

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.4.33](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.33)

УДК 532.5

ВЛИЯНИЕ РАССЛОЕНИЯ ПОТОКА ПОЛИМЕРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ НА ФОРМУ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Ю.Л. Кузнецова, О.И. Скульский

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Недавно обнаруженный эффект расслоения сдвигового потока полимерных жидкостей вызвал большой интерес не только к изучению физических основ, приводящих к его возникновению, но и к рассмотрению расслоения как основного механизма, ответственного за появление особенностей поведения растворов и расплавов в реометрических течениях. В связи с этим в данной работе проведено исследование влияния этого явления на форму зависимости вращательного момента от угловой скорости, устанавливаемой в экспериментах на ротационном реометре с измерительной ячейкой типа «коаксиальные цилиндры». Для моделирования расслоения использовалась модифицированная модель Виноградова–Покровского с параметрами, обеспечивающими немонотонность кривой течения. Найдены аналитические соотношения для определения полей скорости и напряжения при заданном вращательном моменте. Предложен численный метод нахождения стационарных решений. Обнаружено, что построенная с помощью модели Виноградова–Покровского функция вращательного момента от угловой скорости в случае течения с контролируемой скоростью вращения цилиндра меняет свой характер при различных режимах нагружения. Исследовано влияние на форму этой зависимости времени разгона цилиндра до заданной скорости вращения, типичной для любого экспериментального оборудования. В результате показано, что модель Виноградова–Покровского с немонотонной кривой течения предсказывает для графика в координатах «вращательный момент – угловая скорость» формирование горизонтального участка, так называемого «плато», в случае контролируемой скорости вращения цилиндра и гистерезисной петли при контролируемом вращательном моменте. Такое поведение полученных зависимостей качественно согласуется с характером кривых, построенных на основе экспериментов.

Ключевые слова: полимерные жидкости, расслоение потока, модифицированная модель Виноградова–Покровского, немонотонная кривая течения, плато и гистерезисная петля, численное моделирование

INFLUENCE OF SHEAR BANDING OF POLYMERIC FLUIDS ON THE SHAPE OF RHEOLOGICAL CURVES

Yu.L. Kuznetsova and O.I. Skul'skiy

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

The recently discovered effect of shear banding in polymer fluids has provoked great interest in studying basic physics underlying this effect, which can also be considered as the main mechanism responsible for the appearance of specific features of polymer liquids in rheometric flows. In this paper, we study the influence of shear banding in polymeric fluids on the shape of the torque-angular velocity curve obtained using a coaxial cylinder sensor system during the experiments on a rotational rheometer. A modified Vinogradov–Pokrovsky model with parameters ensuring a non-monotonic flow curve was used to simulate shear banding. Analytical relations for determination of velocity and stress fields at a given torque are found. A numerical method for establishing stationary solutions from the state of rest is proposed. It was found that the torque-angular velocity curve, which was plotted on the basis of the modified Vinogradov–Pokrovsky model for the controlled velocity of rotation of the cylinder, qualitatively changes its shape under different loading conditions. In addition, the influence of the time of acceleration up to the prescribed velocity of rotation of the inner cylinder (characteristic of any experimental device) on the shape of these curves is investigated. It is shown that the modified Vinogradov–Pokrovsky model with a non-monotonic flow curve predicts the formation of a horizontal section, so-called “plateau”, on the torque-angular velocity curve in the case of the controlled velocity of rotation of the cylinder and the formation of a hysteresis loop at controlled torque. Such a behavior of the obtained curves is in qualitative agreement with the experimental data.

Key words: polymer fluids, shear banding, modified Vinogradov–Pokrovsky model, non-monotonic flow curve, plateau and hysteresis loop, numerical simulation

1. Введение

В настоящее время одним из наиболее интересных и обсуждаемых эффектов в реологии полимерных жидкостей является «расслоение» сдвигового потока изначально изотропной и однородной полимерной жидкости на слои — «полосы сдвига». На первых этапах экспериментальных исследований расслоение наблюдали только в суспензиях, коллоидных и мицеллярных растворах и связывали его с разрушением структуры или седиментацией частиц при увеличении скорости сдвига. Для полимерных жидкостей этот эффект долгое время считался невозможным.

Однако, благодаря внедрению современных методов визуализации течения, появились результаты экспериментов, которые продемонстрировали формирование установившихся кусочно-линейных профилей скорости вследствие сдвигового течения полимерных жидкостей различной природы [1, 2]. Они породили волну новых экспериментальных и теоретических изысканий, направленных не только на выявление ответственных за природу обнаруженного эффекта физических механизмов и условий его реализации, но и

на рассмотрение расслоения потока как основного механизма, приводящего к формированию плато и гистерезисной петли на устанавливаемых в ходе реометрических экспериментов зависимостях [3–6].

С теоретической точки зрения расслоение сдвигового течения означает возможность существования при одном напряжении сдвига двух или более устойчивых структурных состояний жидкости, отвечающих различным значениям скорости сдвига. В связи с этим, одним из способов описания такого эффекта является использование мезоструктурных моделей с немонотонными «кривыми течения», то есть моделей, включающих немонотонность связи сдвигового напряжения со скоростью сдвига. В настоящее время для полимерных жидкостей предложено достаточно большое количество таких моделей [7–9]. Одна из них — это мезоструктурная модифицированная модель Виноградова–Покровского (MVP) [10], которая получена на основании анализа динамики невзаимодействующих упругих «гантелей», состоящих из двух бусинок, соединенных упругой пружинкой (так представляется механическая модель макромолекулы), движущихся в нелинейной анизотропной среде:

$$\Sigma = \sigma_0 \mathbf{E} + \eta_s \mathbf{D} + 3 \frac{\eta_{po}}{\tau_0} \left(\mathbf{a} - \frac{1}{3} I_1(\mathbf{a}) \mathbf{E} \right), \quad (1)$$

$$\overset{\vee}{\mathbf{a}} + \frac{1 + (\kappa - \beta) I_1(\mathbf{a})}{\tau_0} \mathbf{a} = \frac{2}{3} \mathbf{D} - 3 \frac{\beta}{\tau_0} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}. \quad (2)$$

Здесь: Σ , \mathbf{D} — тензоры напряжения и скорости деформации; \mathbf{E} — единичный тензор, $\sigma_0 = (1/3) I_1(\Sigma)$ — среднее давление; η_s — вязкость жидкости в полностью упорядоченном состоянии; η_{po} — вязкость, вносимая полимерными молекулами в состоянии, близком к равновесному; τ_0 — время релаксации; β и κ — феноменологические параметры модели, характеризующие вклад, связанный с ориентацией и относительным удлинением мезоструктуры жидкости, соответственно; $I_1(\mathbf{a})$ и $\overset{\vee}{\mathbf{a}}$ — первый инвариант и верхняя конвективная производная структурного тензора \mathbf{a} , используемого для описания формы и ориентации «гантели» в потоке:

$$\mathbf{a} = \langle \mathbf{R}\mathbf{R} \rangle / \langle \mathbf{R}^2 \rangle_0 - \mathbf{E}/3,$$

где \mathbf{R} — вектор, соединяющий концы макромолекулы, $\langle * \rangle$ — символ осреднения по всем возможным состояниям «гантели», $\langle \mathbf{R}^2 \rangle_0$ — равновесный среднеквадратичный размер молекулы.

Без учета вязкости полностью ориентированного состояния η_s модель Виноградова–Покровского рассматривалась в работах [11, 12], где построены стационарные, в том числе и разрывные, решения, аналогичные решениям Пуазейля и Куэтта для системы уравнений Навье–Стокса, а также доказана линейная неустойчивость (по Ляпунову) аналога течения Пуазейля в плоском бесконечном канале. Однако применение такого варианта модели для описания эффекта расслоения сдвигового потока некорректно, так как в этом случае при превышении скоростью сдвига критического значения сдвиговые напряжения уменьшаются, то есть у кривой течения отсутствует локальный минимум. Модель с учетом дополнительного слагаемого $\eta_s \mathbf{D}$ — MVP-модель (1), (2), исследовалась ранее в работах [13–15]. Для данной модели ограничены диапазоны параметров, соответствующих немонотонной кривой течения, а также показано качественное соответствие реологических характеристик, предсказываемых MVP-моделью, экспериментальным данным для растворов и расплавов полимеров.

Итак, в настоящей работе проведено моделирование течения полимерной жидкости, реализуемого в ротационных реометрах с измерительной ячейкой типа «коаксиальные цилиндры», при условии расслоения потока. В качестве определяющего соотношения выбрана MVP-модель с параметрами, согласующимися с немонотонной кривой течения. Целью данного исследования являлось построение предсказываемой MVP-моделью зависимости вращательного момента от угловой скорости и оценка влияния режимов нагружения и времени разгона внутреннего цилиндра до заданных значений скорости вращения на форму получаемых функций.

2. Постановка задачи

Рассмотрим два соосных цилиндра с радиусами R_1 и R_2 , $R_1 < R_2$. В результате течения, вызванного вращением внутреннего цилиндра, формируется сдвиговое одномерное поле скорости, которое связано только с поперечной координатой r и временем t : $\mathbf{v} = v(t, r) \mathbf{e}_\varphi$. В этом случае уравнение неразрывности выполняется тождественно. Уравнение сохранения импульса в предположении $\partial(*)/\partial\varphi = 0$ преобразуется к виду:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r}, \quad (3)$$

где

$$\sigma_{r\varphi} = \eta_s \dot{\gamma}(t, r) + \frac{3\eta_{po}}{\tau_0} a_{r\varphi}(t, r), \quad \dot{\gamma}(t, r) = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (4)$$

Систему эволюционных уравнений модифицированной модели Виноградова–Покровского (1), (2) запишем как

$$\tau_0 \frac{\partial a_{rr}}{\partial t} + a_{rr} (1 + (\kappa - \beta)(a_{rr} + a_{\varphi\varphi} + a_{zz})) + 3\beta(a_{rr}^2 + a_{r\varphi}^2 + a_{rz}^2) = 0, \quad (5)$$

$$\tau_0 \frac{\partial a_{r\varphi}}{\partial t} + a_{r\varphi} (1 + (\kappa - \beta)(a_{rr} + a_{\varphi\varphi} + a_{zz})) + 3\beta(a_{r\varphi}(a_{rr} + a_{\varphi\varphi}) + a_{\varphi z} a_{rz}) = \tau_0 \dot{\gamma}(a_{rr} + 1/3), \quad (6)$$

$$\tau_0 \frac{\partial a_{rz}}{\partial t} + a_{rz} (1 + (\kappa - \beta)(a_{rr} + a_{\varphi\varphi} + a_{zz})) + 3\beta(a_{rz}(a_{rr} + a_{zz}) + a_{r\varphi} a_{\varphi z}) = 0, \quad (7)$$

$$\tau_0 \frac{\partial a_{\varphi\varphi}}{\partial t} + a_{\varphi\varphi} (1 + (\kappa - \beta)(a_{rr} + a_{\varphi\varphi} + a_{zz})) + 3\beta(a_{r\varphi}^2 + a_{\varphi\varphi}^2 + a_{\varphi z}^2) = 2\tau_0 \dot{\gamma} a_{r\varphi}, \quad (8)$$

$$\tau_0 \frac{\partial a_{\varphi z}}{\partial t} + a_{\varphi z} (1 + (\kappa - \beta)(a_{rr} + a_{\varphi\varphi} + a_{zz})) + 3\beta(a_{\varphi z}(a_{\varphi\varphi} + a_{zz}) + a_{r\varphi} a_{rz}) = \tau_0 \dot{\gamma} a_{rz}, \quad (9)$$

$$\tau_0 \frac{\partial a_{zz}}{\partial t} + a_{zz} (1 + (\kappa - \beta)(a_{rr} + a_{\varphi\varphi} + a_{zz})) + 3\beta(a_{rz}^2 + a_{\varphi z}^2 + a_{zz}^2) = 0. \quad (10)$$

При этом граничные условия будут зависеть от вида реометрического эксперимента:
– при контролируемом вращательном моменте

$$\sigma_{r\varphi}(t, R_1) = M / (2\pi L R_1^2), \quad v(t, R_2) = 0;$$

– при контролируемой угловой скорости вращения внутреннего цилиндра

$$v(t, R_1) = \omega R_1, \quad v(t, R_2) = 0.$$

Здесь: M — вращательный момент; L — высота каждого из цилиндров; ω — угловая скорость.

При расчетах в данной работе использовались следующие значения параметров MVP-модели: $\beta = 0,77$; $\kappa = 0,078$; $\tau_0 = 1$ с; $\eta_{po} = 6500$ Па·с; $\eta_s = 100$ Па·с. Радиусы цилиндров составляли: $R_1 = 0,04$ м, $R_2 = 0,045$ м.

3. Аналитическое решение

Определим стационарные поля скорости и напряжения, формируемые при течении с контролируемым вращательным моментом M . В этом случае из уравнения движения (3) следует соотношение для распределения сдвигового напряжения внутри зазора:

$$\sigma_{r\varphi} = M^* / r^2, \quad (11)$$

где $M^* = M / (2\pi L)$ — удельный вращательный момент.

Систему эволюционных уравнений (5)–(10) преобразуем к виду:

$$a_{rr} (1 + (\kappa - \beta)(a_{rr} + a_{\varphi\varphi})) + 3\beta(a_{rr}^2 + a_{r\varphi}^2) = 0, \quad (12)$$

$$a_{\varphi\varphi} (1 + (\kappa - \beta)(a_{rr} + a_{\varphi\varphi})) + 3\beta(a_{r\varphi}^2 + a_{\varphi\varphi}^2) = 2\tau_0 \dot{\gamma} a_{r\varphi}, \quad (13)$$

$$a_{r\varphi} (1 + (\kappa - \beta)(a_{rr} + a_{\varphi\varphi})) + 3\beta a_{r\varphi} (a_{rr} + a_{\varphi\varphi}) = \tau_0 \dot{\gamma} (a_{rr} + 1/3). \quad (14)$$

Из (12)–(14) получим выражение для касательного напряжения через скорость сдвига. Данная зависимость имеет параметрический вид, где в качестве параметра выступает компонента структурного тензора a_{rr} :

$$\sigma_{r\varphi} = \dot{\gamma} \left(\eta_s + \eta_{po} \frac{(1 + 3a_{rr})(\beta + a_{rr}(\beta + 2\kappa))}{\beta(1 + a_{rr}(4\beta + 2\kappa - 3))} \right), \tag{15}$$

где

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{3a_{rr}\beta^2(1 + a_{rr}(\beta + 2\kappa))(1 + a_{rr}(4\beta + 2\kappa - 3))^2}{\tau_0^2(1 + 3a_{rr})(\beta + a_{rr}(\beta + 2\kappa))^3}}. \tag{16}$$

Для связи искоемых переменных с поперечной координатой используется соотношение (11):

$$r^2 = \frac{M^*}{\sigma_{r\varphi}} = \frac{M^*}{\dot{\gamma} \left(\eta_s + \eta_{po} \frac{(1 + 3a_{rr})(\beta + a_{rr}(\beta + 2\kappa))}{\beta(1 + a_{rr}(4\beta + 2\kappa - 3))} \right)}. \tag{17}$$

Как видно из рисунка 1, в зависимости от величины приложенного удельного вращательного момента M^* , распределение скорости сдвига $\dot{\gamma}(r)$ (16), (17) внутри зазора $r \in [R_1, R_2]$ может иметь почти линейный или S-образный вид (см. кривую 3). При этом меняется количество возможных решений уравнения (17) для a_{rr} на границах. Так, при $M^* = 2$ Н и $M^* = 10$ Н функция $\dot{\gamma}(r)$ внутри зазора ведет себя почти линейно, а значение a_{rr} на границах единственно. При $M^* = 4$ Н и $M^* = 7$ Н на одной из границ появляется три

возможных значения параметра a_{rr} . Для $M^* = 5$ Н обе границы зазора находятся в области неоднозначности $\dot{\gamma}(r)$, и это приводит к существованию трех возможных решений для a_{rr} как на внутренней, так и на внешней границах зазора. Однако значения a_{rr} в точках, отмеченных крестиком (см. Рис. 1), в которых кривые $\dot{\gamma}(r)$ меняют наклон на обратный, дают физически нереализуемые профили скорости.

Для построения профилей воспользуемся следующей процедурой:

1. При фиксированном значении удельного вращательного момента M^* из соотношения (11) находим возможные решения a_{rr} на стенках цилиндров:

$$\sigma_{r\varphi}(a_{rr}^{(1)}) = M^*/R_1^2, \quad \sigma_{r\varphi}(a_{rr}^{(2)}) = M^*/R_2^2.$$

На каждой границе, в зависимости от M^* и величины радиусов R_1 и R_2 , может быть от одного до трех значений a_{rr} . Если значений три, то одно из них (среднее) отбрасываем: оно принадлежит нисходящей ветви кривой течения и дает физически нереализуемые профили скорости.

2. Далее, для каждого набора $\{a_{rr}^{(1)}, a_{rr}^{(2)}\}$ значений на границах зазора, с учетом (16) и (17), решаем обыкновенное дифференциальное уравнение (4):

$$\frac{dv(a_{rr})}{da_{rr}} \left(\frac{dr(a_{rr})}{da_{rr}} \right)^{-1} - \frac{v(a_{rr})}{r(a_{rr})} = \dot{\gamma}(a_{rr}), \quad a_{rr} \in [a_{rr}^{(1)}, a_{rr}^{(2)}]$$

и приходим к выражению $v(a_{rr})$, которое совместно с (17) позволяет определить поле скорости. Результаты вычислений представлены на рисунке 2.

Если при этом обе границы принадлежат области неоднозначности $\dot{\gamma}(r)$, как, например, при $M^* = 5$ Н (Рис. 1), то может формироваться до трех профилей скорости, один из которых будет иметь тангенциальный разрыв (Рис. 2д). В этом случае значение r , отвечающее точке пересечения образующейся петли (она показана пунктиром), определяет поверхность расслоения течения. Следует отметить, что скорость на внутреннем цилиндре во всех трех случаях различна, в то время как скорость сдвига для двух из профилей совпадает (Рис. 2б и 2в).

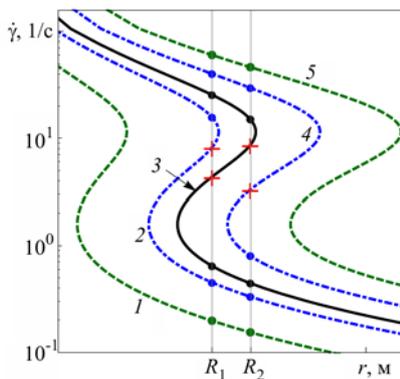


Рис. 1. Распределение скорости сдвига по ширине зазора для различных значений удельного вращательного момента M^* , Н: 2 (кривая 1); 4 (2); 5 (3); 7 (4); 10 (5)

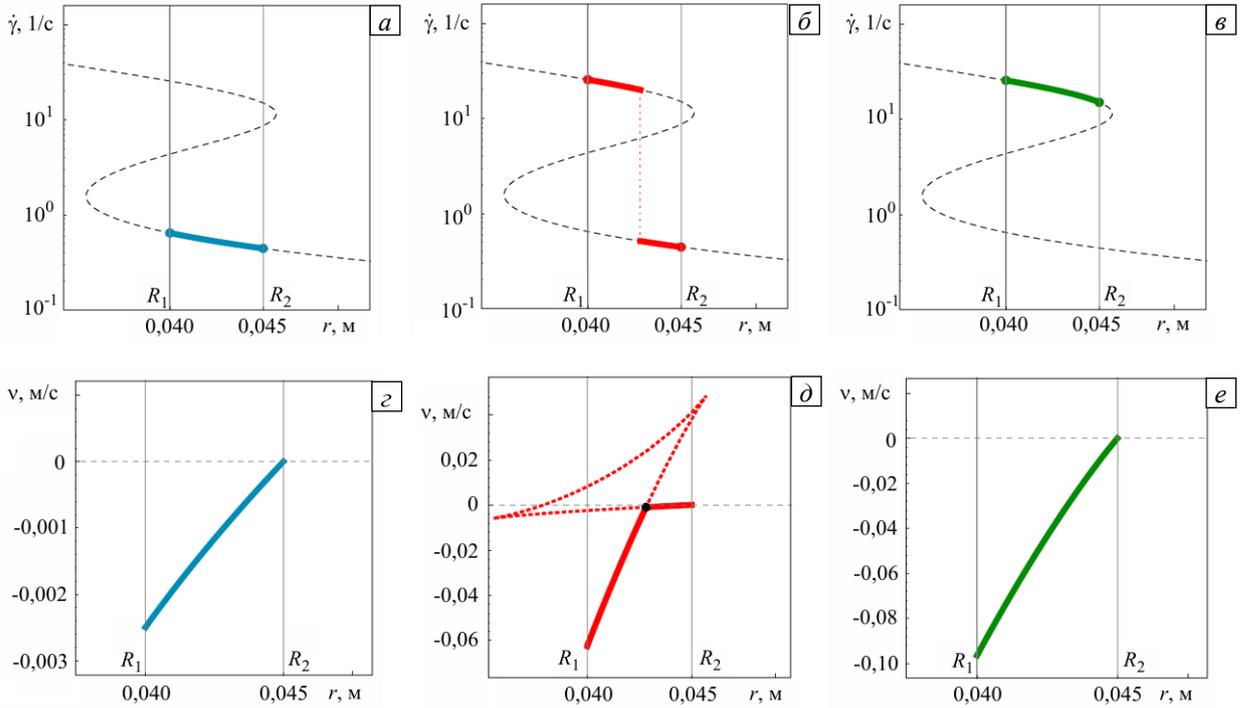


Рис. 2. Распределение скоростей сдвига (а)–(б) и соответствующие им профили скорости (з)–(е) при $M^* = 5$ Н и различных сочетаниях $\{a_{rr}^{(1)}, a_{rr}^{(2)}\}$ значений параметра a_{rr} на стенках цилиндров

Проделав описанную выше процедуру вычисления поля скорости для некоторого диапазона значений M , построим функцию удельного вращательного момента $M^* = M/(2\pi L)$ от угловой скорости $\omega = V/R_1$, где

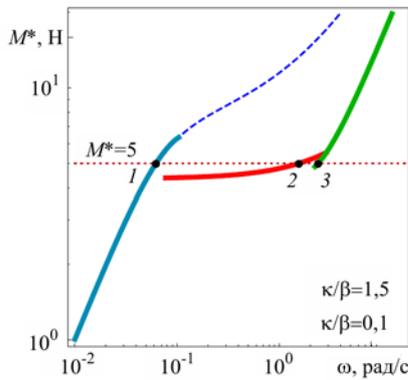


Рис. 3. Зависимость угловой скорости $\omega = V/R_1$ от удельного вращательного момента $M^* = M/(2\pi L)$; точке 1 соответствуют кривые $\dot{\gamma}(r)$ и $v(r)$, показанные на рисунке 2а, з, точке 2 – см. Рис. 2б, д, точке 3 – см. Рис. 2в, е

V — скорость жидкости на внутреннем цилиндре. Такие зависимости получаются в результате натуральных измерений на ротационных реометрах. На рисунке 3 представлены графики $M^*(\omega)$ для двух наборов параметров MVP-модели: $\kappa/\beta = 1,5$ (монотонная кривая течения) и $\kappa/\beta = 0,1$ (немонотонная кривая течения). Пунктирной горизонтальной линией нанесено значение крутящего момента $M^* = 5$ Н, для которого ранее построены три возможных распределения скорости сдвига и соответствующие им профили скорости (Рис. 2).

Следует отметить, что ветвь, на которой показана точка 2, отвечает формированию расслоенного течения, а ветви 1 и 3 — однородного, с профилем скорости, близким клинейному. Какое из полученных решений будет реализовываться при заданном вращательном моменте — зависит от истории нагружения. Для учета этого факта рассмотрим, начиная от состояния покоя, как происходит развитие профилей скорости и полей напряжения во времени.

4. Алгоритм численного решения квазистационарной задачи

Решение системы уравнений (3)–(10), описывающей, согласно MVP-модели, одномерное сдвиговое течение жидкости в зазоре между коаксиальными цилиндрами, находилось в предположении, что при изменении во времени поля скорости компоненты структурного тензора \mathbf{a} успевают принять значения, согласующиеся с текущим градиентом скорости. Это означает, что на каждом шаге по времени значение напряжения $\sigma_{r\phi}$ может быть найдено из стационарного решения системы уравнений (12)–(14) при известной с предыдущего временного шага скорости сдвига $\dot{\gamma} = (\partial v/\partial r) - v/r$:

$$\sigma_{r\phi} = \left(\eta_s + \eta_{po} \frac{(1 + 3a_{rr})(\beta + a_{rr}(\beta + 2\kappa))}{\beta(1 + a_{rr}(4\beta + 2\kappa - 3))} \right) \dot{\gamma} \equiv \eta^* \dot{\gamma}, \tag{18}$$

где η^* — комплексная вязкость. После подстановки выражения (18) в уравнение движения (3) приходим к выражению для вычисления поля скорости:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta^* \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right), \quad (19)$$

которое затем решаем методом конечных элементов с линейной аппроксимацией компоненты поля скорости на элементе $v(t, r) = v_m(t) \phi_m(r)$, где $\phi_m(r) = a_m + b_m r$, при граничных — $v(t, R_1) = \omega(t) R_1$, и $v(t, R_2) = 0$, и начальных — $a(0, r) = 0$, $v(0, r) = 0$, условиях.

Для найденного поля скорости определяем значение компоненты структурного тензора a_{rr} из соотношения (16):

$$\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \sqrt{-\frac{3a_{rr}\beta^2(1+a_{rr}(\beta+2\kappa))(1+a_{rr}(4\beta+2\kappa-3))^2}{\tau_0^2(1+3a_{rr})(\beta+a_{rr}(\beta+2\kappa))^3}}.$$

Далее полученное значение a_{rr} используем для отыскания нового значения комплексной вязкости η^* (18) и вычисления поля скорости на следующем временном шаге (19).

Данный итерационный процесс повторяем до установления постоянного значения сдвигового напряжения $\sigma_{rp} = \text{const}$ поперек зазора $r \in [R_1, R_2]$, что соответствует стационарному решению системы уравнений (3)–(10).

5. Результаты численного моделирования

5.1. Течение с контролируемым вращательным моментом

На рисунке 4 показано, что при постепенном увеличении и последующем снижении прикладываемого удельного вращательного момента формируется гистерезисная петля. Профили скорости в диапазоне вращательных моментов, отвечающих гистерезисной петле, имеют кусочно-линейный вид (Рис. 4, вставка). Можно заметить, что найденные выше аналитические решения совпадают с численными результатами на ветвях, соответствующих однородным профилям скорости (Рис. 3). Аналитически установленные состояния системы с расслоенным течением качественно согласуются с найденными численно, однако имеет место количественное несовпадение.

5.2. Течение с контролируемой скоростью вращения внутреннего цилиндра

На рисунке 5 приведены зависимости, построенные на основе данных численного решения задачи в квазистационарной постановке, которое, в отличие от решения, информацию о котором представляет рисунок 4, получено при фиксированном значении угловой скорости внутреннего цилиндра. Кроме того, в процессе вычислений определялось значение удельного вращательного момента, то есть проводился так называемый эксперимент с контролируемой скоростью вращения цилиндра. Рассмотрены различные режимы выхода на заданную угловую скорость ω (режимы нагружения). При этом для каждого заданного значения ω_i установившееся решение формируется:

- из состояния покоя при режиме нагружения «jump-up»;
- из полностью ориентированного состояния, в качестве которого берется решение при $\omega = 100$ рад/с — режим «jump-down»;
- из состояния, отвечающего значению $\omega_i - \delta\omega$ — режим «ramp-up»;
- из состояния, отвечающего значению $\omega_i + \delta\omega$ — режим «ramp-down».

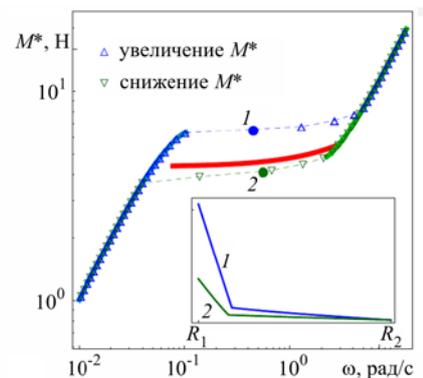


Рис. 4. Гистерезисная петля за цикл увеличения и уменьшения прикладываемого удельного вращательного момента M^* ; во вставке приведены распределения скорости в зазоре, отвечающие точкам 1 и 2 гистерезисной петли

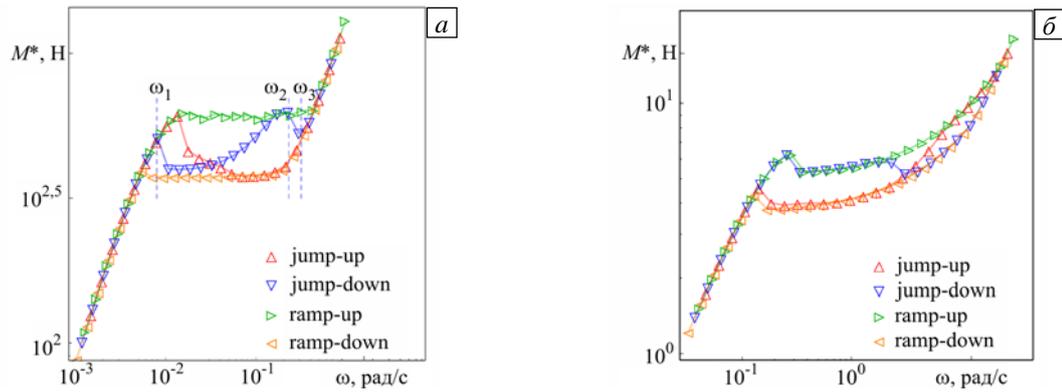


Рис. 5. Зависимость удельного вращательного момента $M^* = M/(2\pi L)$ от угловой скорости $\omega = V/R_1$, построенная по данным численного решения системы уравнений (3)-(10) при заданных значениях угловой скорости внутреннего цилиндра для различных режимов нагружения и разной кривизны зазора $(R_2 - R_1)/R_1$: 0,0125 (а); 0,5 (б)

Как следует из рисунка 5, функция $M^*(\omega)$, отвечающая различным условиям течения, качественно выглядит по-разному. Для одной и той же заданной скорости вращения внутреннего цилиндра установившиеся состояния течения жидкости в системе «коаксиальные цилиндры» при различных режимах нагружения отличаются и числом образующихся слоев, и отношением их высот. При большой кривизне зазора $(R_2 - R_1)/R_1$ образуются только двухслойные течения, при этом слой с большей скоростью сдвига всегда находится ближе к внутреннему цилиндру (Рис. 6б). Интересные результаты получаются в случае малой кривизны зазора в режиме нагружения jump-down. При значениях угловых скоростей $0,23 \leq \omega \leq 0,3$ (Рис. 5а, $[\omega_2, \omega_3]$) MVP-модель предсказывает формирование двух поверхностей раздела, отделяющих внутренний слой с низкой скоростью сдвига от пристенных слоев, в которых скорость сдвига больше (Рис. 6а). В случае $0,01 \leq \omega \leq 0,23$ (Рис. 5а, $[\omega_1, \omega_2]$) формируется двухслойное течение, при этом слой с более низкой скоростью сдвига, в отличие от всех предыдущих случаев, находится у поверхности внутреннего цилиндра. Следует отметить, что значение угловой скорости, выбираемое в качестве начального приближения при моделировании течения в режимах jump-up и jump-down, не вносит существенного изменения в результаты расчета.

Приведенные на рисунке 5 графики функций говорят о заметном влиянии истории нагружения на форму предсказываемой MVP-моделью зависимости $M^*(\omega)$. Подобное поведение отмечалась также при исследовании коаксиальных течений с помощью ряда широко используемых для описания поведения мезоструктурных жидкостей моделей [16, 17], и не согласуется с экспериментальными данными для червеобразных мицеллярных и полимерных растворов, в которых отмечается формирование единой, не связанной с историей нагружения, функции $M^*(\omega)$ [2, 5, 18]. С целью корректировки получаемых числовых данных в ряде моделей вводится дополнительное диффузионное слагаемое. В данной работе показано, что качественного совпадения с экспериментальными данными для MVP-модели можно добиться за счет учета времени разгона до заданной скорости вращения внутреннего цилиндра t_ω , которое характерно для любого измерительного прибора. В качестве закона установления заданной скорости использовался следующий: $V_\omega(t) = V_\omega [1 - e^{-t/5t_\omega}]$.

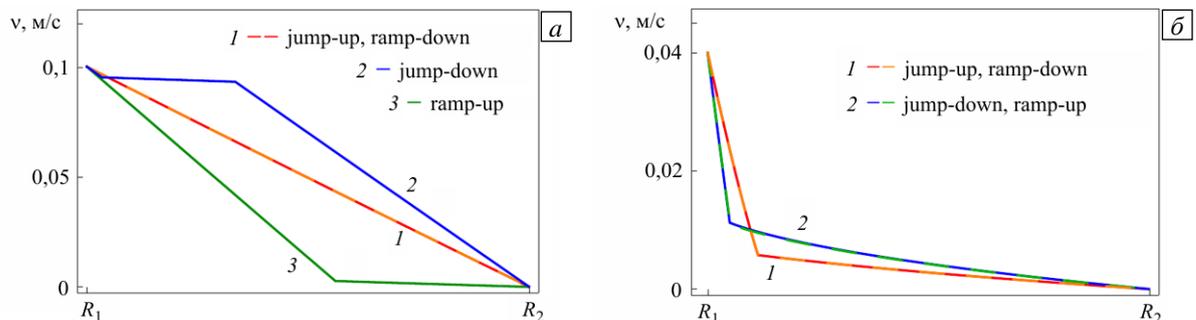


Рис. 6. Профили скорости при фиксированном значении (0,25 рад/с) угловой скорости $\omega \in [\omega_2, \omega_3]$ для различных режимов нагружения и разных значений кривизны зазора $(R_2 - R_1)/R_1$: 0,0125 (а); 0,5 (б)

Как видно из рисунка 7, замена «мгновенного» выхода на заданную скорость вращения внутреннего цилиндра ($t_0 = 0$ с, Рис. 5) разгоном за время $t_0 = 10^{-2}$ с приводит к совпадению функций $M^*(\omega)$ при различных режимах нагружения почти во всей области расслоения. При уменьшении значения t_0 формируются зависимости $M^*(\omega)$, находящиеся в области между двумя приведенными крайними случаями: $t_0 = 0$ с (Рис. 5) и $t_0 = 10^{-2}$ с (Рис. 7).

Следует отметить, что взятое в качестве примера значение времени выхода на заданную скорость вращения цилиндра t_0 , при котором пропадает влияние истории нагружения на форму $M^*(\omega)$, сопоставимо с временем разгона элементов экспериментального оборудования. Кроме того, использование MVP-модели с параметрами, обеспечивающими немонотонность кривой течения, приводит к формированию монотонной зависимости с плато для характеристик, измеряемых в экспериментах на ротационном реометре.

6. Заключение

Для описания течения полимерной жидкости между коаксиальными цилиндрами с учетом расслоения потока применена модифицированная модель Виноградова–Покровского с немонотонной кривой течения. Построены точные стационарные решения данной задачи в случае контролируемого вращательного момента. Обнаружено, что существует диапазон моментов, в котором возможны скорости трех различных профилей, один из которых соответствует расслоенному течению.

На основе аналитических соотношений построен алгоритм численного решения квазистационарной задачи. В результате показано, что в диапазоне вращательных моментов, для которых существует три решения, вид установившихся профилей скорости и напряжений зависит от истории нагружения. Это проявляется в образовании гистерезисной петли при постепенном увеличении и последующем снижении прикладываемого вращательного момента.

Отмечено существенное влияние режимов установления заданного значения угловой скорости на форму получаемого силового отклика. Показано, что введение времени выхода угловой скорости вращения цилиндра на заданное значение, порядок которого отвечает характерному времени разгона в измерительных приборах, приводит к формированию плато на кривой $M(\omega)$.

Из вышесказанного следует, что модифицированная модель Виноградова–Покровского с немонотонной кривой течения может применяться для описания течения полимерных жидкостей, демонстрирующих расслоение потока, а также плато и гистерезисную петлю на графике функции вращательного момента от угловой скорости.

Литература

1. Tapadia P., Wang S.-Q. Direct visualization of continuous simple shear in non-Newtonian polymeric fluids // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 96. 016001. DOI
2. Boukany P.E., Wang S.-Q. Shear banding or not in entangled DNA solutions depending on the level of entanglement // J. Rheol. 2009. Vol. 53. P. 73-84. DOI
3. Vinogradov G.V., Malkin A.Ya., Yanovskii Yu.G., Borisenkova E.K., Yarlykov B.V., Berezhnaya G.V. Viscoelastic properties and flow of narrow polybutadienes and polyisoprenes // J. Polymer Sci. B Polymer Phys. 1972. Vol. 10, No. 6. P. 1061-1084. DOI
4. Sui Ch., McKenna G.B. Instability of entangled polymers in cone and plate rheometry // Rheol. Acta. 2007. Vol. 46. P. 877-888. DOI
5. Ravindranath S., Wang S.-Q. Steady state measurements in stress plateau region of entangled polymer solutions: Controlled-rate and controlled-stress modes // J. Rheol. 2008. Vol. 52. P. 957-980. DOI
6. Robert L., Demay Y., Vergnes B. Stick-slip flow of high density polyethylene in a transparent slit die investigated by laser Doppler velocimetry // Rheol. Acta. 2004. Vol. 43. P. 89-98. DOI
7. Bird R.B., Wiest J.M. Constitutive equations for polymeric liquids // Annu. Rev. Fluid Mech. 1995. Vol. 27. P. 169-193. DOI
8. Remmelgas J., Harrison G., Leal L.G. A differential constitutive equation for entangled polymer solutions // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1999. Vol. 80. P. 115-134. DOI

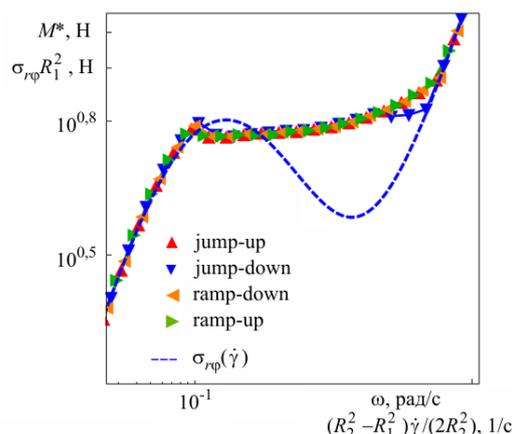


Рис. 7. Штриховая линия – кривая течения $\sigma_{r\phi}(\dot{\gamma})$ с параметрами: $\beta = 0,77$, $\kappa = 0,078$, $\tau_0 = 1$ с, $\eta_s = 100$ Па·с, $\eta_{po} = 6500$ Па·с, и соответствующие ей зависимости $M^*(\omega)$, полученные для различных режимов нагружения при времени разгона $t_0 = 10^{-2}$ с и кривизне зазора 0,125

9. Likhtman A.E., Graham R.S. Simple constitutive equation for linear polymer melts derived from molecular theory: Rolie-Poly equation // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2003. Vol. 114. P. 1-12. [DOI](#)
10. Алтухов Ю.А., Гусев А.С., Пышнограй Г.В. Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем. Барнаул: АлтГПА, 2012. 121 с.
11. Бамбаева Н.В., Блохин А.М. Стационарные решения уравнений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости // *ЖВММФ*. 2014. Т. 54, № 5. С. 845-870 [DOI](#)
12. Блохин А.М., Егитов А.В., Ткачев Д.Л. Линейная неустойчивость решений математической модели, описывающей течения полимеров в бесконечном канале // *ЖВММФ*. 2015. Т. 55, № 5. С. 850-875. [DOI](#)
13. Пышнограй Г.В., Кузнецова Ю.Л., Скульский О.И. Течение нелинейной упруговязкой жидкости в плоском канале под действием заданного градиента давления // *Вычисл. мех. сплош. сред*. 2010. Т. 3, № 2. С. 55-69. [DOI](#)
14. Скульский О.И., Кузнецова Ю.Л. Сдвиговое течение нелинейной упруговязкой жидкости // *Вест. Перм. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2011. Т. 8, № 4. С. 18-26.
15. Wilson H.J., Fielding S.M. Linear instability of planar shear banded flow of both diffusive and non-diffusive Johnson-Segalman fluids // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2006. Vol. 138. P. 181-196. [DOI](#)
16. Germann N., Gurnon A.K., Zhou L., Cook L.P., Beris A.N., Wagner N.J. Validation of constitutive modeling of shear banding, threadlike wormlike micellar fluids // *J. Rheol.* 2016. Vol. 60. P. 983-999. [DOI](#)
17. Boltenhagen P., Hu Y., Matthys E.F., Pine D.J. Observation of bulk phase separation and coexistence in a sheared micellar solution // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 2359-2362. [DOI](#)

References

1. Tapadia P., Wang S.-Q. Direct visualization of continuous simple shear in non-Newtonian polymeric fluids. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 96, 016001. [DOI](#)
2. Boukany P.E., Wang S.-Q. Shear banding or not in entangled DNA solutions depending on the level of entanglement. *J. Rheol.*, 2009, vol. 53, pp. 73-84. [DOI](#)
3. Vinogradov G.V., Malkin A.Ya., Yanovskii Yu.G., Borisenkova E.K., Yarlykov B.V., Berezhnaya G.V. Viscoelastic properties and flow of narrow polybutadienes and polyisoprenes. *J. Polymer Sci. B Polymer Phys.*, 1972, vol. 10, no. 6, pp. 1061-1084. [DOI](#)
4. Sui Ch., McKenna G.B. Instability of entangled polymers in cone and plate rheometry. *Rheol. Acta*, 2007, vol. 46, pp. 877-888. [DOI](#)
5. Ravindranath S., Wang S.-Q. Steady state measurements in stress plateau region of entangled polymer solutions: Controlled-rate and controlled-stress modes. *J. Rheol.*, 2008, vol. 52, pp. 957-980. [DOI](#)
6. Robert L., Demay Y., Vergnes B. Stick-slip flow of high density polyethylene in a transparent slit die investigated by laser Doppler velocimetry. *Rheol. Acta*, 2004, vol. 43, pp. 89-98. [DOI](#)
7. Bird R.B., Wiest J.M. Constitutive equations for polymeric liquids. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1995, vol. 27, pp. 169-193. [DOI](#)
8. Remmelgas J., Harrison G., Leal L.G. A differential constitutive equation for entangled polymer solutions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1999, vol. 80, pp. 115-134. [DOI](#)
9. Likhtman A.E., Graham R.S. Simple constitutive equation for linear polymer melts derived from molecular theory: Rolie-Poly equation. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2003, vol. 114, pp. 1-12. [DOI](#)
10. Altukhov Yu.A., Gusev A.S., Pyshnograd G.V. *Vvedeniye v mezoskopicheskuyu teoriyu tekuchikh polimernykh sistem* [Introduction to the mesoscopic theory of fluid polymer systems]. Barnaul, AltGPA, 2012. 121 p.
11. Bambaeva N.V., Blokhin A.M. Stationary solutions of equations of incompressible viscoelastic polymer liquid. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 5, pp. 874-899. [DOI](#)
12. Blokhin A.M., Yegitov A.V., Tkachev D.L. Linear instability of solutions in a mathematical model describing polymer flows in an infinite channel. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, no. 5, pp. 848-873. [DOI](#)
13. Kuznetsova Ju.L., Skul'skiy O.I., Pyshnograй G.V. Pressure driven flow of a nonlinear viscoelastic fluid in a plane channel. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 55-69. [DOI](#)
14. Kuznetsova Ju.L., Skul'skiy O.I. Shear flow of the nonlinear elastic viscous fluid. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, 2011, vol. 8, no. 4, pp. 18-26.
15. Wilson H.J., Fielding S.M. Linear instability of planar shear banded flow of both diffusive and non-diffusive Johnson-Segalman fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2006, vol. 138, pp. 181-196. [DOI](#)
16. Germann N., Gurnon A.K., Zhou L., Cook L.P., Beris A.N., Wagner N.J. Validation of constitutive modeling of shear banding, threadlike wormlike micellar fluids. *J. Rheol.*, 2016, vol. 60, pp. 983-999. [DOI](#)
17. Boltenhagen P., Hu Y., Matthys E.F., Pine D.J. Observation of bulk phase separation and coexistence in a sheared micellar solution. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 79, pp. 2359-2362. [DOI](#)

Поступила в редакцию 01.11.2018, после доработки 26.11.2018; принята к опубликованию 02.12.2018

Сведения об авторах

Кузнецова Юлия Леонидовна, б/с, инж., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: julyashmit@gmail.com

Скульский Олег Иванович, дтн., внс, ИМСС УрО РАН; e-mail: skul@icmm.ru