполнения жидкостью и размера зазора на собственные частоты и соответствующие им формы колебаний коаксиальных оболочек с различными вариантами граничных условий. Продемонстрировано, что частичное заполнение приводит к расщеплению собственных частот колебаний, причём уменьшение объёма жидкости содействует росту их минимальных значений. Показано, что при некоторой величине зазора возможно появление смешанных форм колебаний не только в меридиональном, но и в окружном направлении.

Ключевые слова: коаксиальные оболочки, вязкая потенциальная жидкость, частичное заполнение, собственные колебания, МКЭ

ANALYSIS OF SPATIAL VIBRATIONS OF COAXIAL CYLINDRICAL SHELLS PARTIALLY FILLED WITH A FLUID

S.A. Bochkarev, S.V. Lekomtsev and A.N. Senin

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

This work is devoted to a numerical study of natural vibrations of horizontally oriented elastic coaxial shells with the annular gap completely or partially filled with a compressible viscous fluid. The solution is searched for a three-dimensional formulation of the examined dynamic problem using the finite element method. The fluid motion is described in the acoustic approximation in terms of the velocity potential. The corresponding equations together with the boundary conditions, related to a full fluid-shell contact, are transformed using the Bubnov–Galerkin method. The hydrodynamic forces are determined from the viscous stress tensor. The mathematical formulation of the problem of thin-walled structure dynamics is based on the variational principle of virtual displacements, which includes the normal and tangential components of forces exerted by the fluid on the wetted parts of elastic bodies. Modeling of the shells is based on the assumption that their curvilinear surfaces are simulated quite accurately by a set of flat segments, the strains of which are determined by the relations of the classical thin plate theory. The reliability of the results obtained is substantiated by comparing them with the known data for the case when the annular gap is completely filled with an ideal fluid. The influence of the fluid level and the size of the annular gap on the eigenfrequencies and the corresponding vibration modes of coaxial shells under a variety of boundary conditions is analyzed. It has been demonstrated that partial filling leads to splitting of natural vibration frequencies, while a decrease in the filling level facilitates the growth of their minimum values. It is shown that the appearance of mixed vibrational modes, both in the meridional and circumferential directions depends on the size of the annular gap.

Key words: coaxial shells, viscous potential fluid, partial filling, natural vibrations, FEM

1. Введение

Элементы конструкций в виде охватывающих друг друга оболочек с параллельными осями, между которыми располагается жидкость или газ, уже значительное время являются объектами разнообразных теоретических и экспериментальных исследований в связи с их широким распространением в различных областях техники. Работа [1], возможно, является первой, где рассматриваются осесимметричные свободные колебания цилиндрической оболочки конечной длины, соприкасающейся со слоем неподвижной жидкости (вторая оболочка подразумевается абсолютно жёсткой). Здесь формулируется общая постановка задачи, широко используемая в последующих исследованиях, в которых жидкость моделируется в акустическом приближении. Позднее результаты этой работы были обобщены в монографии [2]. В [3] анализируется влияние несоосности оболочек на динамическое поведение системы. Показано, что эксцентриситет между осями оказывает воздействие на колебательный процесс только в случае узкого кольцевого зазора между оболочками. В работе [4] получена зависимость основного тона осесимметричных колебаний от отношения радиусов соосных оболочек, заполненных жидкостью. Более общее решение этой задачи приведено в [5]. Анализ колебаний и устойчивости коаксиальных оболочек под

действием гидростатического давления, в которых кольцевой зазор частично заполнен жидкостью, произведён в [6, 7]. Влияние деформаций поперечного сдвига и анизотропии свойств материала, как по толщине, так и в срединной поверхности, на величину собственных частот колебаний оценено в [8, 9]. В [10] показано, что существенное воздействие на частотный спектр оказывает толщина слоя жидкости между внутренней упругой и наружной жёсткой оболочками. Вынужденные колебания подкреплённых коаксиальных оболочек, зазор между которыми заполнен идеальной сжимаемой жидкостью, рассмотрены в [11].

Обширную библиографию работ зарубежных авторов, посвящённую динамическому анализу коаксиальных оболочек, взаимодействующих как с неподвижной, так и с текущей жидкостью, охватывают обзор [12] и монография [13]. Простой и точный метод вычисления собственных частот колебаний системы длинных коаксиальных оболочек, содержащих неподвижную жидкость, предложен в [14]. В статье [15] установлено существование синфазных (направление и количество меридиональных полуволн совпадает для обеих оболочек) и противофазных (направления противоположны) форм колебаний, продемонстрировано, что последней всегда соответствует низшая собственная частота. В [16] показано, что собственные колебания коаксиальных оболочек конечной длины, погружённых в жидкость, могут быть вычислены с учётом эффекта виртуальной массы. В случае свободно опёртых оболочек полученные результаты хорошо согласуются с экспериментом. Численный анализ собственных частот, форм колебаний и отклика на гармоническую нагрузку тонких цилиндрических оболочек, расположенных внутри жёсткого цилиндра, заполненного жидкостью, и сопоставление с экспериментальными данными осуществлено в [17]. Описание натурных исследований представлено в статьях [18–21]. В последней из них установлен нелинейный характер изменения частоты от величины кольцевого зазора. Анализ построенных дисперсионных кривых, отвечающих случаю вынужденных колебаний коаксиальных оболочек, из которых наружная погружена в жидкость, а внутренняя заполнена воздухом, составляет суть работы [22]. Двумерным исследованиям влияния эксцентриситета для бесконечно длинных оболочек с неподвижной и текущей жидкостью посвящены публикации [23, 24]. В работе [25] для коаксиальных оболочек со сжимаемой жидкостью в кольцевом зазоре продемонстрировано наличие не только синфазных и противофазных форм колебаний, но также и смешанных (количество меридиональных полуволн не совпадает для обеих оболочек).

Учёт вязкости жидкости с использованием различных подходов осуществлён в работах [26–30]. Так, в [26] решение трёхмерных линеаризованных уравнений Навье–Стокса ищется в виде суммы скалярного и векторного потенциалов. Общее решение для системы коаксиальных оболочек, содержащих жидкость, определяется в классе бегущих волн. Аналитический подход при анализе свободных и вынужденных колебаний коаксиальных оболочек, разделённых вязкой жидкостью, описываемой двумерными линеаризованными уравнениями Навье–Стокса, приведён в работе [27]. Продемонстрировано, что размер кольцевого зазора и вязкость жидкости оказывают наиболее значительное влияние на демпфирование колебаний. Фундаментальное влияние вязкости жидкости в узком канале между двумя цилиндрическими оболочками изучено в [29]. Показано, что с уменьшением кинетического числа Рейнольдса значение сил вязкого сопротивления возрастает. Исследование амплитудно-частотных характеристик коаксиальных оболочек с вязким слоем несжимаемой жидкости между ними на резонансных частотах в условиях вибрации осуществлено в [30].

В перечисленных работах жидкая среда по-разному заполняет систему коаксиальных оболочек в зависимости от их ориентации. Она может занимать его полностью, либо частично при их вертикальном расположении. В этих случаях задача решается в осесимметричной постановке. При горизонтальном расположении конструкции и её частичном заполнении нарушается симметричность по окружной координате, что создаёт необходимость применения более сложных пространственных моделей. Насколько известно авторам, такого рода исследования не представлены в литературе. Целью настоящей работы является анализ влияния степени заполнения кольцевого зазора между горизонтально расположенными оболочками на собственные частоты и соответствующие им формы колебаний. Решение поставленной задачи выполняется с использованием модификации конечно-элементного алгоритма, который разработан авторами ранее для изучения гидроупругого взаимодействия оболочечных конструкций, имеющих произвольное поперечное сечение, полностью или частично заполненных жидкой средой [31–33].

2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим упругие коаксиальные оболочки (Рис. 1) длиной L , радиусами $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$, толщинами $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$, пространство между которыми на высоту H заполнено неподвижной сжимаемой вязкой жидкостью. Здесь и далее верхние индексы «(1)» и «(2)» характеризуют, соответственно, внутреннюю и внешнюю оболочки. Необходимо исследовать влияние размеров кольцевого зазора между оболочками, уровня заполнения зазора жидкостью, а также кинематических граничных условий, задаваемых на краях упругой конструкции, на спектр собственных частот колебаний всей системы, включая вариант, когда одна из оболочек абсолютно жёсткая.

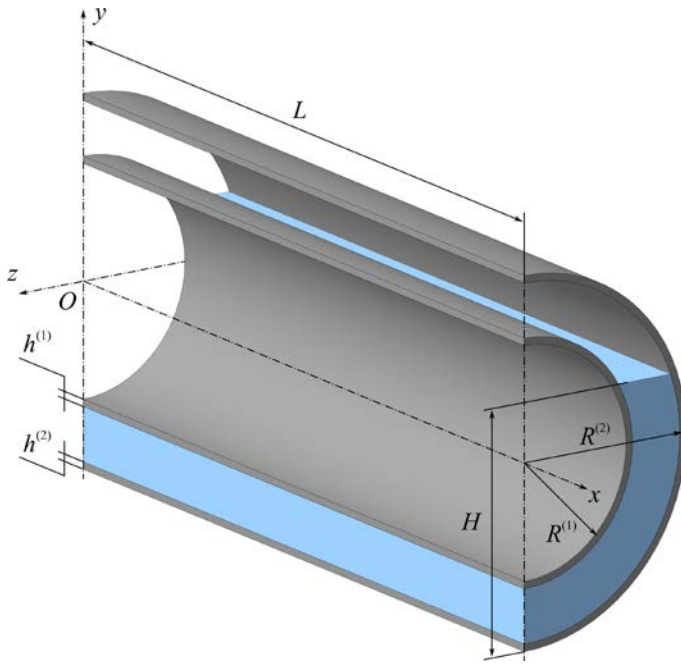


Рис. 1. Сечение коаксиальных цилиндрических оболочек, кольцевой зазор между которыми частично заполнен неподвижной жидкостью

Компоненты тензора напряжений F_{ij} в вязкой жидкости определяются известным образом

$$F_{ij} = \left(-p - \frac{2\nu_f \rho_f}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) g_{ij} + \nu_f \rho_f (\nabla_i v^j + \nabla_j v^i), \quad (4)$$

где g_{ij} — метрический тензор.

Будем искать решение системы уравнений (1)–(3) в виде скалярного потенциала

$$\mathbf{v} = \nabla \phi. \quad (5)$$

Подстановка (5) в (1)–(3) позволяет получить систему уравнений теории вязкой потенциальной жидкости [34]:

$$\left[\left(1 + \frac{4\nu_f}{3c_f^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta - \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi = 0, \quad (6)$$

$$p = \rho_f \left(\frac{4}{3} \nu_f \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi. \quad (7)$$

Предполагается, что свободная поверхность жидкости S_{free} не перемещается, на ней отсутствуют динамическое давление и поверхностное натяжение. Соответствующее граничное условие имеет вид [35]:

$$\phi = 0. \quad (8)$$

На торцах кольцевого канала потенциал скорости подчиняется следующим граничным условиям:

$$x = 0, L: \quad \partial \phi / \partial x = 0. \quad (9)$$

На смоченных поверхностях $S_\sigma^{(i)} = S_f \cap S_s^{(i)}$ ($i = 1, 2$) зададим условие полного контакта [36]:

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{F}}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v^{(i)}}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial w^{(i)}}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (11)$$

Поведение сжимаемой среды, занимающей область V_f , опишем с помощью системы линеаризованных уравнений Навье–Стокса:

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{\nu_f \rho_f}{3} \nabla \nabla \mathbf{v} + \nu_f \rho_f \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_f \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c_f^2, \quad (3)$$

включающей уравнения движения (1), неразрывности (2) и состояния (3), в которых \mathbf{v} — вектор скорости, p и ρ — давление и плотность жидкости, ρ_f — плотность жидкости в состоянии покоя, c_f — скорость звука в жидкости, ν_f — коэффициент кинематической вязкости жидкости, ∇ , Δ — дифференциальные операторы набла и Лапласа.

где $u^{(i)}$, $v^{(i)}$, $w^{(i)}$ — меридиональная, окружная и нормальная составляющие векторов перемещений оболочек вдоль соответствующих осей декартовой системы координат $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, связанной с боковой поверхностью упругих тел, S_f , $S_s^{(i)}$ — поверхности, ограничивающие объёмы жидкости V_f и упругих тел $V_s^{(i)}$, $\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{F}}$ — векторы напряжений в упругом теле и жидкости на границе контакта. Здесь и далее черта сверху означает, что величина определена в координатах $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

С учётом выражений (4), (5) компоненты вектора $\bar{\mathbf{F}}$ приобретают вид:

$$\bar{\mathbf{F}} = \{F_{\bar{x}\bar{x}}, F_{\bar{y}\bar{y}}, F_{\bar{z}\bar{z}}\}, \quad (12)$$

$$\text{где } F_{\bar{x}\bar{x}} = 2\nu_f \rho_f \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z} \partial \bar{x}}, \quad F_{\bar{y}\bar{y}} = 2\nu_f \rho_f \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z} \partial \bar{y}}, \quad F_{\bar{z}\bar{z}} = -p - 2\nu_f \rho_f \left(\frac{1}{3} \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} \right).$$

Уравнение (6) вместе с граничными условиями (8), (9) и (11) преобразуем с помощью метода Бубнова–Галёркина [37] к слабой форме:

$$\begin{aligned} & \int_{V_f} \nabla F_n \nabla \hat{\phi} dV + \int_{V_f} F_n \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} dV - \int_{S_s^{(1)}} F_n \frac{\partial \hat{w}^{(1)}}{\partial t} dS + \int_{S_s^{(2)}} F_n \frac{\partial \hat{w}^{(2)}}{\partial t} dS + \\ & + \int_{V_f} \frac{4\nu_f}{3c_f^2} \nabla F_n \nabla \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} dV - \int_{S_s^{(1)}} \frac{4\nu_f}{3c_f^2} F_n \frac{\partial^2 \hat{w}^{(1)}}{\partial t^2} dS + \int_{S_s^{(2)}} \frac{4\nu_f}{3c_f^2} F_n \frac{\partial^2 \hat{w}^{(2)}}{\partial t^2} dS = 0, \quad n = 1, \dots, m_f, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\hat{\phi}$, $\hat{w}^{(i)}$ — аппроксимации потенциала скорости и нормальных компонент векторов перемещений оболочек, F_n , m_f — базисные функции и их количество.

Прибегнем к распространённому при моделировании упругих оболочек предположению, что криволинейная поверхность достаточно точно может быть представлена в виде совокупности плоских сегментов [38]. Деформации каждого из них определим в рамках классической теории тонких пластин [39] в координатах $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)} &= \{ \boldsymbol{\varepsilon}_{\bar{x}\bar{x}}^{(i)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\bar{y}\bar{y}}^{(i)}, \boldsymbol{\gamma}_{\bar{x}\bar{y}}^{(i)} \}^T = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)} + \bar{z} \boldsymbol{\kappa}^{(i)}, \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)} &= \{ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\bar{x}\bar{x}}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\bar{y}\bar{y}}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{\bar{x}\bar{y}}^{(i)} \}^T = \left\{ \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \bar{x}} \right\}^T, \\ \boldsymbol{\kappa}^{(i)} &= \{ \boldsymbol{\kappa}_{\bar{x}\bar{x}}^{(i)}, \boldsymbol{\kappa}_{\bar{y}\bar{y}}^{(i)}, \boldsymbol{\kappa}_{\bar{x}\bar{y}}^{(i)} \}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \bar{x}^2}, -\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \bar{y}^2}, -2\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right\}^T. \end{aligned}$$

Физические соотношения, связывающие вектор обобщённых усилий и моментов $\bar{\mathbf{T}}^{(i)}$ с вектором обобщённых деформаций $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}$, запишем в матричном виде:

$$\bar{\mathbf{T}}^{(i)} = \{ T_{\bar{x}\bar{x}}^{(i)}, T_{\bar{y}\bar{y}}^{(i)}, T_{\bar{x}\bar{y}}^{(i)}, M_{\bar{x}\bar{x}}^{(i)}, M_{\bar{y}\bar{y}}^{(i)}, M_{\bar{x}\bar{y}}^{(i)} \}^T = \mathbf{D}^{(i)} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}.$$

Для случая изотропного материала коэффициенты, входящие в матрицу жёсткостей $\mathbf{D}^{(i)}$, найдём согласно выражениям:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{\bar{x}\bar{x}}^{(i)} \\ N_{\bar{y}\bar{y}}^{(i)} \\ N_{\bar{x}\bar{y}}^{(i)} \end{Bmatrix} &= \int_{-h^{(i)}/2}^{h^{(i)}/2} \mathbf{Q}^{(i)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\bar{x}\bar{x}}^{(i)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\bar{y}\bar{y}}^{(i)} \\ \boldsymbol{\gamma}_{\bar{x}\bar{y}}^{(i)} \end{Bmatrix} d\bar{z} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(i)} & A_{12}^{(i)} & 0 \\ A_{21}^{(i)} & A_{22}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\bar{x}\bar{x}}^{(i)} \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\bar{y}\bar{y}}^{(i)} \\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{\bar{x}\bar{y}}^{(i)} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} M_{\bar{x}\bar{x}}^{(i)} \\ M_{\bar{y}\bar{y}}^{(i)} \\ M_{\bar{x}\bar{y}}^{(i)} \end{Bmatrix} &= \int_{-h^{(i)}/2}^{h^{(i)}/2} \mathbf{Q}^{(i)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\bar{x}\bar{x}}^{(i)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\bar{y}\bar{y}}^{(i)} \\ \boldsymbol{\gamma}_{\bar{x}\bar{y}}^{(i)} \end{Bmatrix} (\bar{z}^{(i)})^2 d\bar{z} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(i)} & D_{12}^{(i)} & 0 \\ D_{21}^{(i)} & D_{22}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_{\bar{x}\bar{x}}^{(i)} \\ \boldsymbol{\kappa}_{\bar{y}\bar{y}}^{(i)} \\ \boldsymbol{\kappa}_{\bar{x}\bar{y}}^{(i)} \end{Bmatrix}, \\ A_{ij}^{(i)} &= h^{(i)} Q_{ij}^{(i)}, \quad D_{ij}^{(i)} = (h^{(i)})^3 Q_{ij}^{(i)} / 12, \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}^{(i)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(i)} & Q_{12}^{(i)} & 0 \\ Q_{12}^{(i)} & Q_{22}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad Q_{11}^{(i)} = Q_{22}^{(i)} = \frac{E_s^{(i)}}{1 - (\nu_s^{(i)})^2}, \quad Q_{12}^{(i)} = Q_{21}^{(i)} = \frac{\nu_s^{(i)} E_s^{(i)}}{1 - (\nu_s^{(i)})^2}, \quad Q_{66}^{(i)} = \frac{E_s^{(i)}}{2(1 - \nu_s^{(i)})},$$

где $E_s^{(i)}$ и $\nu_s^{(i)}$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материалов оболочек.

Математическая формулировка задачи динамики упругих тел основывается на вариационном принципе возможных перемещений, который с учётом соотношений (7), (10)–(12) и работы сил инерции запишем в матричном виде как

$$\int_{S_s^{(i)}} (\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)})^T \mathbf{D}^{(i)} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)} dS + \int_{V_s^{(i)}} \rho_s^{(i)} (\delta \bar{\mathbf{d}}^{(i)})^T \ddot{\bar{\mathbf{d}}}^{(i)} dV - \int_{S_g^{(i)}} (\delta \bar{\mathbf{d}}^{(i)})^T \bar{\mathbf{P}}^{(i)} dS = 0, \quad (14)$$

где $\rho_s^{(i)}$ — плотность материалов оболочек, $\bar{\mathbf{d}}^{(i)} = \{u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}, \theta_x^{(i)}, \theta_y^{(i)}, \theta_z^{(i)}\}^T$ — векторы перемещений и углов поворота внутренней и внешней оболочек.

3. Численная реализация

Численное решение задачи выполнено методом конечных элементов (МКЭ) [38]. Для описания потенциала скорости $\hat{\phi}$, базисных функций F_n и мембранных перемещений оболочек (u, v) использовались функции формы Лагранжа с линейной аппроксимацией, а для изгибных перемещений оболочек w — неконформные функции формы Эрмита. Дискретизация областей, занимаемых жидкостью и оболочками, осуществлялась пространственными призматическими и плоскими четырёхугольными конечными элементами соответственно.

Стандартные операции МКЭ позволяют получить из соотношений (13) и (14) связанную систему уравнений, описывающую взаимодействие упругих оболочек и жидкости, которая в матричной форме имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_s^{(2)} & 0 \\ -\mathbf{M}_{fs}^{v(1)} & \mathbf{M}_{fs}^{v(2)} & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}^{(1)} \\ \dot{\mathbf{d}}^{(2)} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_s^{v(1)} & 0 & -\mathbf{C}_{sf}^{(1)} \\ 0 & \mathbf{C}_s^{v(2)} & \mathbf{C}_{sf}^{(2)} \\ -\mathbf{C}_{fs}^{(1)} & \mathbf{C}_{fs}^{(2)} & \mathbf{C}_f^v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{(1)} \\ \mathbf{d}^{(2)} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s^{(1)} & 0 & -\mathbf{K}_{sf}^{v(1)} \\ 0 & \mathbf{K}_s^{(2)} & \mathbf{K}_{sf}^{v(2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{(1)} \\ \mathbf{d}^{(2)} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = 0, \quad (15)$$

где $\mathbf{d}^{(i)}$ и $\boldsymbol{\phi}$ — обобщённые векторы перемещений и углов поворота внутренней и внешней оболочек и потенциала скорости, точка обозначает дифференцирование по времени.

Матрицы масс — \mathbf{M} , демпфирования — \mathbf{C} , и жёсткости — \mathbf{K} , для отдельных конечных элементов формируются как

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_s^{(i)} &= \int_{V_s^{(i)}} (\mathbf{B}^{(i)})^T \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} dV, & \bar{\mathbf{M}}_s^{(i)} &= \int_{V_s^{(i)}} \rho_s^{(i)} (\mathbf{N}^{(i)})^T \mathbf{N}^{(i)} dV, & \bar{\mathbf{C}}_{sf}^{(i)} &= \int_{S_g^{(i)}} \rho_f (\mathbf{N}_w^{(i)})^T \mathbf{F} dS, \\ \mathbf{K}_f &= \int_{V_f} \left(\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \right) dV, & \mathbf{M}_f &= \int_{V_f} \frac{1}{c_f^2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} dV, & \bar{\mathbf{C}}_s^{v(i)} &= 2\nu_f \rho_f \mathbf{H}^{(i)}, \\ \bar{\mathbf{C}}_{fs}^{(i)} &= - \int_{S_g^{(i)}} \mathbf{F}^T \mathbf{N}_w^{(i)} dS, & \mathbf{C}_f^v &= \int_{V_f} \frac{4\nu_f}{3c_f^2} \left(\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \right) dV, & \bar{\mathbf{M}}_{fs}^{v(i)} &= - \int_{S_g^{(i)}} \frac{4\nu_f}{3c_f^2} \mathbf{F}^T \mathbf{N}_w^{(i)} dS, \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{sf}^{v(i)} = \int_{S_g^{(i)}} 2\nu_f \rho_f \left(\frac{\partial (\mathbf{N}_w^{(i)})^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial (\mathbf{N}_w^{(i)})^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) dS, \quad \mathbf{H}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \int_{S_g^{(i)}} \frac{\partial \mathbf{N}_u^{(i)}}{\partial x} (\mathbf{N}_w^{(i)})^T dS & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \int_{S_g^{(i)}} \frac{\partial \mathbf{N}_v^{(i)}}{\partial y} (\mathbf{N}_w^{(i)})^T dS & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь: $\mathbf{B}^{(i)}$ — матрица градиентов, устанавливающая связь между вектором деформаций и вектором узловых перемещений оболочечного конечного элемента; \mathbf{F} , $\mathbf{N}^{(i)}$, $\mathbf{N}_u^{(i)}$, $\mathbf{N}_v^{(i)}$, $\mathbf{N}_w^{(i)}$ — функции формы для потенциала скорости, обобщённого вектора узловых перемещений оболочек и его меридиональной, касательной и нормальной составляющих.

Некоторые матрицы в (15) записываются в декартовых координатах $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, следовательно для получения решения в глобальной системе координат $Oxyz$, в которой задана геометрия и записаны определяющие уравнения для жидкости, необходимо выполнить преобразование перемещений и углов поворота с помощью матрицы направляющих косинусов γ , имеющей размерность 3×3 :

$$\mathbf{d}^{(i)} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}^T \bar{\mathbf{d}}^{(i)}.$$

При численной реализации в каждом узле конечного элемента оболочек определяется шесть неизвестных (три перемещения и три угла поворота), поэтому преобразование типовых матриц выполняется с использованием диагональной матрицы $\mathbf{L} = \text{diag}\{\gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_s^{(i)} &= (\mathbf{L}^{(i)})^T \bar{\mathbf{K}}_s^{(i)} \mathbf{L}^{(i)}, & \mathbf{M}_s^{(i)} &= (\mathbf{L}^{(i)})^T \bar{\mathbf{M}}_s^{(i)} \mathbf{L}^{(i)}, & \mathbf{C}_s^{v(i)} &= (\mathbf{L}^{(i)})^T \bar{\mathbf{C}}_s^{v(i)} \mathbf{L}^{(i)}, \\ \mathbf{K}_{sf}^{v(i)} &= (\mathbf{L}^{(i)})^T \bar{\mathbf{K}}_s^{v(i)}, & \mathbf{C}_{sf}^{(i)} &= (\mathbf{L}^{(i)})^T \bar{\mathbf{C}}_{sf}^{(i)}, & \mathbf{C}_{fs}^{(i)} &= \bar{\mathbf{C}}_{fs}^{(i)} \mathbf{L}^{(i)}, & \mathbf{M}_{fs}^{v(i)} &= \bar{\mathbf{M}}_{fs}^{v(i)} \mathbf{L}^{(i)}. \end{aligned}$$

Исходя из представления движения оболочек и жидкости вида $(\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{d}^{(2)}, \Phi) = (\tilde{\mathbf{d}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{d}}^{(2)}, \tilde{\Phi}) \exp(\lambda t)$, уравнение (15) переписывается как

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) \{\tilde{\mathbf{d}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{d}}^{(2)}, \tilde{\Phi}\}^T = 0, \tag{16}$$

где $\tilde{\mathbf{d}}^{(1)}$, $\tilde{\mathbf{d}}^{(2)}$ и $\tilde{\Phi}$ — некоторые векторные функции координат, $\lambda = \delta + i\omega$ — характеристический показатель, в котором ω — собственная частота колебаний, а δ — величина, отвечающая за демпфирование системы, i — мнимая единица: $i = \sqrt{-1}$.

С целью нахождения λ система уравнений (16) сводится к обобщённой задаче на собственные значения для несимметричных матриц удвоенной размерности:

$$\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = 0, \tag{17}$$

где \mathbf{I} — единичная матрица, $\mathbf{x} = \{\tilde{\mathbf{d}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{d}}^{(2)}, \tilde{\Phi}\}^T$.

Вычисление комплексных собственных значений λ системы уравнений (17) осуществляется с использованием процедур ARPACK, в основе которых лежит неявно перезапускаемый метод Арнольди [40].

4. Численные результаты

В приведённых далее примерах исследованы колебания системы горизонтально ориентированных коаксиальных оболочек, кольцевой канал между которыми заполнен вязкой сжимаемой жидкостью (Табл. 1, Вариант I). Рассмотрены такие комбинации граничных условий, при которых различие в собственных частотах наиболее существенно. Это жёсткое закрепление на обоих краях ($u = v = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$, или условно СС) и консольное закрепление (СФ). Расчёты выполнены

Таблица 1. Физико-механические и геометрические параметры системы «коаксиальные оболочки–жидкость»

Вариант	Параметры оболочек							Параметры жидкости		
	L , м	$R^{(1)}$, м	$R^{(2)}$, м	$h^{(1)} = h^{(2)} = h$, м	$E_s^{(1)} = E_s^{(2)} = E_s$, Н/м ²	$\nu_s^{(1)} = \nu_s^{(2)} = \nu_s$	$\rho_s^{(1)} = \rho_s^{(2)} = \rho_s$, кг/м ³	ρ_f , кг/м ³	c_f , м/с	ν_f , м ² /с
I	1,0	—	0,10	5×10^{-4}	$2,0 \times 10^{11}$	0,3	7800	1000	1500	$1,121 \times 10^{-6}$
II	0,3	0,1	0,15	2×10^{-3}	$6,9 \times 10^{10}$	0,3	2700	1000	1483	—

при разной величине безразмерного кольцевого зазора между внутренней и наружной оболочками, определяемого как $k = (R^{(2)} - R^{(1)})/R^{(1)}$. При анализе влияния уровня заполнения H на частотный спектр приняты во внимание только такие его значения, при которых обе оболочки остаются смоченными, то есть

$$R^{(2)} - R^{(1)} \leq H \leq 2R^{(2)}. \quad (18)$$

В представлении полученных результатов использовался безразмерный уровень заполнения зазора жидкостью $\eta = H(2R^{(2)})^{-1}$. Проанализированы случаи, когда внутренняя оболочка была упругой, а внешняя — или абсолютно жёсткой (ER) или упругой (EE).

Дискретизация объёма жидкости осуществлялась с учётом совместности сеток на границах системы «оболочки–жидкость» и зависела от уровня заполнения. Параметры конечно-элементной сетки определялись исходя из результатов исследования сходимости решения как функции числа узловых неизвестных. При численном моделировании каждая оболочка аппроксимировалась в совокупности 4800 элементами (по 40 и 120 элементов в меридиональном и окружном направлениях соответственно) с возможностью дополнительного сгущения сетки в окружном направлении в зависимости от площади смоченных поверхностей. Полная система в случае обеих упругих оболочек и полного заполнения жидкостью содержала 123000 степеней свободы.

4.1. Верификация численной модели

Проверка достоверности модели и результатов её конечно-элементной реализации осуществлена путём сравнения с результатами работы [25]. Система состояла из жёстко закреплённых с обоих краёв коаксиальных оболочек, кольцевой зазор между которыми полностью занимала сжимаемая невязкая жидкость (Табл. 1, Вариант II).

Выше отмечалось, что в работе [25] для двух упругих коаксиальных оболочек впервые показано существование смешанных форм колебаний наряду с синфазными и противофазными формами. В таблице 2 приведены собственные частоты ω (Гц), установленные аналитическим путём в [25] и вычисленные в рамках описанной модели. Здесь через j и m обозначено количество полуволн в окружном и меридиональном направлениях соответственно, а символом «*» — вариант, при котором количество меридиональных полуволн у оболочек не совпадает. При исследовании в пространственной постановке для идентификации комбинации волновых чисел (j, m) потребовалось построение форм

Таблица 2. Собственные частоты колебаний ω (Гц) жёстко закреплённых с обоих краёв коаксиальных оболочек с неподвижной невязкой сжимаемой жидкостью в зазоре

j	m	Данные из [25]	Мода	Расчёт	j	m	Данные из [25]	Мода	Расчёт
1	1	391,1	противофазная	390,3	2	1	435,6	противофазная	434,9
	2	847,6	противофазная	846,3		2	907,1	противофазная	905,2
	3	1397,5	противофазная	1396,5		3	996,8	синфазная	995,2
	1	1736,6	синфазная	1732,5		1	1401,3	противофазная	1399,7
	4	1908,5	противофазная	1907,3		*	1822,2	смешанная	1819,1
	5	2317,2	противофазная	2312,5		*	1892,6	смешанная	1891,2
	*	2623,4	смешанная	2579,5		*	2265,3	смешанная	2262,2
3	1	403,0	противофазная	403,2	4	1	382,5	противофазная	383,3
	1	671,3	синфазная	671,4		1	561,9	синфазная	562,9
	2	858,3	противофазная	857,7		2	791,0	противофазная	792,0
	2	1344,8	синфазная	1343,8		2	1075,5	синфазная	1076,7
	3	1352,4	противофазная	1351,8		3	1267,5	противофазная	1268,8
	4	1810,7	противофазная	1811,1		3	1676,9	синфазная	1678,0
	3	2010,6	синфазная	2008,6		4	1729,2	противофазная	1731,3
5	1	385,6	противофазная	386,7	5	3	1191,5	противофазная	1194,2
	1	658,4	синфазная	660,3		3	1515,9	синфазная	1519,8
	2	748,5	противофазная	750,4		4	1648,2	противофазная	1651,8
	2	1008,9	синфазная	1011,8		4	2086,8	синфазная	2090,6

колебаний. При этом решение задачи включало симметричную и антисимметричную составляющие, вследствие чего одной частоте соответствовали две формы колебаний, отличающиеся лишь на угол поворота в окружном направлении.

По представленной информации можно заключить, что полученные в рамках реализованной модели данные достаточно хорошо согласуются с аналитическим решением [25]. Для избежания различия в результатах при вычислениях в рамках осесимметричной и трёхмерной постановок при большом количестве окружных полуволн j необходимо увеличивать число конечных элементов в этом направлении до 120.

4.2. Собственные колебания горизонтально ориентированных оболочек

В предыдущем подразделе говорится, что решение задачи в пространственной постановке включает симметричную и антисимметричную составляющие. У конструкций, содержащих жидкость во всём объёме, одной частоте соответствуют колебания разной формы. В случае частичного заполнения горизонтально ориентированных оболочек происходит расщепление собственных частот [31], вследствие чего двум формам, отвечающим одинаковым комбинациям волновых чисел, соответствуют разные частоты. Данный факт демонстрируется на рисунке 2, где показаны зависимости мнимых (частота колебаний) и действительных (величина демпфирования системы) частей собственных значений λ от безразмерного уровня заполнения η кольцевого канала шириной $k=1/10$. Здесь внешняя оболочка является абсолютно жёсткой, а упругая внутренняя оболочка жёстко закреплена с обоих краёв.

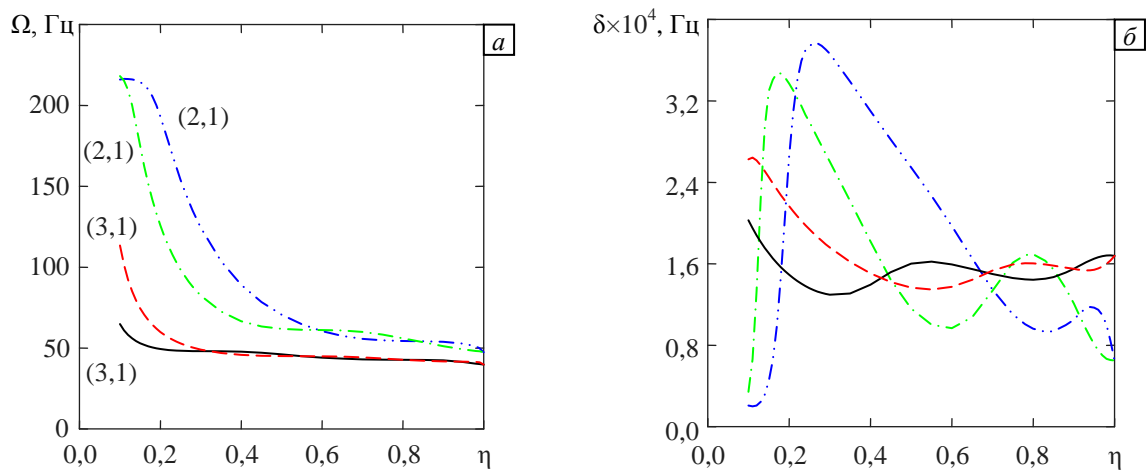


Рис. 2. Зависимости мнимых (а) и действительных (б) частей собственных значений λ от безразмерного уровня заполнения η для случая внешней жёсткой оболочки ($k=1/10$, СС)

Симметричная и антисимметричная моды совпадают, когда канал между оболочками заполнен целиком ($\eta=1$). При снижении уровня жидкости ($\eta < 1$) они начинают отличаться друг от друга, что характеризует расщепление частот на ветви. Другой предельный случай соответствует оболочкам с воздушной средой в зазоре ($\eta=0$). В таких условиях частотный спектр будет наиболее близок к несвязанным колебаниям разных оболочек в вакууме, и различные ветви должны совпасть. Очевидно, что из-за условия (18) эта ситуация не достижима для всех частот спектра. С другой стороны, эволюция частот, соотносящихся с одинаковыми комбинациями волновых чисел (j, m), наглядно демонстрирует, что для некоторых частот сближение симметричной и антисимметричной компонент возможно и при значениях $\eta > 0$ (см. Рис. 2а). Представленные данные найдены согласно предложенной в [34] модели с учётом вязкости среды. Они подтверждают хорошо известный факт о незначительности влияния вязкости на частоты собственных колебаний конструкций, контактирующих с жидкостью [13]. Результаты на рисунке 2б демонстрируют демпфирование системы на различных частотах спектра при разном уровне жидкости.

На рисунке 3 изображены зависимости низших собственных частот ω от безразмерного уровня заполнения η кольцевого зазора между коаксиальными оболочками, вычисленные при различных значениях его размера k и разных вариантах граничных условий на краях. Из приведённых графиков видно, что понижение уровня жидкости влечет за собой рост низших собственных частот колебаний всей системы в целом. Этот эффект обусловлен как уменьшением суммарной площади смоченных поверхностей, так и влиянием присоединённой массы жидкости. При малом уровне заполнения ($k=1/100$) наблюдается резкое изменение низшей собственной частоты. Аналогичные результаты получены

в работах [31, 32] при исследовании частичного заполнения одиночных оболочек. Возникновение данного явления только при малых значениях k обусловлено ограничением (18), устанавливающим минимально возможный размер смоченной поверхности. Снижение уровня жидкости не вызывает качественных отличий в поведении системы от случая максимально возможного заполнения. А именно, уменьшение величины кольцевого зазора, жёсткости внешней оболочки, а также снижения жёсткости всей системы в целом при консольном закреплении оболочек приводит к падению их минимальных собственных частот. При этом чем уже зазор k , тем шире диапазон значений уровня заполнения жидкостью η , в котором он оказывает незначительное влияние на величину низшей частоты. Волнообразный характер кривых на рисунке 3 связан с чередованием минимальных значений, отвечающих формам колебаний с одинаковой комбинацией волновых чисел.

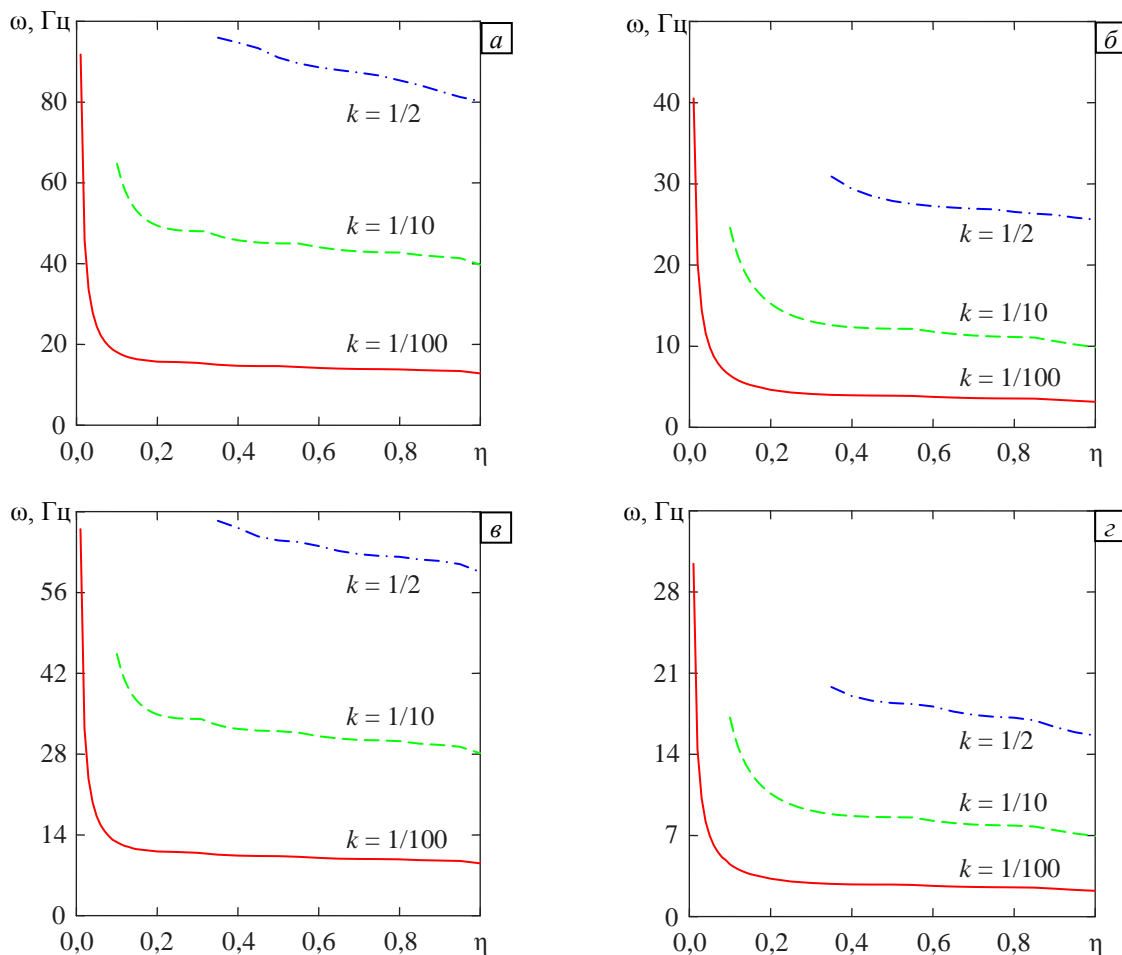


Рис. 3. Зависимость низших собственных частот колебаний системы ω (Гц) от безразмерного уровня заполнения η при различных сочетаниях типов оболочек и вариантов граничных условий: ER, CC (а); ER, CF (б); EE, CC (в); EE, CF (г)

На рисунках 4, 5 представлены собственные формы колебаний жёстко закреплённых с обоих краёв коаксиальных оболочек при $k = 1/10$. Приведены моды, построенные при различных уровнях заполнения и разной жёсткости внешней оболочки, для одинаковой комбинации волновых чисел (3,1). На поперечных сечениях системы при $x = L/2$ штриховыми линиями обозначены оболочки в недеформированном состоянии, а сплошными — в деформированном. Заливкой показана жидкость. При построении форм колебаний для наглядности перемещения отмасштабированы.

Из рисунков видно, что при заполненном канале формы отличаются лишь на угол поворота в поперечном сечении, а высота всех окружающих полуволи является одинаковой. С понижением уровня заполнения, при сохранении количества полуволи, отличие в формах не ограничивается углом поворота. Это связано с тем, что перемещения оболочек на смачиваемых поверхностях превышают перемещения на частях боковых поверхностей, которые не взаимодействуют с жидкостью. В случае обеих упругих оболочек при $\eta = 1$ амплитуда перемещений внутренней оболочки превышает амплитуду перемещений наружной, тогда как при $\eta < 1$ наблюдается обратная картина.

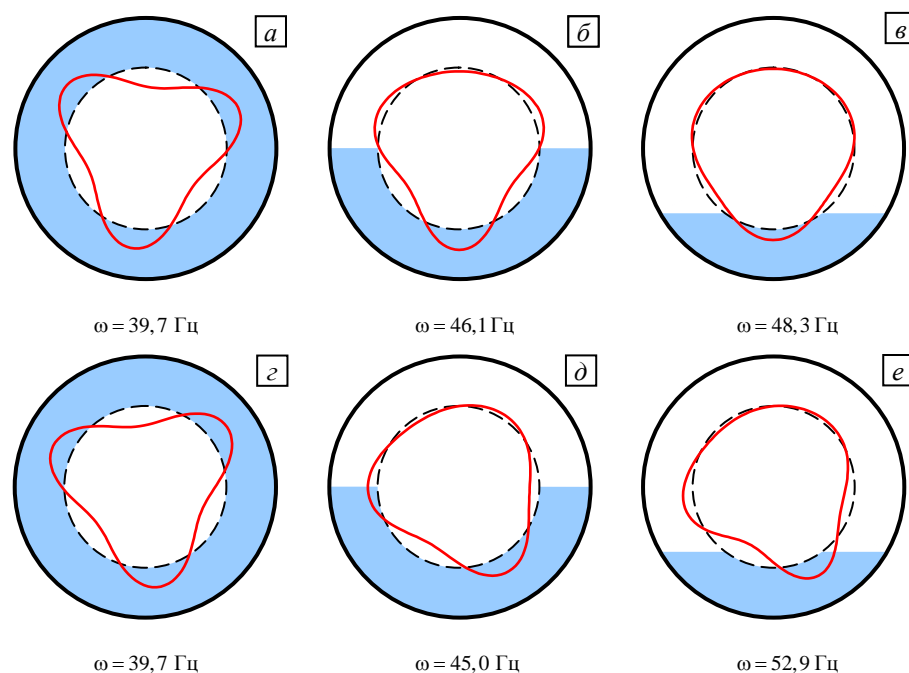


Рис. 4. Собственные формы колебаний системы ER, CC в сечениях $x=L/2$, соответствующие $k=1/10$ и одинаковой комбинации волновых чисел (3,1), но разным частотам в спектре, в зависимости от уровня заполнения жидкостью η : 1 (а, з), 0,5 (б, д), 0,25 (в, е)

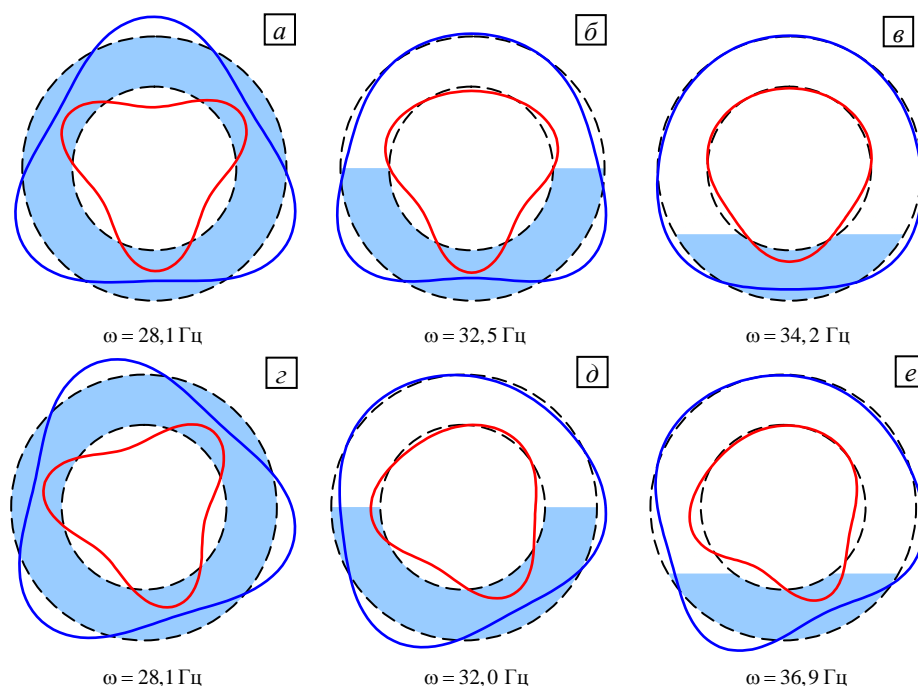


Рис. 5. Собственные формы колебаний системы EE, CC в сечениях $x=L/2$, соответствующие $k=1/10$ и одинаковой комбинации волновых чисел (3,1), но разным частотам в спектре, в зависимости от уровня заполнения жидкостью η : 1 (а, з), 0,5 (б, д), 0,25 (в, е)

При анализе собственных форм колебаний выявлено, что при определённой величине кольцевого зазора возможно появление смешанных мод не только в меридиональном, но и в окружном направлении. Данный факт продемонстрирован на рисунке 6. Здесь показано, что при различных уровнях заполнения жидкостью количество полуволн в окружном направлении для внутренней и наружной оболочек неодинаково. На рисунке 7 отражены пространственные моды (оболочки и поперечное сечение повернуто на 90°), которые для наглядности также отмасштабированы. Реальные значения, полученные из решения спектральной задачи (17), приведены на цветовой шкале, которая является общей для двух оболочек. Здесь светло-серым (красным) цветом показаны перемещения в направлении, нормальном к внешней

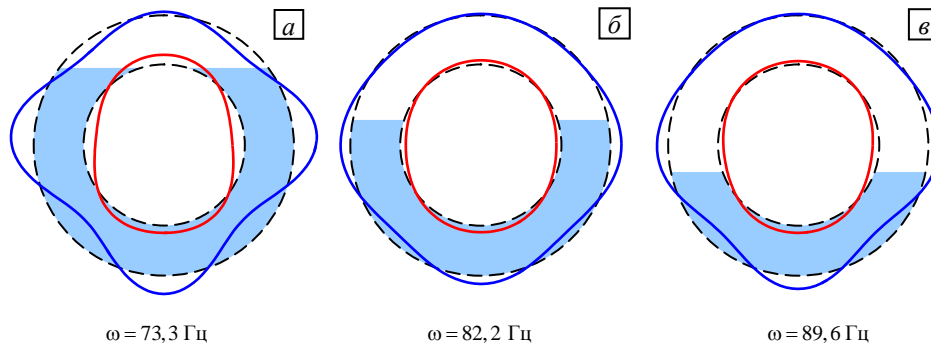


Рис. 6. Собственные формы колебаний системы ER, CC в сечениях $x = L/2$ при $k = 1/10$ в зависимости от уровня заполнения жидкостью η : 1 (a), 0,5 (б), 0,25 (e)

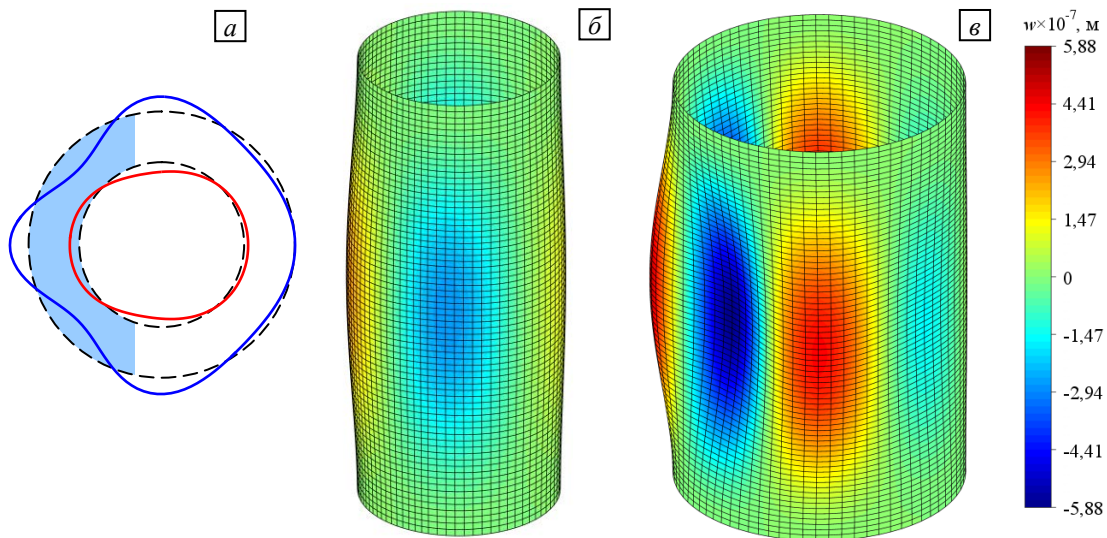


Рис. 7. Собственные формы колебаний жёстко закреплённых упругих оболочек при $k = 1/2$, $\eta = 0,4$, $\omega = 89,6$ Гц: поперечное сечение при $x = L/2$ (a); внутренняя оболочка (б); внешняя оболочка (e)

поверхности оболочки, и тёмно-серым цветом (голубым) — в противоположном направлении. Из представленных изображений видно, что в меридиональном направлении оболочки могут колебаться в одной фазе или противофазе. На основании этой информации можно заключить, что в случае частичного заполнения коаксиальных оболочек классификация, предложенная в работе [25], не охватывает все возможные варианты и, следовательно, перестаёт быть полной. Далее будет показано, что для некоторых конфигураций смешанные окружные формы могут отвечать низшим частотам.

Таблицы 3–6 содержат значения низших частот и соответствующие им комбинации волновых чисел j и m (числа в скобках) для коаксиальных оболочек, взаимодействующих со слоем жидкости

Таблица 3. Влияние отношения $L/R^{(1)}$ на величину собственных частот ω (Гц) жёстко закреплённых коаксиальных оболочек

k	η	Упругая и жёсткая оболочки				Обе оболочки упругие			
		$L/R^{(1)}$				$L/R^{(1)}$			
		5	10	15	20	5	10	15	20
1/2	1	310,8 (4,1)	129,9 (3,1)	80,2 (2,1)	50,0 (2,1)	246,3 (5,1)	103,9 (3,1)	59,6 (3,1)	39,8 (2,1)
	0,5	340,4 (4,1)	150,0 (3,1)	91,1 (3,1)	61,5 (2,1)	257,1 (4,1)	109,9 (*,1)	65,1 (3,1)	43,9 (*,1)
1/10	1	121,3 (4,1)	45,2 (3,1)	27,2 (2,1)	16,4 (2,1)	87,8 (4,1)	32,3 (3,1)	19,6 (3,1)	11,8 (2,1)
	0,5	130,7 (4,1)	51,6 (3,1)	29,5 (3,1)	19,9 (2,1)	94,0 (4,1)	36,7 (3,1)	20,7 (3,1)	14,0 (2,1)
	0,25	137,2 (4,1)	55,2 (3,1)	31,7 (3,1)	21,5 (2,1)	98,3 (4,1)	39,2 (3,1)	22,3 (3,1)	15,1 (2,1)
1/100	1	35,7 (4,1)	13,0 (3,1)	7,8 (2,1)	4,7 (2,1)	25,3 (4,1)	9,2 (3,1)	5,5 (2,1)	3,3 (2,1)
	0,5	38,4 (4,1)	14,8 (3,1)	8,4 (3,1)	5,6 (2,1)	27,1 (4,1)	10,5 (3,1)	5,9 (3,1)	4,0 (2,1)
	0,25	40,1 (4,1)	15,8 (3,1)	8,9 (3,1)	6,0 (2,1)	28,5 (4,1)	11,2 (3,1)	6,3 (3,1)	4,3 (2,1)

между ними, при различных линейных размерах. При этом наружная оболочка может быть и жёсткой, и упругой. Символом «*» обозначено смешанное число окружных полуволн. Полученные данные демонстрируют, что увеличение длины конструкции L (Табл. 3 и 4) и уменьшение толщин оболочек h (Табл. 5 и 6) влечёт за собой снижение низших частот, как при полном, так и частичном заполнении. Результаты также свидетельствуют, что форма низшей частоты колебаний в большей степени определяется линейными размерами оболочек, чем уровнем заполнения жидкостью.

Таблица 4. Влияние отношения $L/R^{(1)}$ на величину собственных частот ω (Гц) консольно закреплённых коаксиальных оболочек

k	η	Упругая и жёсткая оболочки				Обе оболочки упругие			
		$L/R^{(1)}$				$L/R^{(1)}$			
		5	10	15	20	5	10	15	20
1/2	1	103,7 (3,1)	36,1 (2,1)	25,6 (2,1)	15,6 (1,1)	76,4 (3,1)	27,6 (2,1)	15,6 (2,1)	11,3 (2,1)
	0,5	115,0 (3,1)	44,8 (2,1)	27,9 (2,1)	19,1 (1,1)	84,1 (*,1)	32,6 (*,1)	18,4 (2,1)	12,4 (*,1)
1/10	1	33,9 (3,1)	11,3 (2,1)	7,1 (2,1)	4,9 (1,1)	23,7 (3,1)	8,0 (2,1)	4,8 (2,1)	3,6 (1,1)
	0,5	37,9 (3,1)	14,0 (2,1)	8,1 (2,1)	5,7 (2,1)	26,8 (3,1)	9,9 (2,1)	5,6 (2,1)	3,9 (2,1)
	0,25	41,1 (3,1)	15,7 (2,1)	9,8 (2,1)	7,4 (2,1)	29,0 (3,1)	11,0 (2,1)	6,7 (2,1)	5,0 (2,1)
1/100	1	9,6 (3,1)	3,2 (2,1)	2,0 (2,1)	1,4 (1,1)	6,8 (3,1)	2,3 (2,1)	1,4 (2,1)	1,0 (1,1)
	0,5	10,8 (3,1)	4,0 (2,1)	2,3 (2,1)	1,6 (2,1)	7,6 (3,1)	2,8 (2,1)	1,6 (2,1)	1,1 (2,1)
	0,25	11,7 (3,1)	4,4 (2,1)	2,6 (2,1)	2,0 (2,1)	8,2 (3,1)	3,1 (2,1)	1,9 (2,1)	1,4 (2,1)

Таблица 5. Влияние отношения $h/R^{(1)}$ на величину собственных частот ω (Гц) жёстко закреплённых коаксиальных оболочек

k	η	Упругая и жёсткая оболочки				Обе оболочки упругие			
		$h/R^{(1)} \times 10^3$				$h/R^{(1)} \times 10^3$			
		5	10	15	20	5	10	15	20
1/2	1	59,4 (3,1)	94,0 (2,1)	120,8 (2,1)	148,5 (2,1)	44,0 (3,1)	75,0 (3,1)	95,7 (2,1)	114,6 (2,1)
	0,5	66,3 (3,1)	112,3 (2,1)	146,5 (2,1)	177,6 (2,1)	48,3 (3,1)	80,0 (*,1)	107,5 (*,1)	133,1 (2,1)
1/10	1	36,9 (3,1)	64,5 (2,1)	80,5 (2,1)	95,8 (2,1)	26,2 (3,1)	46,6 (2,1)	58,2 (2,1)	69,0 (2,1)
	0,5	42,1 (3,1)	70,2 (3,1)	95,1 (2,1)	114,1 (2,1)	29,9 (3,1)	49,5 (3,1)	67,3 (2,1)	81,8 (2,1)
	0,25	45,1 (3,1)	75,3 (3,1)	102,0 (2,1)	125,6 (2,1)	32,0 (3,1)	53,1 (3,1)	72,2 (2,1)	89,5 (2,1)
1/100	1	12,7 (3,1)	22,6 (2,1)	28,3 (2,1)	33,6 (2,1)	9,0 (3,1)	16,0 (2,1)	20,1 (2,1)	23,8 (2,1)
	0,5	14,5 (3,1)	24,1 (3,1)	32,8 (2,1)	39,9 (2,1)	10,3 (3,1)	17,0 (3,1)	23,2 (2,1)	28,3 (2,1)
	0,25	15,5 (3,1)	25,7 (3,1)	34,8 (2,1)	43,2 (2,1)	11,0 (3,1)	18,1 (3,1)	24,6 (2,1)	30,6 (2,1)

Таблица 6. Влияние отношения $h/R^{(1)}$ на величину собственных частот ω (Гц) консольно закреплённых коаксиальных оболочек

k	η	Упругая и жёсткая оболочки				Обе оболочки упругие			
		$h/R^{(1)} \times 10^3$				$h/R^{(1)} \times 10^3$			
		5	10	15	20	5	10	15	20
1/2	1	16,2 (2,1)	31,4 (1,1)	38,0 (1,1)	43,2 (1,1)	11,3 (2,1)	20,0 (2,1)	29,4 (2,1)	34,7 (1,1)
	0,5	19,4 (2,1)	35,6 (2,1)	47,3 (1,1)	55,5 (1,1)	13,6 (2,1)	22,9 (2,1)	31,4 (*,1)	39,1 (1,1)
1/10	1	9,2 (2,1)	17,5 (2,1)	26,1 (1,1)	30,0 (1,1)	6,5 (2,1)	11,8 (2,1)	18,6 (2,1)	21,8 (1,1)
	0,5	11,3 (2,1)	19,9 (2,1)	28,2 (2,1)	35,5 (1,1)	8,0 (2,1)	13,8 (2,1)	19,6 (2,1)	24,8 (2,1)
	0,25	12,8 (2,1)	23,8 (2,1)	35,6 (2,1)	47,1 (2,1)	9,0 (2,1)	16,4 (2,1)	24,3 (2,1)	32,4 (2,1)
1/100	1	3,1 (2,1)	5,7 (2,1)	9,0 (2,1)	10,6 (1,1)	2,2 (2,1)	4,0 (2,1)	6,3 (2,1)	7,5 (1,1)
	0,5	3,9 (2,1)	6,7 (2,1)	9,5 (2,1)	12,1 (2,1)	2,7 (2,1)	4,7 (2,1)	6,7 (2,1)	8,5 (2,1)
	0,25	4,3 (2,1)	7,8 (2,1)	11,6 (2,1)	15,4 (2,1)	3,0 (2,1)	5,5 (2,1)	8,2 (2,1)	10,9 (2,1)

5. Заключение

Динамическое поведение коаксиальных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с неподвижной вязкой жидкостью, исследовано в трёхмерной постановке на основе предложенной математической модели и её численной реализации с помощью метода конечных элементов. В качестве примера рассмотрен случай, когда жидкость содержится только в кольцевом канале между внутренней и наружной оболочками. С использованием разработанного численного алгоритма проанализировано влияние уровня заполнения на собственные частоты и формы колебаний системы. Дополнительно изучен случай, когда наружная оболочка является абсолютно жёсткой. Соответствующие зависимости и новые качественные закономерности получены при различных значениях размеров кольцевых зазоров и геометрических параметров. Установлено, что для узких кольцевых зазоров характер снижения минимальной частоты колебаний при увеличении уровня заполнения качественно похож на тот, который ранее был выявлен для одиночных оболочек, заполненных идеальной жидкостью. Показано, что введённая при осесимметричном анализе коаксиальных оболочек классификация форм колебаний должна быть дополнена, поскольку при определённой величине кольцевого зазора и его частичном заполнении жидкостью появляется различное число полуволн в окружном направлении как у внутренней, так и у наружной оболочек. Выявлено, что учёт вязкости жидкости в рамках акустического приближения в терминах потенциала скоростей не оказывает существенного влияния на колебательные характеристики анализируемой системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-41-590646-р_а).

Литература

1. Мнёв Е.Н. Колебания круговой цилиндрической оболочки погруженной в замкнутую полость, заполненную сжимаемой жидкостью // Теория пластин и оболочек: труды II Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Киев, АН УССР, 1962. С. 284-288.
2. Мнёв Е.Н., Перцев А.К. Гидроупругость оболочек. Ленинград: Судостроение, 1970. 365 с.
3. Буйвол В.М., Гузь О.М. О колебаниях двух цилиндрических эксцентрично расположенных оболочек в потоке невязкой жидкости // Докл. АН УССР. 1966. № 11. С. 1412-1415.
4. Балакирев Ю.Г. К исследованию осесимметричных колебаний соосных цилиндрических систем оболочек с жидким наполнителем // Инженерный журнал. МТТ. 1968. № 3. С. 133-140.
5. Пиеничнов Г.И. Собственные колебания коаксиальных ортотропных цилиндрических оболочек заполненных жидкостью // Теория оболочек и пластин: труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1973. 798 с. С. 546-549.
6. Багдасарян Г.Е. Колебания коаксиальных цилиндрических оболочек с зазором, частично заполненных жидкостью // Изв. АН АрмССР. Механика. 1968. Т. 21, № 4. С. 40-47.
7. Багдасарян Г.Е., Марухян С.А. Динамическое поведение коаксиальных цилиндрических оболочек с зазором, частично заполненным жидкостью // Изв. НАН РА. Механика. 2011. Т. 64, № 3. С. 10-21.
8. Швец Р.Н., Марчук Р.А. Собственные колебания ортотропной цилиндрической оболочки, соприкасающейся с жидкостью // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1975. Вып. 2. С. 63-67.
9. Швец Р.Н., Марчук Р.А. Осесимметричные колебания заполненных жидкостью соосных ортотропных цилиндрических оболочек // Прикладная механика. 1985. Т. 21, № 8. С. 46-51. (English version [DOI](#))
10. Марчук Р.А. Колебания ортотропной цилиндрической оболочки, соприкасающейся с жидкостью // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1979. Вып. 9. С. 99-103.
11. Юдин А.С., Амбалова Н.М. Вынужденные колебания коаксиальных подкрепленных цилиндрических оболочек при взаимодействии с жидкостью // Прикладная механика. 1989. Т. 25, № 12. С. 63-68. (English version [DOI](#))
12. Brown S.J. A survey of studies into the hydrodynamic response of fluid-coupled circular cylinders // J. Pressure Vessel Technol. 1982. Vol. 104, no. 1. P. 2-19. [DOI](#)
13. Paidoussis M.P. Fluid-Structure interactions: Slender structures and axial flow. London: Academic Press, 2003. Vol. 2. 1040 p.
14. Krajcinovic D. Vibrations of two coaxial cylindrical shells containing fluid // Nucl. Eng. Des. 1974. Vol. 30, no. 2. P. 242-248. [DOI](#)
15. Chen S.S., Rosenberg G.S. Dynamics of a coupled shell-fluid system // Nucl. Eng. Des. 1975. Vol. 32, no. 3. P. 302-310. [DOI](#)
16. Au-Yang M.K. Free vibration of fluid-coupled coaxial cylindrical shells of different lengths // J. Appl. Mech. 1976. Vol. 43, no. 3. P. 480-484. [DOI](#)
17. Chung H., Turula P., Mulcahy T.M., Jendrzejczyk J.A. Analysis of a cylindrical shell vibrating in a cylindrical fluid region // Nucl. Eng. Des. 1981. Vol. 63, no. 1. P. 109-120. [DOI](#)
18. Абрамов В.В., Вальшинок Л.С., Додонов В.А., Дранченко Б.Н., Сидоркин А.С., Шарый Н.В. Динамические напряжения в элементах конструкций, работающих в потоках жидкости // Экспериментальные исследования и расчёт напряжений в конструкциях / Под ред. Н.И. Пригоровского. М.: Наука, 1975. С. 149-160.
19. Tani J., Nozaki Y., Ohtomo K., Sugiyama H. Experiments on the vibration of fluid-coupled coaxial cylindrical shells // Proc. of the Ninth World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo-Kyoto, Japan, August 2-9, 1988. Vol. VI. P. 619-624.
20. Guiggiani M. Dynamic instability in fluid-coupled coaxial cylindrical shells under harmonic excitation // J. Fluids Struct. 1989. Vol. 3, no. 3. P. 211-228. [DOI](#)
21. Chu M.L., Brown S. Experiments on the dynamic behavior of fluid-coupled concentric cylinders // Exp. Mech. 1981. Vol. 21, no. 4. P. 129-137. [DOI](#)

22. Yoshikawa S., Williams E.G., Washburn K.B. Vibration of two concentric submerged cylindrical shells coupled by the entrained fluid // J. Acoust. Soc. Am. 1994. Vol. 95, no. 6. P. 3273-3286. [DOI](#)
23. Chung H., Chen S.-S. Vibration of a group of circular cylinders in a confined fluid // J. Appl. Mech. 1977. Vol. 44, no. 2. P. 213-217. [DOI](#)
24. Wauer J. Finite oscillations of a cylinder in a coaxial duct subjected to annular compressible flow // Flow, Turbulence and Combustion. 1998. Vol. 61, no. 1-4. P. 161-177. [DOI](#)
25. Jeong K.-H. Natural frequencies and mode shapes of two coaxial cylindrical shells coupled with bounded fluid // J. Sound Vib. 1998. Vol. 215, no. 1. P. 105-124. [DOI](#)
26. Yeh T.T., Chen S.S. Dynamics of a cylindrical shell system coupled by viscous fluid // J. Acoust. Soc. Am. 1977. Vol. 62, no. 2. P. 262-270. [DOI](#)
27. Yeh T.T., Chen S.S. The effect of fluid viscosity on coupled tube/fluid vibrations // J. Sound Vib. 1978. Vol. 59, no. 3. P. 453-467. [DOI](#)
28. Васин С.В., Миколюк В.В. Свободные колебания соосных цилиндрических оболочек, разделенных вязкой жидкостью // Гидроаэромех. и теория упругости. 1983. № 31. С. 108-116.
29. Horáček J., Trnka J., Veselý J., Gorman D.G. Vibration analysis of cylindrical shells in contact with an annular fluid region // Eng. Struct. 1995. Vol. 17, no. 10. P. 714-724. [DOI](#)
30. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при отсутствии торцевого истечения в условия вибрации // Вестник СГТУ. 2007. Т. 3, № 2. С. 15-23.
31. Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Матвеев В.П. Численное моделирование пространственных колебаний цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // ЖВТ. 2013. Т. 18, № 2. С. 12-24.
32. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Natural vibrations and stability of elliptical cylindrical shells containing fluid // Int. J. Struct. Stabil. Dynam. 2016. Vol. 16, no. 10. 1550076. [DOI](#)
33. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid // Thin Wall. Struct. 2015. Vol. 90. P. 12-22. [DOI](#)
34. Joseph D.D. Viscous potential flow // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 479. P. 191-197. [DOI](#)
35. Amabili M. Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells // J. Sound Vib. 1996. Vol. 191, no. 5. P. 757-780. [DOI](#)
36. Гузь А.Н. Проблемы гидроупругости для сжимаемой вязкой жидкости // Прикладная механика. 1991. Т. 27, № 1. С. 3-15. (English version [DOI](#))
37. Бочкарёв С.А., Матвеев В.П. Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 189-199. (English version [DOI](#))
38. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 544 с.
39. Reddy J.N. An introduction to nonlinear finite element analysis, 2nd edn. Oxford: Oxford University Press, 2015. 687 p. [DOI](#)
40. Lehoucq R.B., Sorensen D.C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1996. Vol. 17, no. 4. P. 789-821. [DOI](#)

References

1. Mnev E.N. Kolebaniya krugovoj cilindricheskoj obolochki pogruzhennoj v zamknutuyu polost', zapolnennuyu szhimaemoj zhidkost'yu [Vibrations of a circular cylindrical shell submerged in a closed cavity filled with an ideal compressible liquid]. *Teoriya plastin i obolochek: trudy VIII Vsesoyuznoy konferentsii po teorii obolochek i plastin – Theory of shells and plates: Proceedings of the II All-Union conference on the theory of shells and plates. Kiev, AN USSR, 1962, pp. 284-288.*
2. Mnev E.N., Pertsev A.K. *Gidrouprugost' obolochek* [Hydroelasticity of Shells]. Leningrad: Sudostroenie, 1970. 365 p.
3. Buyvol B.N., Guz' A.N. O kolebaniyakh dvukh tsilindricheskikh ekstsentrichno raspolozhennykh obolochek v potoke nevyazkoy zhidkosti [Oscillations of two cylindrical eccentrically arranged shells in a stream of inviscid liquid]. *Doklady AN USSR – Reports of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*, 1966, no. 11, pp. 1412-1415.
4. Balakirev Yu.G. K issledovaniyu osesimmetrichnykh kolebaniy soosnykh tsilindricheskikh sistem obolochek s zhidkim zapolnitelem [Axisymmetric vibrations of coaxial cylindrical shells filled with fluid]. *Inzhenernyy zhurnal. Mekhanika tverdogo tela – Soviet Engineering Journal*, 1968, no. 3, pp. 133-140.
5. Pshenichnov G.I. Sobstvennyye kolebaniya koaksial'nykh ortotropnykh tsilindricheskikh obolochek zapolnennykh zhidkost'yu [Free vibrations of coaxial orthotropic cylindrical shells filled with fluid]. *Teoriya obolochek i plastin: trudy VIII Vsesoyuznoy konferentsii po teorii obolochek i plastin – Theory of shells and plates: Proceedings of the VIII All-Union conference on the theory of shells and plates. M.: Nauka, 1973. 798 p. Pp. 546-549.*
6. Baghdasaryan G.Ye. Kolebaniya koaksial'nykh tsilindricheskikh obolochek s zazorom, chastichno zapolnennykh zhidkost'yu [The vibrations of coaxial cylindrical shells with a clearance partially filled with fluid]. *Izvestiya Akademii nauk Armyanskoy SSR. Mekhanika – Proc. NAS RA. Mechanics*, 1968, vol. 21, no. 4, pp. 40-47.
7. Baghdasaryan G.Ye., Marukhyan S.A. Dynamic behavior of a coaxial cylindrical shells, with a gap partially filled with fluid. *Izvestiya Natsional'noy Akademii Nauk Armenii. Mekhanika – Proc. NAS RA. Mechanics*, 2011, vol. 64, no. 3, pp. 10-21.
8. Shvets R.N., Marchuk R.A. Sobstvennyye kolebaniya ortotropnoy tsilindricheskoy obolochki, soprikasayushcheysya s zhidkost'yu [Natural vibrations of an orthotropic cylindrical shell in contact with a fluid]. *Matematicheskiye metody i fiziko-mekhanicheskiye polya – Mathematical Methods and Physicomechanical Fields*, 1975, no. 2, pp. 63-67.
9. Shvets R.N., Marchuk R.A. Axisymmetric vibrations of coaxial orthotropic cylindrical shells filled with fluid. *Soviet Appl. Mech.*, 1985, vol. 21, no. 8, pp. 763-767. [DOI](#)
10. Marchuk R.A. Kolebaniya ortotropnoy tsilindricheskoy obolochki, soprikasayushcheysya s zhidkost'yu [Oscillations of an orthotropic cylindrical shell in contact with a fluid]. *Matematicheskiye metody i fiziko-mekhanicheskiye polya – Mathematical Methods and Physicomechanical Fields*, 1979, no. 9, pp. 99-103.

11. Yudin A.S., Ambalova N.M. Forced vibrations of coaxial reinforced cylindrical shells during interaction with a fluid. *Soviet Appl. Mech.*, 1989, vol. 25, no. 12, pp. 1222-1227. [DOI](#)
12. Brown S.J. A survey of studies into the hydrodynamic response of fluid-coupled circular cylinders. *J. Pressure Vessel Technol.*, 1982, vol. 104, no. 1, pp. 2-19. [DOI](#)
13. Païdoussis M.P. *Fluid-Structure interactions: Slender structures and axial flow*. London: Academic Press, 2003. Vol. 2. 1040 p.
14. Krajcinovic D. Vibrations of two coaxial cylindrical shells containing fluid. *Nucl. Eng. Des.*, 1974, vol. 30, no. 2, pp. 242-248. [DOI](#)
15. Chen S.S., Rosenberg G.S. Dynamics of a coupled shell-fluid system. *Nucl. Eng. Des.*, 1975, vol. 32, no. 3, pp. 302-310. [DOI](#)
16. Au-Yang M.K. Free vibration of fluid-coupled coaxial cylindrical shells of different lengths. *J. Appl. Mech.*, 1976, vol. 43, no. 3, pp. 480-484. [DOI](#)
17. Chung H., Turula P., Mulcahy T.M., Jendrzejczyk J.A. Analysis of a cylindrical shell vibrating in a cylindrical fluid region. *Nucl. Eng. Des.*, 1981, vol. 63, no. 1, pp. 109-120. [DOI](#)
18. Abramov V.V., Val'shonok L.S., Dodonov V.A., Dranchenko B.N., Sidorkin A.C., Sharyy N.B. Dinamicheskiye napryazheniya v elementakh konstruktivnykh, rabotayushchikh v potokakh zhidkosti [Dynamic stresses in structural elements operating in fluid flows]. *Ekspertimental'nyye issledovaniya i raschët napryazheniy v konstruktivnykh* [Experimental studies and calculation of stresses in structures], ed. by N.I. Prigorovskiy. M.: Nauka, 1975. Pp. 149-160.
19. Tani J., Nozaki Y., Ohtomo K., Sugiyama H. *Proc. of the Ninth World Conference on Earthquake Engineering. Tokyo-Kyoto, Japan, August 2-9, 1988. Vol. VI, pp. 619-624.*
20. Guiggiani M. Dynamic instability in fluid-coupled coaxial cylindrical shells under harmonic excitation. *J. Fluids Struct.*, 1989, vol. 3, no. 3, pp. 211-228. [DOI](#)
21. Chu M.L., Brown S. Experiments on the dynamic behavior of fluid-coupled concentric cylinders. *Exp. Mech.*, 1981, vol. 21, no. 4, pp. 129-137. [DOI](#)
22. Yoshikawa S., Williams E.G., Washburn K.B. Vibration of two concentric submerged cylindrical shells coupled by the entrained fluid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1994, vol. 95, no. 6, pp. 3273-3286. [DOI](#)
23. Chung H., Chen S.-S. Vibration of a group of circular cylinders in a confined fluid. *J. Appl. Mech.*, 1977, vol. 44, no. 2, pp. 213-217. [DOI](#)
24. Wauer J. Finite oscillations of a cylinder in a coaxial duct subjected to annular compressible flow. *Flow, Turbulence and Combustion*, 1998, vol. 61, no. 1-4, pp. 161-177. [DOI](#)
25. Jeong K.-H. Natural frequencies and mode shapes of two coaxial cylindrical shells coupled with bounded fluid. *J. Sound Vib.*, 1998, vol. 215, no. 1, pp. 105-124. [DOI](#)
26. Yeh T.T., Chen S.S. Dynamics of a cylindrical shell system coupled by viscous fluid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1977, vol. 62, no. 2, pp. 262-270. [DOI](#)
27. Yeh T.T., Chen S.S. The effect of fluid viscosity on coupled tube/fluid vibrations. *J. Sound Vib.*, 1978, vol. 59, no. 3, pp. 453-467. [DOI](#)
28. Vasin S.V., Mikolyuk V.V. Svobodnyye kolebaniya soosnykh tsilindricheskikh obolochek, razdelennykh vyazkoy zhidkost'yu [Free oscillations tolerable cylindrical shells separated by a viscous fluid]. *Gidroaeromekhanika i teoriya uprugosti – Hydro aeromechanics and the theory of elasticity*, 1983, no. 31, pp. 108-116.
29. Horáček J., Trnka J., Veselý J., Gorman D.G. Vibration analysis of cylindrical shells in contact with an annular fluid region. *Eng. Struct.*, 1995, vol. 17, no. 10, pp. 714-724. [DOI](#)
30. Kondratov D.V., Mogilevich L.I. Matematicheskoye modelirovaniye protsessov vzaimodeystviya dvukh tsilindricheskikh obolochek so sloym zhidkosti mezhdu nimi pri otsutstvii tortsevogo istecheniya v usloviya vibratsii [Mathematical modelling of processes of interaction of two cylindrical environments with the layer of the liquid between them under leakage absence in condition of vibration]. *Vestnik SGTU – Bulletin of Saratov State Technical University*, 2007, vol. 3, no. 2, pp. 15-23.
31. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Numerical modeling of spatial vibrations of cylindrical shells, partially filled with fluid. *Vychislitel'nyye tekhnologii – Computing technologies*, 2013, vol. 18, no. 2, pp. 12-24.
32. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Natural vibrations and stability of elliptical cylindrical shells containing fluid. *Int. J. Struct. Stabil. Dynam.*, 2016, vol. 16, no. 10, 1550076. [DOI](#)
33. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid. *Thin Wall. Struct.*, 2015, vol. 90, pp. 12-22. [DOI](#)
34. Joseph D.D. Viscous potential flow. *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 479, pp. 191-197. [DOI](#)
35. Amabili M. Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells. *J. Sound Vib.*, 1996, vol. 191, no. 5, pp. 757-780. [DOI](#)
36. Guz' A.N. Problems of hydroelasticity for compressible viscous fluids. *Soviet Appl. Mech.*, 1991, vol. 27, no. 1, pp. 1-12. [DOI](#)
37. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Numerical study of the influence of boundary conditions on the dynamic behavior of a cylindrical shell conveying a fluid. *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, pp. 477-486. [DOI](#)
38. Zienkiewicz O.C. *The finite element method in engineering science*. London: McGraw-Hill, 1971. 535 p.
39. Reddy J.N. *An introduction to nonlinear finite element analysis, 2nd edn*. Oxford, Oxford University Press, 2015. 687 p. [DOI](#)
40. Lehoucq R.B., Sorensen D.C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1996, vol. 17, no. 4, pp. 789-821. [DOI](#)

Поступила в редакцию 12.11.2018, после доработки 03.12.2018; принята к опубликованию 05.12.2018

Сведения об авторах

Бочкарёв Сергей Аркадьевич, снс, кфмн, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика. Королева, 1; e-mail: bochkarev@icmm.ru

Лекотцев Сергей Владимирович, нс, кфмн, ИМСС УрО РАН; e-mail: lekomtsev@icmm.ru

Сенин Александр Николаевич, асп., ИМСС УрО РАН; e-mail: senin.a@icmm.ru