

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.4.34](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.34)

УДК 532.546

ДВУМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ ОГРАНИЧЕННОЙ ШИРИНЫ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫХ ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ

К.Б. Циберкин

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация

Описана математическая модель и на её основе проведён анализ стационарных неплоскопараллельных течений в канале, частично заполненном однородной недеформируемой пористой средой. Рассмотрены два варианта условий на верхней границе однородной жидкости: она или твёрдая, или свободная недеформируемая. Модель основывается на преобразовании Бермана для задачи течения в канале с пористой границей. Из уравнений Навье–Стокса для свободной жидкости и уравнений Дарси–Бринкмана для фильтрационного течения получены безразмерные уравнения для компонент скорости и давления. На границе раздела жидкости и пористой среды поставлены условия непрерывности компонент скорости и баланса нормальных и касательных компонент тензора вязких напряжений. Численное решение задачи находится конечно-разностным методом установления. Продемонстрировано, что в широком диапазоне параметров реализуется переток жидкости внутрь пористой среды, однако поперечная скорость в большинстве случаев составляет 10^{-7} часть от максимальной скорости продольного течения. Исследована зависимость поперечной компоненты от основных управляющих параметров задачи: проницаемости пористой среды, соотношения между шириной свободного канала и шириной слоя пористой среды. Построены семейства профилей продольной и поперечной компонент скорости течения для различных наборов параметров. Подробно изучена связь значения максимума поперечной скорости и его положения с относительной толщиной пористого слоя. Обнаружено, что влияние поперечного течения может проявляться, если свободная часть канала занимает не более 10% от полной ширины системы. Несмотря на малость поперечной компоненты скорости, в канале, длина которого превосходит ширину в $10^5 \div 10^6$ раз, суммарный поток жидкости через границу раздела сред составляет около 0,1% от полного расхода через поперечное сечение системы.

Ключевые слова: взаимодействующие течения, пористая среда, двумерное течение

TWO-DIMENSIONAL FLOWS IN FINITE-WIDTH CHANNELS PARTIALLY FILLED WITH POROUS MEDIUM

K.B. Tsiberkin

Perm State University, Perm, Russian Federation

A stationary two-dimensional liquid flow in a channel partially filled with a porous non-deformable homogeneous medium is investigated numerically based on the proposed mathematical model. The homogeneous liquid is bounded by a solid or free rigid boundary, while the channel bottom is solid. The model is constructed based on the Berman transformation. The free flow is described by the Navier–Stokes equations and the filtration flow is described by the Darcy–Brinkman model. The interfacial boundary conditions include the velocity continuity and the balance of tangential and normal viscous stresses; the tangential stresses may have a discontinuity at the boundary. The numerical solution is found by the finite-difference relaxation method. It has been shown that the flow of the liquid into porous medium takes place for a wide parameter range. However in most cases, the transversal velocity is about 10^{-7} of the maximum longitudinal velocity. The dependence of the transversal velocity on the permeability of porous medium and its thickness is examined. The velocity profiles are plotted for different sets of parameters. The effect of the relative thickness of porous medium on the transversal velocity maximum and its position is also considered. It has been found that the effect of the transversal flow becomes significant if the width of the free portion of the channel is less than 10% of the width of the entire system. In spite of the smallness of the transversal velocity, the total flow rate through the interface is about 0.1% of the total flow rate through the channel provided that the channel length is $10^5 \div 10^6$ of the channel width.

Key words: interacting flows, porous medium, two-dimensional flow

1. Введение

Проблема переноса массы и импульса через границу раздела жидкости и пористой среды широко исследуется теоретически и экспериментально и имеет разнообразные приложения в области разработки перспективных накопителей энергии, таких как топливные ячейки, суперконденсаторы с пористыми диэлектриками и проточные аккумуляторы (*flow batteries*) [1–4]. Для описания взаимодействующих потоков разработаны различные модели граничных условий [1, 5, 6], а также подходы, исключающие границу раздела посредством представления системы как единого массива пористой среды с неоднородными параметрами [7]. Для двухслойных систем подробно изучена динамика конвективных явлений [8, 9] и устойчивость плоскопараллельного течения [2, 7, 10, 11].

В большинстве опубликованных работ, где обсуждается структура вынужденных течений в подобных системах, рассматривается плоскопараллельное течение в канале заданной ширины. В таком случае поперечная компонента скорости отсутствует. В отдельных новых публикациях демонстрируется, что в смежных потоках может реализоваться двумерное течение: наблюдается незначительный поперечный переток жидкости из свободной части канала в пористую среду [12]. Аналогичный эффект

обнаруживается в структуре течения вблизи границы раздела жидкости и пористой среды, если задача решается в приближении пограничного слоя, что применимо при большой ширине каналов [13].

В данной работе представлен численный анализ структуры двумерного течения в каналах ограниченной ширины, частично заполненных пористой средой. В отличие от работы [12], моделирование производится в безразмерных единицах и без использования приближённых методов аналитического решения уравнений гидродинамики. Это позволяет корректно описать поток в широком интервале значений управляющих параметров.

Получены профили продольной и поперечной компонент скорости. Показано, что учёт поперечной составляющей необходим при движении свободной жидкости либо в каналах малой ширины, ограниченных пористой средой, либо в протяжённых каналах.

2. Постановка и метод решения задачи

2.1. Геометрия. Гидродинамическая модель

На рисунке 1 приведена структура исследуемой системы. Канал шириной h находится в поле силы тяжести. Он частично заполнен однородной пористой средой, относительная ширина которой равна $d = h_p/h$, и наклонён под углом α к горизонту, что обуславливает возникновение течения. Рассматривается стационарный поток жидкости, который в свободной части канала моделируется уравнениями Навье–Стокса:

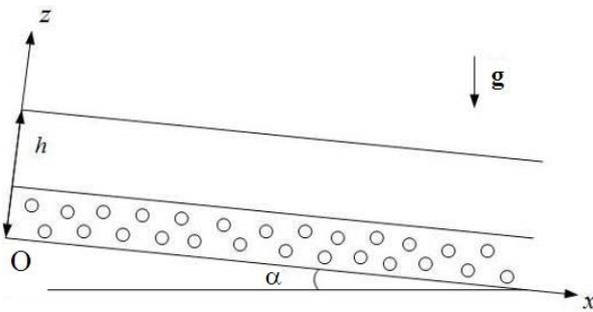


Рис. 1. Наклонный канал, частично заполненный пористой средой

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{v} = \{u, v\}$ — скорость течения, P — давление, ρ, ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости, \mathbf{g} — ускорение свободного падения. Для описания фильтрационного потока использованы уравнения Бринкмана с инерционными нелинейными слагаемыми [1]:

$$\frac{1}{\varphi^2} (\mathbf{v}_p \cdot \nabla) \mathbf{v}_p = -\frac{1}{\rho} \nabla P_p + \nu \Delta \mathbf{v}_p - \frac{\nu}{K} \mathbf{v}_p + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_p = 0, \quad (2)$$

где φ, K — пористость и проницаемость среды, соответственно; индекс p обозначает поля, относящиеся к пористой среде. Инерционные слагаемые в уравнении фильтрации сохранены, поскольку они дают корректную картину процесса переноса импульса у границы раздела потоков [10, 14].

Нижняя граница системы принята твёрдой, и на ней выполняется условие прилипания:

$$z = 0: \quad \mathbf{v}_p = 0. \quad (3)$$

На верхней границе рассмотрены два возможных варианта условий:

– твёрдая граница, скорость течения на которой удовлетворяет условию прилипания:

$$z = h: \quad \mathbf{v} = 0; \quad (4)$$

– свободная недеформируемая поверхность жидкости, на которой выполняются условия непротекания и равенства нулю касательных напряжений:

$$z = h: \quad v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

На границе раздела сред заданы условия непрерывности скорости течения и баланса касательных и нормальных компонент тензора напряжений [6]:

$$z = h_p: \quad \mathbf{v} = \varphi \mathbf{v}_p, \quad P - 2\nu \rho \frac{\partial v}{\partial z} = P_p - 2\nu \rho \frac{\partial v_p}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u_p}{\partial z} = -\frac{\beta \varphi}{K^{1/2}} u_p, \quad (6)$$

где β — эмпирический параметр, который определяет величину скачка касательных напряжений. В настоящей работе его значение принято равным нулю.

Введение следующих масштабов и управляющих параметров:

$$[\mathbf{r}] = h, \quad [t] = \frac{h^2}{\nu}, \quad [\mathbf{v}] = \frac{gh^2}{\nu} \sin \alpha, \quad [P] = \rho gh \sin \alpha, \quad \text{Re} = \frac{gh^3}{\nu^2} \sin \alpha, \quad \text{Da} = \frac{K}{h^2}, \quad d = \frac{h_p}{h},$$

где Re — число Рейнольдса, Da — число Дарси, даёт безразмерную форму уравнений (1), (2):

$$\begin{aligned} \text{Re}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla P + \Delta \mathbf{v} - \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\sin \alpha}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\text{Re}}{\varphi^2}(\mathbf{v}_p \cdot \nabla) \mathbf{v}_p &= -\nabla P_p + \Delta \mathbf{v}_p - \frac{1}{\text{Da}} \mathbf{v}_p - \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\sin \alpha}, \quad \text{div } \mathbf{v}_p = 0, \\ \boldsymbol{\gamma} &= \{\sin \alpha, \cos \alpha\}, \end{aligned} \quad (7)$$

($\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор, направленный вверх) и граничных условий (3)–(6):

$$\begin{aligned} z = 0: \quad & \mathbf{v}_p = 0, \\ z = 1: \quad & 1) \mathbf{v} = 0, \\ & 2) v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ z = d: \quad & \mathbf{v} = \varphi \mathbf{v}_p, \quad P - 2 \frac{\partial v}{\partial z} = P_p - 2 \frac{\partial v_p}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u_p}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Случай 1) при $z=1$ отвечает твёрдой верхней границе, случай 2) — свободной недеформируемой. Используемые безразмерные параметры позволяют исключить угол наклона слоёв жидкости и пористой среды из стационарного профиля течения, что упрощает последующий анализ устойчивости течения [7, 10, 11].

Квадратичная поправка Форхгеймера к силе сопротивления внутри пористой среды опускается, поскольку так называемые поровые числа Рейнольдса, определяемые по скорости фильтрации и характерному размеру пор, в принятом диапазоне параметров не превосходят критического значения порядка 1 [1]. Размер пор d_p может быть оценён по значению проницаемости среды как \sqrt{K} . Характерная скорость фильтрации имеет величину $U_p = \text{Da} U_f$, где U_f — скорость течения однородной жидкости. Таким образом, для порового числа Рейнольдса получается следующее выражение:

$$\text{Re}_p \sim \frac{U_p d_p}{\nu} \sim \frac{U_p \sqrt{K}}{\nu}.$$

Подстановка U_p в определение Re_p устанавливает его связь с введённым выше числом Re :

$$\text{Re}_p \sim \text{Da}^{3/2} \text{Re},$$

что при всех рассмотренных в работе числах Дарси и Рейнольдса даёт значения $10^{-4} \div 1$ и позволяет пренебречь поправкой Форхгеймера.

2.2. Уравнения для двумерного течения

Двумерное решение задачи строится в виде течения Бермана [12, 15], компоненты скорости которого имеют вид, предложенный в работе [16]:

$$u = U(z) - xV'(z), \quad v = V(z), \quad (9)$$

где штрихом обозначена производная по координате z . Это представление поля скорости течения основано на функции тока, впервые введённой в [16], и автоматически удовлетворяет уравнению неразрывности.

Подстановка (9) в уравнения (7) даёт следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(V(U' - xV'') - (U - xV')V') &= -\frac{\partial P}{\partial x} + 1 + U'' - xV''', & 1 \\
 \operatorname{Re}VV' &= -\frac{\partial P}{\partial z} - \operatorname{ctg} \alpha + V'', & 2 \\
 \frac{\operatorname{Re}}{\varphi^2}(V_p(U'_p - xV''_p) - (U_p - xV'_p)V'_p) &= -\frac{\partial P_p}{\partial x} + 1 + U''_p - xV'''_p - \frac{1}{\operatorname{Da}}(U_p - xV'_p), & 3 \\
 \frac{\operatorname{Re}}{\varphi^2}V_pV'_p &= -\frac{\partial P_p}{\partial z} - \operatorname{ctg} \alpha + V''_p - \frac{1}{\operatorname{Da}}V_p, & 4
 \end{aligned} \tag{10}$$

и граничные условия:

$$\begin{aligned}
 z=0: \quad & V=0, \quad U' - xV''=0, \\
 z=1: \quad & 1) V_p=0, \quad U_p - xV'_p=0, \\
 & 2) V_p=0, \quad U'_p - xV''_p=0, \\
 z=d: \quad & U - xV' = \varphi(U_p - xV'_p), \quad V = \varphi V_p, \quad P - 2V' = P_p - 2V'_p, \quad U' - U'_p - x(V'' - V''_p) = 0.
 \end{aligned}$$

Уравнения (10₂) и (10₄) могут быть однократно проинтегрированы по координате z , вследствие этого величина dP/dx становится зависимой только от продольной координаты x как в однородной жидкости, так и в пористой среде:

$$P = V' - \frac{\operatorname{Re}}{2}V^2 - z \operatorname{ctg} \alpha + f(x), \quad P_p = V'_p - \frac{\operatorname{Re}}{2}V_p^2 - z \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{Da}} \int_0^d V_p dz + f_p(x), \tag{11}$$

где $f(x)$, $f_p(x)$ — неизвестные функции, которые в общем случае определяются из граничных условий на входе в канал и выходе из него. С учётом этого в уравнениях (10₁) и (10₃) можно выделить слагаемые, содержащие и не содержащие явно координату x . Например, для однородной жидкости получается уравнение:

$$\operatorname{Re}(UV - UV') - U'' - 1 = -\frac{\partial P}{\partial x} + x \left[\operatorname{Re}(VV'' - (V')^2) - V''' \right].$$

Производная dP/dx зависит только от x , а левая часть уравнения и выражение в квадратных скобках — только от z , поэтому левая часть уравнения будет равна нулю. Однократным дифференцированием правой части по вертикальной координате z получается дифференциальное уравнение для V . Аналогичная процедура применима и к уравнению для пористой среды.

В совокупности проделанные преобразования дают уравнения второй степени для компонент скорости U и четвертой степени для компонент V :

$$\begin{aligned}
 V^{IV} - \operatorname{Re}(VV''' - V'V'') &= 0, \\
 U - \operatorname{Re}(UV - UV') &= -1, \\
 V_p^{IV} - \frac{V_p''}{\operatorname{Da}} - \frac{\operatorname{Re}}{\varphi^2}(V_pV_p''' - V'_pV_p'') &= 0, \\
 U_p'' - \frac{U_p}{\operatorname{Da}} - \frac{\operatorname{Re}}{\varphi^2}(U'_pV_p - U_pV'_p) &= -1,
 \end{aligned} \tag{12}$$

и граничные условия:

$$\begin{aligned}
 z=0: \quad & V_p=0, \quad U_p=0, \quad V'_p=0, \\
 z=1: \quad & 1) V=0, \quad U=0, \quad V'=0, \\
 & 2) V=0, \quad U'=0, \quad V''=0, \\
 z=d: \quad & V = \varphi V_p, \quad V' = \varphi V'_p, \quad U = \varphi U_p, \quad P - 2V' = P_p - 2V'_p, \quad U' = U'_p, \quad V'' = V''_p.
 \end{aligned} \tag{13}$$

При $V = 0$ и $V_p = 0$ уравнения (12), (13) сводятся к описанию задачи стационарного плоскопараллельного течения. Таким образом, представляемое далее двумерное решение существует одновременно с плоскопараллельным, и в перспективе требуется дополнительный анализ устойчивости двумерного течения в сравнении с плоскопараллельным течением.

2.3. Численный метод

Полученная задача (12), (13) решается численно. В уравнения (12) вводится дополнительная переменная $W = V''$, что позволяет как для однородной жидкости, так и для пористой среды преобразовать систему из пар уравнений четвёртого и второго порядка в систему трёх уравнений второго порядка, для разрешения которой существуют эффективные сеточные методы [17]. Решение модифицированной задачи находится методом установления [18]. Уравнения (10) в этом подходе рассматриваются как предельные для системы параболических уравнений на больших временах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} &= V'' - W, & \frac{\partial W}{\partial \tau} &= W'' - \text{Re}(VW' - V'W), \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} &= U'' - \text{Re}(U'V - UV') + 1, \\ \frac{\partial V_p}{\partial \tau} &= V_p'' - W_p, & \frac{\partial W_p}{\partial \tau} &= W_p'' - \frac{W_p}{\text{Da}} - \frac{\text{Re}}{\varphi^2}(V_p W_p' - V_p' W_p), \\ \frac{\partial U_p}{\partial \tau} &= U_p'' - \frac{U_p}{\text{Da}} - \frac{\text{Re}}{\varphi^2}(U_p' V_p - U_p V_p') + 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Для их решения применяется неявная конечно-разностная схема и стандартный метод трёхдиагональной прогонки. В рамках численной процедуры производится интегрирование данных уравнений при заданном начальном условии. В качестве начального состояния для U , U_p используется плоскопараллельное течение с линейным распределением давления по вертикали [11]. Начальное приближение для V и V_p задаётся в виде постоянного вдоль координаты z значения 10^{-8} для W и 10^{-8} для W_p .

Численный метод реализуется в виде программы на языке FORTRAN-90. Для выполнения расчётов применяется однородная сетка, которая содержит 1000 шагов по полной толщине двухслойной системы. Интегрирование ведётся с постоянным шагом 10^{-8} по фиктивному времени. Шаг по времени подбирается экспериментально из условия обеспечения устойчивости разностной схемы. Существенный вклад в образование схемной неустойчивости вносят нелинейные слагаемые, а также слагаемое с множителем $1/\text{Da}$ в уравнениях для пористой среды.

При варьировании толщины пористой среды в канале соотношение числа узлов, отведённых на свободное и фильтрационное течение, меняется пропорционально параметру d . Относительная погрешность на каждом шаге времени определяется по максимальному различию значений скорости, полученных на текущей и предыдущей итерации:

$$\varepsilon_V = \frac{\max |V_j^{n+1} - V_j^n|}{\max |V_j^n|}, \quad \varepsilon_U = \frac{\max |U_j^{n+1} - U_j^n|}{\max |U_j^n|}.$$

Расчёт производится до достижения погрешностью поперечной компоненты скорости V значения 10^{-6} , при этом для компоненты скорости U погрешность составляет не более 10^{-11} .

Графики, иллюстрирующие сходимость итерационного процесса во времени, показаны на рисунке 2а. О сходимости результатов расчёта по мере увеличения числа ячеек сетки от 100 до 1000 можно судить по рисунку 2б. На нём хорошо видны различия в значениях и положениях глобальных максимумов модуля поперечной скорости, полученных для сеток с числом ячеек N и $N-100$. Метод демонстрирует устойчивость и надёжную сходимость итерационного процесса. Размер расчётной сетки выбран из соображений компромисса между длительностью расчётов, устойчивостью разностной схемы и возможностью эффективно разрешить переходную область между пористой средой и однородной жидкостью.

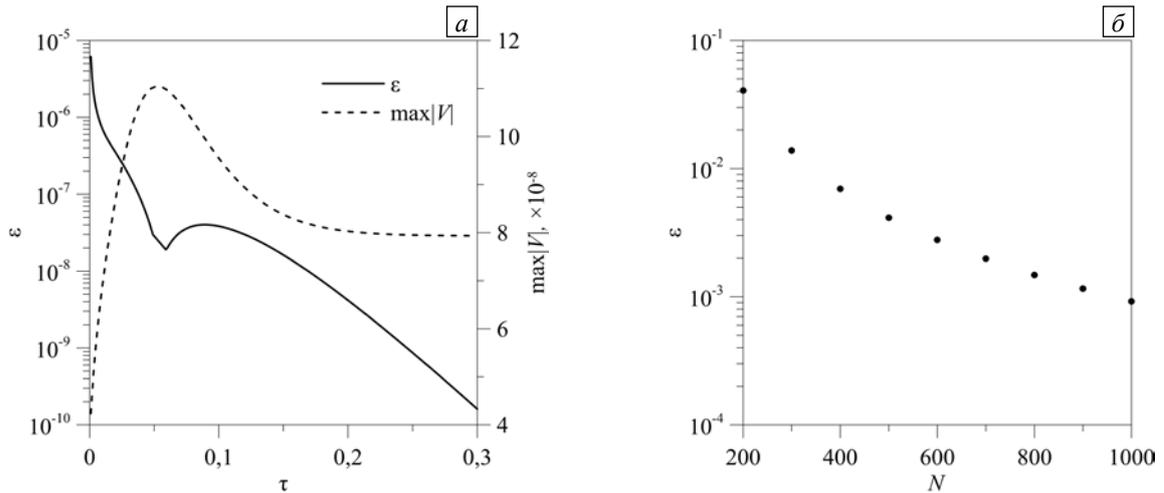


Рис. 2. Сходимость численного метода: зависимость относительной погрешности и максимума модуля скорости поперечной компоненты скорости от фиктивного времени (а) и относительное изменение максимума модуля поперечной компоненты скорости при изменении числа шагов сетки N (б); толщина пористого слоя $d=0,5$, $Re=100$, $Da=10^{-3}$, пористость $\phi=0,5$

3. Структура двумерных течений в жидкости и пористой среде

3.1. Канал с твёрдой верхней границей

На рисунках 3а, б показаны графики продольной и поперечной компонент скорости, рассчитанные при различных значениях числа Дарси. Горизонтальная компонента незначительно возрастает по мере увеличения проницаемости пористого слоя, но в наибольшей степени структура профиля и величина скорости определяются шириной свободной части канала, в которой устанавливается параболическое распределение скорости. По мере уменьшения проницаемости внутри пористого слоя формируется плоский профиль с тонкими пограничными слоями вблизи $z=0$ и $z=d$. При $Da < 10^{-3}$ величина скорости фильтрации в средней части пористого слоя определяется законом Дарси. Зависимость вертикальной компоненты скорости от числа Дарси выражена слабо.

На рисунке 4 изображены профили скорости, соответствующие различной толщине пористого слоя. Видно, что по мере уменьшения свободной части канала средняя скорость движения в системе сильно уменьшается. При $d < 0,9$ ширина пограничного слоя у верхней границы становится соизмеримой с полной шириной канала, и максимальное значение профиля скорости перемещается из свободной части в пористый слой. Величина поперечной скорости убывает по мере уменьшения ширины свободного канала (Рис. 5а). Максимум поперечной скорости (Рис. 5б) располагается вблизи границы раздела свободной жидкости и пористого слоя. При малой толщине пористого слоя максимум поперечной скорости стремится к середине слоя. При толщине пористого слоя $d > 0,9$ положение максимума скорости вновь начинает удаляться от границы.

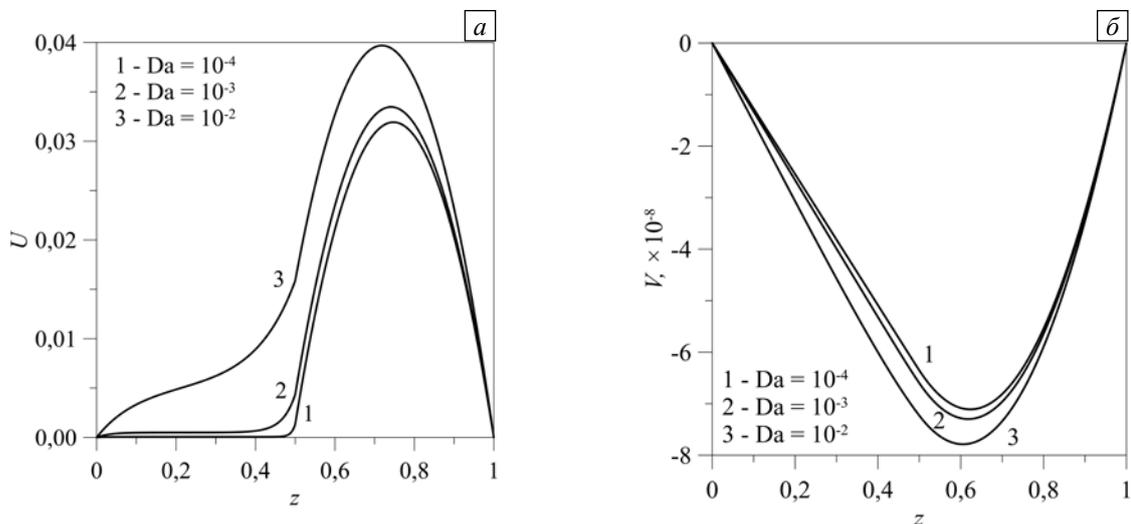


Рис. 3. Продольная (а) и поперечная (б) компоненты скорости течения при различных значениях числа Дарси при толщине пористого слоя $d=0,5$, $Re=100$ и пористости $\phi=0,5$

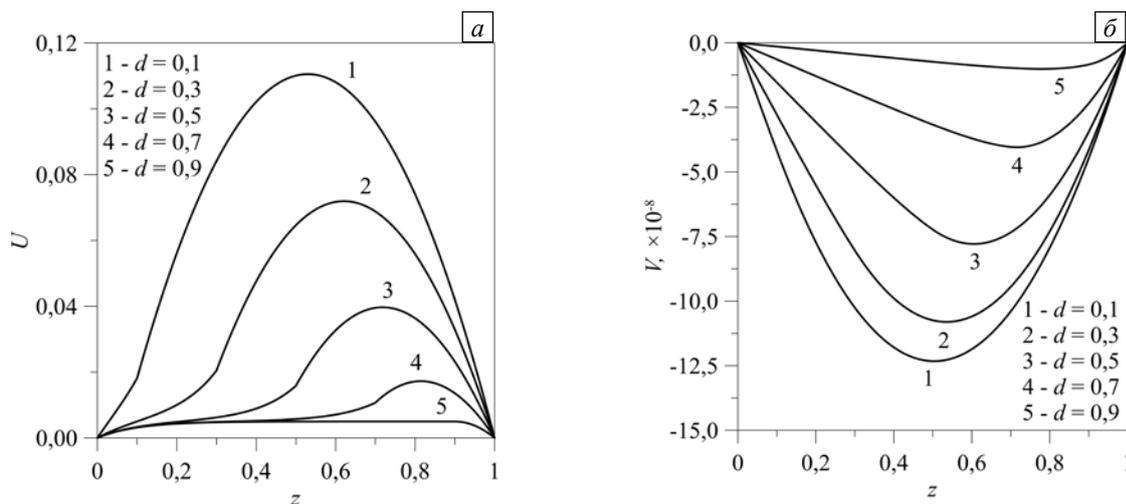


Рис. 4. Продольная (а) и поперечная (б) компоненты скорости течения при различных значениях толщины пористого слоя d , $Re=100$, $Da=10^{-2}$ и пористости $\phi=0,5$

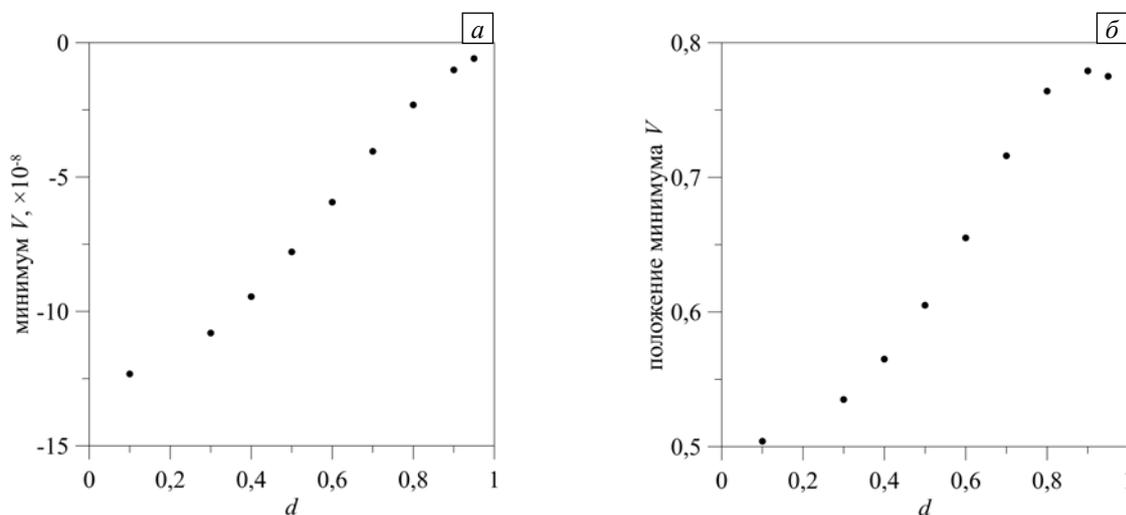


Рис. 5. Минимальное значение поперечной компоненты скорости (а) и его положение (б) при различных значениях толщины пористого слоя d , $Re=100$, $Da=10^{-2}$ и пористости $\phi=0,5$

Зависимость структуры профиля скорости от числа Рейнольдса подробно не исследовалась, поскольку в рассмотренном интервале $Re = 10^2 \div 10^5$ рассчитанные скорости продольного и поперечного течения в масштабах графиков неотличимы.

3.2. Канал со свободной недеформируемой верхней границей

Рисунок 6 содержит профили скорости, рассчитанные при различных значениях числа Дарси, а рисунок 7 — при различной толщине пористого слоя. Основные закономерности, описывающие влияние параметров задачи на профили скорости, соответствуют закономерностям в системе с твёрдой верхней границей. Существенным отличием является приблизительно в 2 раза меньшее значение поперечной компоненты скорости течения при прочих равных параметрах, что объясняется меньшей величиной касательных компонент тензора вязких напряжений вблизи границы раздела сред. Максимум продольной скорости течения всегда располагается на верхней границе системы. Зависимость положения максимума поперечной скорости от параметров имеет качественно такой же вид, как и показанный на рисунке 5б для слоя с твёрдой верхней границей.

Выполнено сопоставление профилей рассчитанной в настоящей работе компоненты скорости U и компоненты плоскопараллельного течения U_0 (Рис. 8). На графиках наблюдается заметное (до нескольких процентов) увеличение U по отношению к U_0 . При высокой проницаемости среды ($Da = 10^{-2}$) прирост компоненты U имеет место как в однородной жидкости, так и по всей толщине пористого слоя. При меньшей проницаемости ($Da = 10^{-3}$) наиболее выраженной становится переходная область между однородной жидкостью и пористой средой.

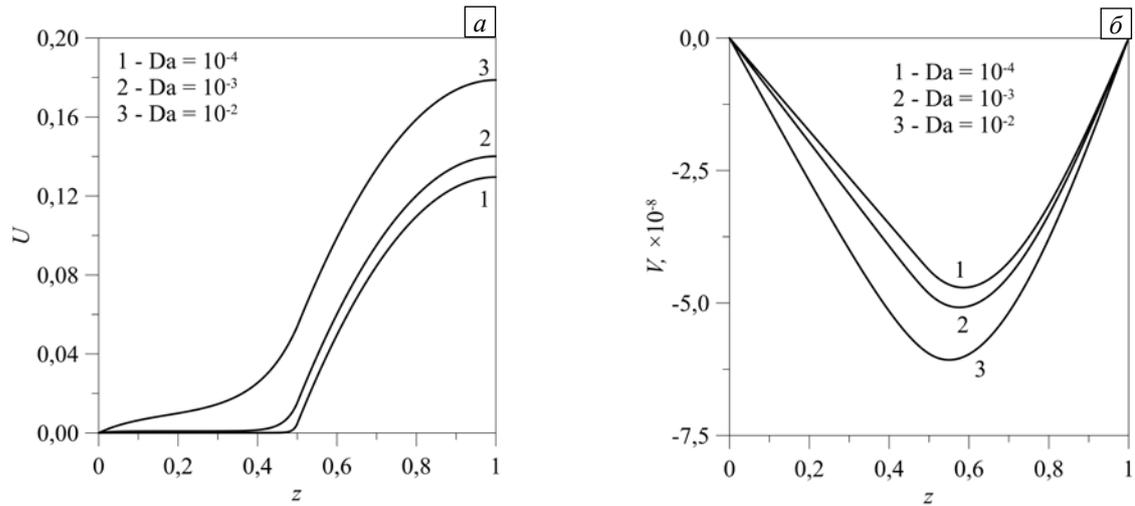


Рис. 6. Продольная (а) и поперечная (б) компоненты скорости течения при различных значениях числа Дарси, толщине пористого слоя $d=0,5$, $Re=100$ и пористости $\phi=0,5$

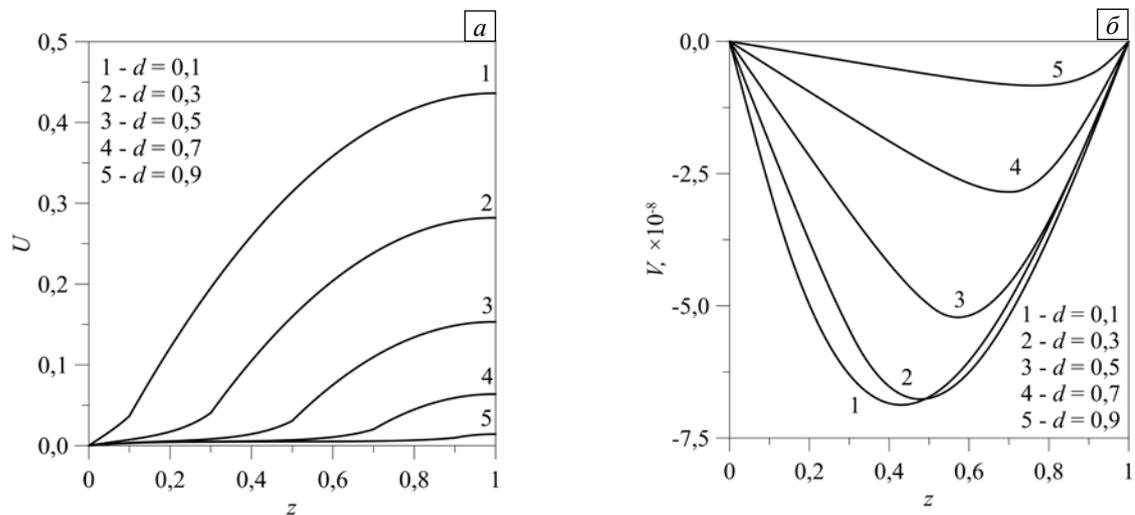


Рис. 7. Продольная (а) и поперечная (б) компоненты скорости течения при различных значениях толщины пористого слоя d , $Re=100$, $Da=10^{-2}$ и пористости $\phi=0,5$

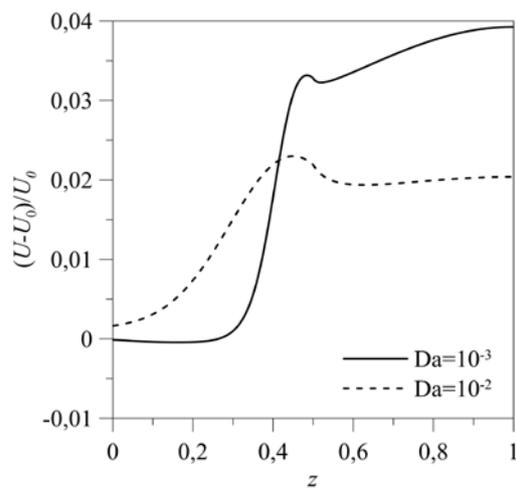


Рис. 8. Характер относительного различия компоненты скорости U и скорости плоскопараллельного течения U_0 при значениях $Da=10^{-2}$ и $Da=10^{-3}$, толщине пористого слоя $d=0,5$, $Re=100$ и пористости $\phi=0,5$

Обратного перетока из пористой среды в слой однородной жидкости не наблюдается. Из структуры поперечного профиля скорости (см. Рис. 3б, 4б, 6б, 7б) видно, что производная V' отрицательна в пористом слое и положительна в однородной жидкости. В совокупности с описанным различием компонент U и U_0 это означает, что горизонтальная составляющая полной скорости (9) внутри пористого слоя увеличивается по сравнению с плоскопараллельным течением. В верхнем слое жидкости поправка к U положительна, а слагаемое $-xV'$ отрицательно, и вклады, обусловленные двумерной структурой течения, компенсируются. На рисунке 9 представлены векторные поля скорости на участке канала, рассчитанные при $Re=100$. Граница раздела находится в середине канала ($d=0,5$). Для наглядности

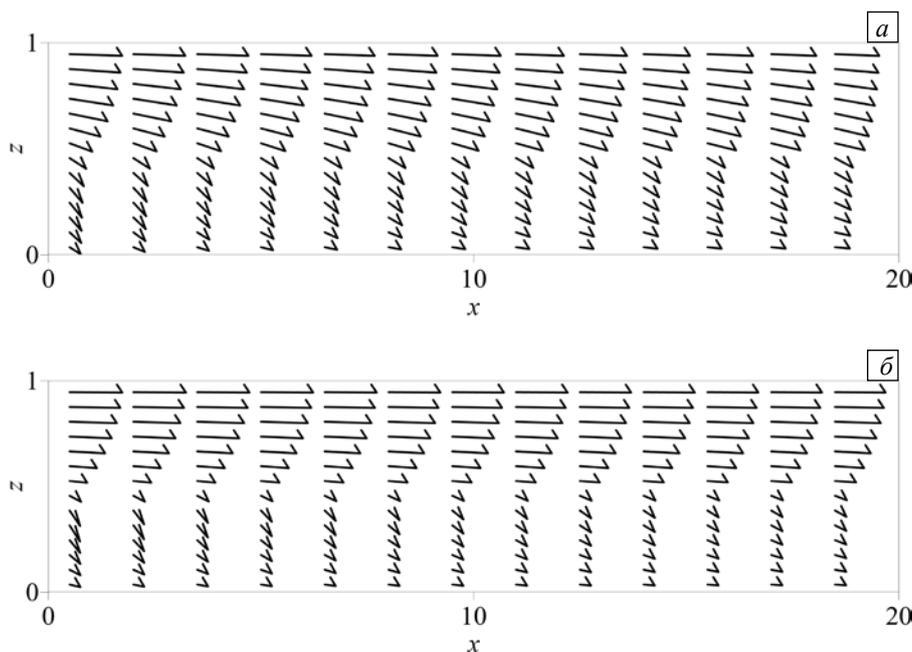


Рис. 9. Векторное поле полной скорости двумерного течения при $Da=10^{-2}$ (а) и $Da=10^{-3}$ (б), толщине пористого слоя $d=0,5$, $Re=100$ и пористости $\phi=0,5$; масштаб вертикальной компоненты скорости увеличен

масштаб вертикальной компоненты скорости V увеличен в 10 раз. Изменение горизонтальной компоненты скорости вдоль канала согласуется с изменением компонент скорости по отдельности.

4. Заключение

В работе выполнены расчёты структуры стационарных двумерных течений в канале, частично заполненном пористой средой. Изучены зависимости поперечной компоненты скорости течения от основных параметров задачи — проницаемости пористой среды, соотношения ширины свободной части канала и слоя пористой среды, в широком диапазоне параметров.

Основной особенностью является крайне малое значение поперечной составляющей скорости, что позволяет говорить о возможности пренебречь ею в большинстве случаев. В то же время, исходя из рассчитанных профилей скорости, при движении тонкой прослойки свободной жидкости вблизи стенки заполненного пористой средой канала ($d \rightarrow 1$) будет наблюдаться усиление влияния поперечной компоненты скорости на течение свободной жидкости. Кроме того, величина поперечного переноса жидкости через границу может достигать значений порядка долей процента от общего расхода в каналах, длина которых превосходит ширину в $10^5 \div 10^6$ раз и более.

В совокупности описанные эффекты могут представлять интерес при разработке технологических устройств, в которых присутствуют смежные течения, например, таких как топливные ячейки, электролитические конденсаторы с пористым диэлектриком и проточные аккумуляторы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 18-71-00057).

Литература

1. *Nield D.A., Bejan A.* Convection in porous media. Springer, 2017. 988 p.
2. *Hill A. A., Straughan B.* Poiseuille flow in a fluid overlying a porous medium // *J. Fluid Mech.* 2008. Vol. 603. P. 137-149. [DOI](#)
3. *Li Q., Hu P.* Analytical solutions of fluid flow and heat transfer in a partial porous channel with stress jump and continuity interface conditions using LTNE model // *Int. J. Heat Mass Tran.* 2019. Vol. 128. P. 1280-1295. [DOI](#)
4. *Bhargavi D., Sharath Kumar Reddy J.* Effect of heat transfer in the thermally developing region of the channel partially filled with a porous medium: constant wall heat flux // *Int. J. Therm. Sci.* 2018. Vol. 130. P. 484-495. [DOI](#)
5. *Beavers G.S., Joseph D.D.* Boundary conditions at a naturally permeable wall // *J. Fluid Mech.* 1967. Vol. 30(1). P. 197-207. [DOI](#)
6. *Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. I. Theoretical development // *Int. J. Heat Mass Tran.* 1995. Vol. 38. P. 2635-2646. [DOI](#)
7. *Lyubimova T.P., Baydina D.T., Lyubimov D.V.* Stability and nonlinear regimes of flow over a saturated porous medium // *Nonlin. Processes Geophys.* 2013. Vol. 20. P. 543-547. [DOI](#)

8. Колчанова Е.А., Колчанов Н.В. Возбуждение конвекции в системе слоев бинарного раствора и неоднородной пористой среды в поле высокочастотных вибраций // Вычисл. мех. сплош. сред. 2017. Т. 10, № 1. С. 53-69. [DOI](#)
9. Kolchanova E.A., Kolchanov N.V. Vibration effect on double-diffusive instability in an inhomogeneous porous layer underlying a binary fluid layer // Int. J. Heat Mass Tran. 2018. Vol. 117. P. 627-644. [DOI](#)
10. Camporeale C., Mantelli E., Manes C. Interplay among unstable modes in films over permeable walls // J. Fluid Mech. 2013. Vol. 719. P. 527-550. [DOI](#)
11. Lyubimova T.P., Lyubimov D.V., Baydina D.T., Kolchanova E.A., Tsiberkin K.B. Instability of plane-parallel flow of incompressible liquid over a saturated porous medium // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 94, 013104. [DOI](#)
12. Hsieh P.-Ch., Hsu P.-Ya. Hydraulic analysis of a two-dimensional water flow down a hillslope // J. Eng. Mech. 2018. Vol. 144. 04018020. [DOI](#)
13. Циберкин К.Б. О структуре поля скорости стационарного течения вблизи границы раздела однородной жидкости и пористой среды Бринкмана // ЖТФ. 2016. Т. 86. Вып. 8. С. 62-67. (English version [DOI](#))
14. Tsiberkin K. Effect of inertial terms on fluid-porous medium flow coupling // Transport Porous Media. 2018. Vol. 121. P. 109-120. [DOI](#)
15. Berman A.S. Laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. 1953. Vol. 24. P. 1232-1235. [DOI](#)
16. Desseaux A. Influence of a magnetic field over a laminar viscous flow in a semi-porous channel // Int. J. Eng. Sci. 1999. Vol. 37. P. 1781-1794. [DOI](#)
17. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: УРСС, 2003. 784 с.
18. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции: учеб. пособие. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 228 с.

References

1. Nield D.A., Bejan A. *Convection in porous media*. Springer, 2017. 988 p.
2. Hill A. A., Straughan B. Poiseuille flow in a fluid overlying a porous medium. *J. Fluid Mech.*, 2008, vol. 603, pp. 137-149. [DOI](#)
3. Li Q., Hu P. Analytical solutions of fluid flow and heat transfer in a partial porous channel with stress jump and continuity interface conditions using LTNE model. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2019, vol. 128, pp. 1280-1295. [DOI](#)
4. Bhargavi D., Sharath Kumar Reddy J. Effect of heat transfer in the thermally developing region of the channel partially filled with a porous medium: constant wall heat flux. *Int. J. Therm. Sci.*, 2018, vol. 130, pp. 484-495. [DOI](#)
5. Beavers G.S., Joseph D.D. Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 30(1), pp. 197-207. [DOI](#)
6. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. I. Theoretical development. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1995, vol. 38, pp. 2635-2646. [DOI](#)
7. Lyubimova T.P., Baydina D.T., Lyubimov D.V. Stability and nonlinear regimes of flow over a saturated porous medium. *Nonlin. Processes Geophys.*, 2013, vol. 20, pp. 543-547. [DOI](#)
8. Kolchanova E.A., Kolchanov N.V. Convection excitation in a system of a binary solution layer and an inhomogeneous porous medium layer in the field of high-frequency vibrations. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 1, pp. 53-69. [DOI](#)
9. Kolchanova E.A., Kolchanov N.V. Vibration effect on double-diffusive instability in an inhomogeneous porous layer underlying a binary fluid layer. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2018, vol. 117, pp. 627-644. [DOI](#)
10. Camporeale C., Mantelli E., Manes C. Interplay among unstable modes in films over permeable walls. *J. Fluid Mech.*, 2013, vol. 719, pp. 527-550. [DOI](#)
11. Lyubimova T.P., Lyubimov D.V., Baydina D.T., Kolchanova E.A., Tsiberkin K.B. Instability of plane-parallel flow of incompressible liquid over a saturated porous medium. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 94, 013104. [DOI](#)
12. Hsieh P.-Ch., Hsu P.-Ya. Hydraulic analysis of a two-dimensional water flow down a hillslope. *J. Eng. Mech.*, 2018, vol. 144, 04018020. [DOI](#)
13. Tsiberkin K.B. On the structure of the steady-state flow velocity field near the interface between a homogeneous liquid and a Brinkman porous medium. *Tech. Phys.*, 2016, vol. 61, pp. 1181-1186. [DOI](#)
14. Tsiberkin K. Effect of inertial terms on fluid-porous medium flow coupling. *Transport Porous Media*, 2018, vol. 121, pp. 109-120. [DOI](#)
15. Berman A.S. Laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.*, 1953, vol. 24, pp. 1232-1235. [DOI](#)
16. Desseaux A. Influence of a magnetic field over a laminar viscous flow in a semi-porous channel. *Int. J. Eng. Sci.*, 1999, vol. 37, pp. 1781-1794. [DOI](#)
17. Samarский А.А., Вабищевич П.Н. *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational heat transfer]. М.: URSS, 2003. 784 p.
18. Tarunin E.L. *Vychislitel'nyy eksperiment v zadachakh svobodnoy konveksii: ucheb. posobiye* [Computationan experiment in free convection problems: tutorial]. Irkutsk: Irkutsk University, 1990. 228 p.

Поступила в редакцию 12.11.2018, после доработки 03.12.2018; принята к опубликованию 05.12.2018

Сведения об авторе

Циберкин Кирилл Борисович, кфмн., доц., Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 614990, Пермь, ул. Букирева, д. 15; e-mail: kbtsiberkin@psu.ru