

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.4.32](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.32)

УДК 532.517.4:536.252

## ТУРБУЛЕНТНАЯ КОНВЕКЦИЯ ЖИДКОГО НАТРИЯ В НАКЛОННОМ ЦИЛИНДРЕ С ЕДИНИЧНЫМ АСПЕКТНЫМ ОТНОШЕНИЕМ

С.Д. Мандрыкин, А.С. Теймуразов

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*

Выполнено численное исследование турбулентной конвекции жидкого натрия (число Прандтля  $Pr = 0,0093$ ) в цилиндре с единичным аспектным отношением, нагреваемом с одного торца и охлаждаемом с другого. Рассмотрены режимы течения при наклоне цилиндра относительно вертикали на угол  $\beta = 0, 20, 40, 70^\circ$ . Число Рейля составляет  $1,5 \cdot 10^7$ . Задача решалась в трехмерной нестационарной постановке, что позволило получить мгновенные и средние характеристики процесса, проанализировать поля пульсаций температуры. Математическая модель основывается на уравнениях термогравитационной конвекции в приближении Буссинеска с применением метода крупных вихрей (LES) для учета мелкомасштабной турбулентности. Использована неравномерная расчетная сетка с общим числом узлов  $2,9 \cdot 10^6$ . Показано, что структура течения существенно зависит от  $\beta$ . Во всех случаях в цилиндре обнаруживается крупномасштабная циркуляция (КМЦ). При умеренном наклоне полости ( $\beta = 20^\circ$ ) наблюдается доминирующая частота осцилляций угла ориентации КМЦ. Увеличение наклона до  $40^\circ$  ведет к стабилизации течения, доминирующая частота у КМЦ отсутствует. Наибольшие температурные пульсации возникают при течениях в цилиндрах с малым наклоном. При всех  $\beta$  области с интенсивными пульсациями сосредоточены вблизи нижнего и верхнего торцов, а максимальные значения пульсаций находятся вблизи боковых стенок цилиндра, где встречаются горячий и холодный потоки жидкости. По мере удаления от стенок интенсивность пульсаций снижается, причем тем быстрее, чем больше угол наклона. Число Рейнольдса, характеризующее полную энергию течения, достигает максимума при  $\beta = 20^\circ$ , а затем, по мере роста  $\beta$ , уменьшается. Среднее течение имеет максимальную интенсивность при  $\beta = 40^\circ$ . Показано, что с увеличением угла наклона полости энергия турбулентных пульсаций скорости монотонно убывает, а тепловой поток вдоль ее оси возрастает. Так, при  $\beta = 40^\circ$  число Нуссельта  $Nu$  на 26% выше своего значения в случае вертикального положения цилиндра.

*Ключевые слова:* конвекция, турбулентность, малые числа Прандтля, жидкий металл

## TURBULENT CONVECTION OF LIQUID SODIUM IN AN INCLINED CYLINDER OF UNIT ASPECT RATIO

S.D. Mandrykin and A.S. Teimurazov

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*

Turbulent convection of liquid sodium (Prandtl number  $Pr = 0,0093$ ) in a cylinder of unit aspect ratio, heated at one end face and cooled at the other, is studied numerically. The flow regimes with inclination angles  $\beta = 0, 20, 40, 70^\circ$  with respect to the vertical are considered. The Rayleigh number is  $1.5 \cdot 10^7$ . Three-dimensional nonstationary simulations allow one to get instant and average characteristics of the process and to study temperature pulsation fields. A mathematical model is based on the Boussinesq equations for thermogravitational convection with use of the LES (large-eddy simulations) approach for small-scale turbulence modeling. Simulations were carried out with a non-uniform numerical grid consisting of  $2.9 \cdot 10^6$  nodes. It is shown that the flow structure strongly depends on  $\beta$ . The large-scale circulation (LSC) exists in the cylinder at any  $\beta$ . Under moderate inclination ( $\beta = 20^\circ$ ), the strong oscillations of the LSC orientation angle with dominant frequency are observed. Increasing the inclination up to  $40^\circ$  leads to stabilization of the large-scale flow and there is no dominant frequency of oscillations in this case. It is shown that more intensive temperature pulsations occur at small cylinder inclinations. At any  $\beta$  the regions with intensive pulsations are concentrated in the areas along low and upper cylinder faces. The maximum values of pulsations occur in the area close to lateral walls, where hot and cold fluid flows collide. The intensity of temperature pulsations decreases with increasing distance from the lateral walls. The Reynolds number which characterizes the total energy of the flow reaches its maximum value at  $\beta = 20^\circ$  and then decreases with increasing  $\beta$ . The mean flow has maximum intensity at  $\beta = 40^\circ$ . Turbulent velocity pulsation energy decreases monotonically with increasing inclination angle. It is shown that the inclination leads to an increase in heat transfer along the cylinder axis. The Nusselt number at  $\beta = 40^\circ$  is 26% higher than that in the vertical cylinder.

*Key words:* convection, turbulence, low Prandtl numbers, liquid metal

### 1. Введение

При турбулентной конвекции Релея–Бенара в вертикальных слоях жидкости возможно большое многообразие динамических режимов течения [1, 2], которые реализуются в зависимости от значений числа Релея  $Ra$ , числа Прандтля  $Pr$  и аспектного отношения  $\Gamma$ , в случае цилиндрической геометрии полости представляющего собой отношение ее высоты  $L$  к диаметру  $D$ .

Наибольший интерес вызывают интегральные характеристики течения (число Нуссельта  $Nu$ , характеризующее теплоперенос в системе, число Рейнольдса  $Re$ , определяющее интенсивность конвекции) и свойства крупномасштабной циркуляции (КМЦ), возникающей на фоне развитого турбулентного течения.

Наименее изученным остается случай с малыми числами Прандтля ( $Pr < 0,01$ ), что соответствует жидким металлам. Особенностью конвективных течений жидких металлов является большая величина

отношения толщины теплового пограничного слоя к толщине динамического пограничного слоя, то есть динамический пограничный слой имеет очень малую толщину. Это приводит к тому, что численное моделирование таких течений требует значительных вычислительных ресурсов: для одного и того же значения числа Релея необходимо тем большее пространственное разрешение в пограничном слое, чем меньше значение числа Прандтля. Экспериментальные исследования данных режимов осложняются тем, что жидкие металлы являются агрессивной и непрозрачной средой, обладают высокой температуропроводностью, сравнимой с температуропроводностью материалов теплообменников [3, 4]. Тем не менее, конвекция в жидких металлах активно изучается как численно [5, 6], так и экспериментально [4, 7, 8], поскольку она интересна не только с фундаментальной, но и с практической точки зрения: например, в ядерных реакторах на быстрых нейтронах в качестве теплоносителя используется жидкий натрий.

Важным параметром задачи является ориентация полости относительно направления вектора силы тяжести. Изменение угла наклона емкости  $\beta$  существенно влияет на структуру течения. Здесь и далее значению  $\beta = 0^\circ$  соответствует случай конвекции Релея–Бенара, а значение  $\beta = 90^\circ$  означает случай горизонтального цилиндра с вертикально расположенными нагревателями. В жидкостях с большими ( $Pr \sim 10$ ) и малыми ( $Pr < 1$ ) числами Прандтля характер зависимости интенсивности теплопереноса от угла наклона различается. В первом случае при малом отклонении от вертикального положения число Нуссельта уменьшается [9], а во втором — растет [10]. При дальнейшем увеличении  $\beta$  наблюдается рост значений числа Нуссельта, хотя зависимость интенсивности теплопереноса от угла наклона может быть довольно сложной. Экспериментальные [4, 7, 11] и численные [6, 10, 12] исследования показывают, что максимальный теплообмен между горячей и холодной поверхностями реализуется именно в наклонном положении емкости.

Структура течения и интенсивность теплопереноса зависят и от аспектного отношения полости. Экспериментально и численно установлено, что конвекция в цилиндрах с различным аспектным отношением ( $\Gamma = 1; 5; 20$ ) значительно отличается и в случае жидких металлов [4, 6-8], и в случае жидкостей с большими значениями  $Pr$  [12].

В данной работе численно изучается конвекция жидкого натрия ( $Pr = 0,0093$ ) в наклонном цилиндре с единичным аспектным отношением при числе Релея  $Ra = 1,5 \cdot 10^7$ . Этот режим течения ранее численно не исследовался. Расчеты выполняются в трехмерной нестационарной постановке с использованием подхода крупных вихрей — Large-Eddy Simulations (LES), позволяющего воспроизводить характерные особенности турбулентной конвекции на относительно грубой расчетной сетке [6]. Параметры расчетов выбираются таким образом, чтобы условия при вычислениях максимально соответствовали условиям экспериментов [4]. Численное моделирование позволяет получить более полную информацию о процессе (недоступную или сложно измеряемую в эксперименте): подробные поля температуры и скорости, в том числе в пограничных слоях. Целью работы является анализ структуры и поведения КМЦ, определение интегральных характеристик процесса и их зависимостей от угла наклона цилиндра.

## 2. Постановка задачи и математическая модель

Рассматривается конвективное течение жидкого натрия, возникающее в цилиндрической полости, один торец которой нагревается, а другой охлаждается. Расчетная область представляет собой цилиндр с размерами:  $L = D = 0,214$  м (см. Рис. 1а). Угол  $\beta$  — угол отклонения оси цилиндра от вертикали, задает ориентацию полости относительно вектора силы тяжести, поворот цилиндра осуществляется в плоскости  $Oyz$ ,  $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ .

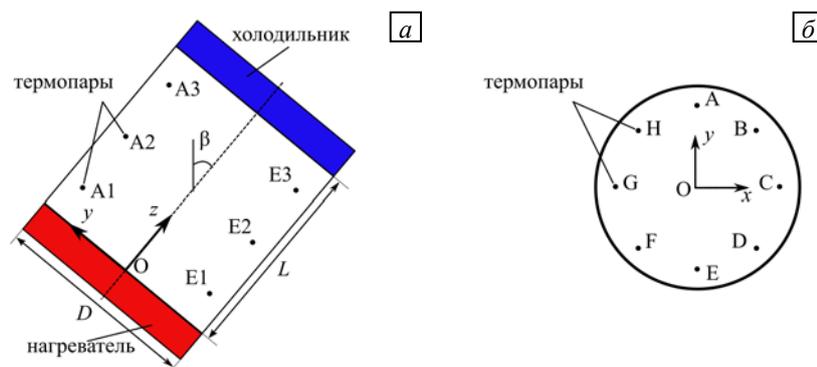


Рис. 1. Схема расчетной области с изображением мест установки термомпар в экспериментах [4]: сечение  $Oyz$  (а); сечение  $Oxy$  (вид со стороны «горячего» торца) (б)

В экспериментах, описанных в [4], температурные измерения выполнялись с помощью 24 термопар, размещенных по три в ряд вдоль образующей цилиндра в 17 мм от боковой поверхности. Места их установки показаны на рисунке 1 (см. буквы А–Н). Термопары ряда осуществляли замеры в трех точках, расположенных по высоте цилиндра на расстоянии 60 мм друг от друга. С помощью метода кросскорреляционного анализа по данным с термопар получались оценки для величины скорости КМЦ.

Параметры расчетов составляли: число Прандтля для натрия  $Pr = 0,0093$ ; кинематическая вязкость  $\nu = 6,17 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ ; коэффициент температурного расширения  $\alpha = 2,56 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$ ; что соответствует средней температуре металла, равной  $140^\circ \text{ С}$  [13]. Боковые стенки считаются теплоизолированными. Для скорости задаются условия прилипания на всех границах. Температуры нижнего и верхнего торцов цилиндра фиксируются на уровне  $153,4$  и  $128,3^\circ \text{ С}$  соответственно, то есть разница температур между ними равняется  $\Delta = 25,1^\circ \text{ С}$ , следовательно, число Релея:  $Ra = \alpha g \Delta L^3 / (\chi \nu) = 1,5 \cdot 10^7$ , где  $\chi$  — коэффициент температуропроводности,  $g$  — ускорение свободного падения. В качестве безразмерной единицы измерения длины выступает высота цилиндра  $L$ , безразмерные температура, скорость и время определяются как  $\tilde{T} = T/\Delta$ ,  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/\sqrt{\alpha g L \Delta}$ ,  $\tilde{t} = t\sqrt{\alpha g L \Delta}/L$ .

Трехмерная математическая модель основана на уравнениях термогравитационной конвекции в приближении Буссинеска. Используется LES подход для моделирования мелкомасштабной турбулентности, а именно модель Смагоринского [14, 15] с константой Смагоринского  $C_s = 0,17$  и турбулентным числом Прандтля  $Pr_t = 0,9$ . Данная модель применяется для описания однородной и изотропной турбулентности, которая в данном случае ожидается в ядре течения. Однако значения турбулентной вязкости, получаемые в соответствии с данной моделью, уменьшаются по мере приближения к границам полости по причине измельчения сетки. Вблизи границ расчетной области в вязком подслое, где турбулентная вязкость должна стремиться к нулю, задействуется демпфирующая функция, предложенная Ван Дристом (Van Driest), которая снижает подсеточную турбулентную вязкость по экспоненциальному закону при приближении к стенкам (в зависимости от значения безразмерного расстояния от стенки  $y^+$ ). Используется пакет программ с открытым исходным кодом OpenFOAM 4.1 [16], в котором дискретизация уравнений проводится по методу конечных объемов. Применяется решатель *buoyantBoussinesqPimpleFoam*. Решение системы уравнений осуществляется согласно алгоритму PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) [17], в котором на каждом шаге по времени сначала по неявной расчетной схеме решается уравнение движения с известным с предыдущего шага полем давления, и затем поля давления и скорости корректируются с учетом уравнения несжимаемости. Сетка содержит совмещенные узлы, то есть значения всех переменных вычисляются в одних и тех же узлах [18]. Слагаемые с производными по времени дискретизируются с помощью неявной схемы Эйлера. Для диффузионных слагаемых применяется схема с центральными разностями (в случае метода конечных объемов эта схема называется *linear*, поскольку подразумевает линейную интерполяцию значений переменных из центров на грани соседних объемов). Конвективные слагаемые вычисляются по схеме *filteredLinear*, предназначенной специально для LES расчетов и обеспечивающей наилучший баланс между их точностью и устойчивостью. Для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), полученной для уравнения коррекции давления, используется метод сопряженных градиентов — Preconditioned Conjugate Gradient (PCG), СЛАУ для остальных переменных решается методом бисопряженных градиентов — Preconditioned Biconjugate Gradient Method (PBiCG) [18, 19].

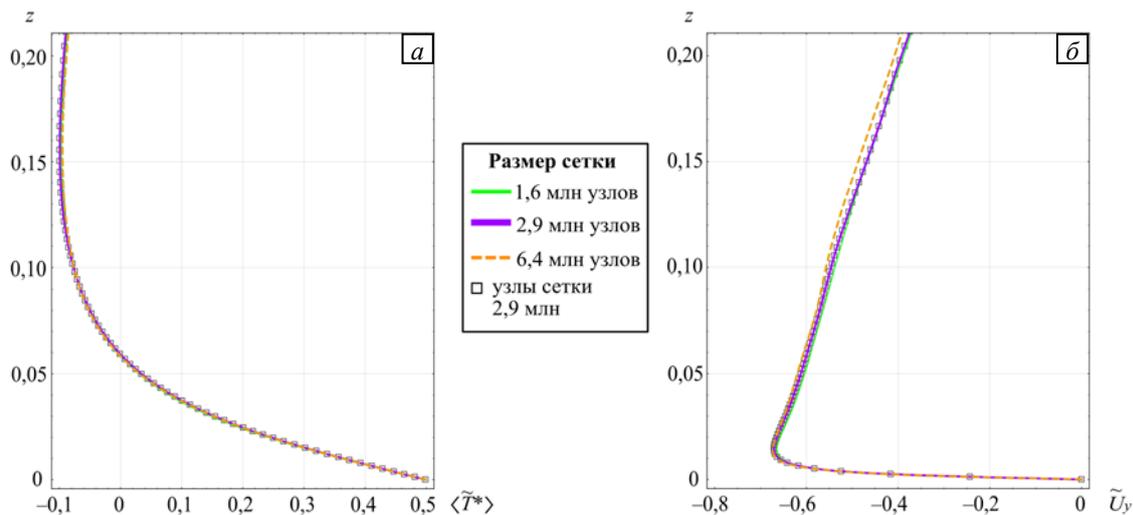
Расчеты выполнены на суперкомпьютере «Тритон» (ИМСС УрО РАН, г. Пермь). Для адекватной оценки средних полей и статистических характеристик пульсаций требовался интервал осреднения длительностью не менее 600 с (или 325 в безразмерных единицах времени). Число Куранта не превышало 0,5.

Проверка сходимости численного решения проводилась на сетках с количеством узлов  $N = 1,6 \cdot 10^6$ ;  $2,9 \cdot 10^6$ ;  $6,4 \cdot 10^6$ . Сравнение интегральных характеристик течения (чисел Нуссельта  $Nu$  и Рейнольдса  $Re$ ), полученных на разных сетках для  $\beta = 40^\circ$ , показало: при  $N = 1,6 \cdot 10^6$  —  $Re = 17100$ ,  $Nu = 11,75$ ; при  $N = 2,9 \cdot 10^6$  —  $Re = 17230$ ,  $Nu = 11,71$ ; при  $N = 6,4 \cdot 10^6$  —  $Re = 17450$ ,  $Nu = 11,67$ .

Для корректного разрешения пограничного слоя распределение узлов задавалось таким образом, чтобы их максимальное число оказалось вблизи стенок цилиндра. Необходимое количество точек сетки в пограничном слое зависит от КМЦ и числа Релея [20–22]. На рисунке 2 для сравнения приведены профили температуры и скорости в пограничном слое вблизи нагревателя вдоль центральной оси цилиндра, полученные в расчетах на разных сетках при  $\beta = 40^\circ$ . Тепловой пограничный слой в данном случае имеет довольно большую толщину, приблизительно 0,10 (21 мм в размерном виде). Основная сложность состоит в разрешении динамического пограничного слоя, толщина которого составляет приблизительно 0,018 (4 мм в размерном виде). Показано, что при вычислениях на выбранной в качестве

основной сетке с  $2,9 \cdot 10^6$  узлами в динамическом пограничном слое находятся не менее 12 точек. Точки этой сетки на рисунках 2а, б обозначены квадратами.

Для дополнительной верификации математической модели на сетке с  $2,9 \cdot 10^6$  узлами рассмотрены два режима конвективного течения в цилиндре с единичным аспектным отношением, исследовавшихся в [5, 10] методом прямого численного моделирования — Direct Numerical Simulation (DNS). В таблице представлены рассчитанные интегральные характеристики течения и их значения из работ [5] и [10]. Авторами [10] применялся код GOLDFISH, реализующий метод конечных объемов, сетка имела  $N = 37,8 \cdot 10^6$  узлов. Различие между результатами данной работы и работы [10] составляет менее 1%. В [5] использовался код Nek5000, основанный на методе спектральных элементов, сетка содержала  $N = 10^{10}$  узлов. Полученные величины отличаются от значений из [5] менее чем на 3%.



**Рис. 2.** Вид осредненных по времени профилей температуры (а) и компоненты скорости  $\tilde{U}_y$  (б) вдоль центральной оси цилиндра в пограничном слое ( $x = y = 0$ ), полученных в расчетах на разных сетках при  $\beta = 40^\circ$

Таблица. Числа Нуссельта и Рейнольдса, полученные в данной работе, в [5] и [10]

Режим	Nu		Re	
	$Pr = 0,1$ , $Ra = 10^6$ , $\beta = 45^\circ$	$\approx 8,56$ [10]	8,56	$\approx 1000$ [10]
$Pr = 0,005$ , $Ra = 10^7$ , $\beta = 0^\circ$	$8,7 \pm 0,7$ [5]	7,14	$20800 \pm 160$ [5]	20440

По полученным данным можно заключить, что выбранная математическая модель и неравномерная блочно-структурированная сетка, насчитывающая  $2,9 \cdot 10^6$  узлов, адекватны для рассматриваемой в данной работе задачи.

### 3. Результаты

Рассмотрены четыре отличающихся качественно режима течения, реализующихся при  $\beta = 0, 20, 40$  и  $70^\circ$ . Представление об общей структуре турбулентного конвективного течения, возникающего в цилиндре, позволяет составить рисунок 3, на котором в виде изоповерхностей изображены характерные распределения мгновенной температуры при различных  $\beta$ . Во всех представленных случаях на фоне турбулентного течения присутствует КМЦ с периодом обращения  $5,4 \div 7,8$ . Наибольшая скорость среднего течения, равная 0,74, соответствует наклону в  $40^\circ$ , а наименьшая — 0,53, наклону в  $70^\circ$ . При вертикальном положении цилиндра наблюдается сложная трехмерная динамика КМЦ, а именно: изменение плоскости выделенного направления вращения, инверсии, низкочастотные колебания угла ориентации. Эти особенности поведения КМЦ позволили выявить анализ ее долговременного поведения, которое подробно изучалось в [4], при этом эксперименты длились 7 часов. При наклонном положении полости в системе появляется выделенное направление, и КМЦ ориентируется вдоль плоскости поворота Оуз. На фоне крупномасштабного течения хорошо различимы мелкомасштабные структуры. При приближении к горизонтальному положению ( $\beta = 70^\circ$ ) среда становится стратифицированной по температуре, и турбулентные пульсации затухают.

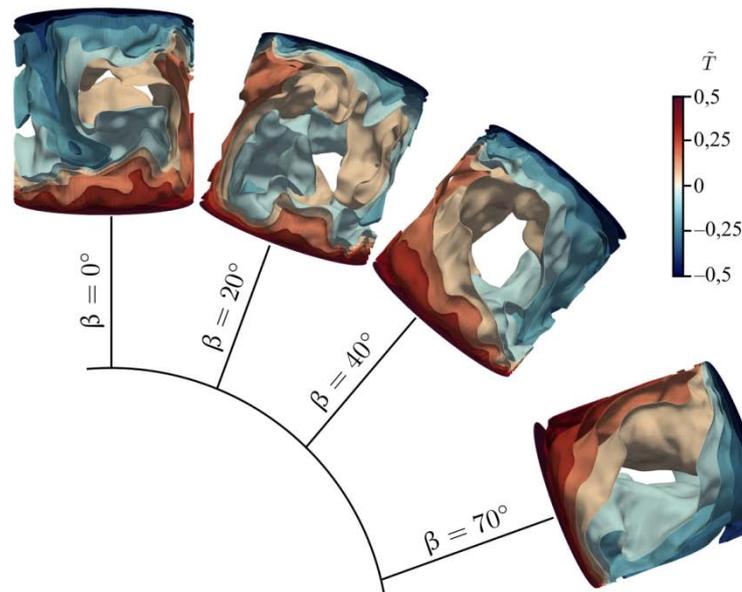


Рис. 3. Изоповерхности мгновенной температуры

Для количественного описания поведения КМЦ по показаниям системы термодатчиков, расположенных по окружности, авторы работы [23] использовали разложение  $T = \bar{T} + \delta \cos(\theta - \theta_0)$ , в котором  $\delta$  характеризует интенсивность КМЦ, а  $\theta_0$  — ориентацию. Эта процедура применялась во многих экспериментальных работах, в том числе в экспериментах [4]. Здесь она задействуется применительно к данным численного моделирования и состоит в следующем. Сначала выбираются точки, в которых в эксперименте были установлены термодатчики. Точки располагаются в трех окружностях, лежащих в плоскостях, параллельных торцам. В каждой окружности находится по 8 равномерно распределенных точек (Рис. 1б). Плоскость, близкая к горячему торцу, считается первой, второй — плоскость в центре, третьей — плоскость около холодного торца. Если в полости формируется КМЦ, то в 8 точках каждой окружности температура будет существенно различаться: в области подъемного течения и опускного течения она, соответственно, будет выше и ниже некоторого среднего значения. Если вычесть это среднее значение, то распределение температуры по азимутальной координате в этих точках можно аппроксимировать первой модой функции косинуса. Ось КМЦ может совершать колебательные движения, что выразится в изменении угла  $\theta_0$ . Мгновенное значение фазы показывает, на какой угол относительно вертикальной плоскости отклоняется ось КМЦ в данный момент. Мгновенное значение амплитуды характеризует наибольший перепад температуры вдоль оси КМЦ в данной плоскости. Таким образом, после проведения процедуры аппроксимации для каждой из трех окружностей становятся известными эволюции амплитуды и фазы. Количественная мера колебания оси КМЦ определяется с помощью Фурье анализа. Если на спектрах есть выраженный пик, то это говорит о наличии доминирующей частоты осцилляций угла ориентации КМЦ.

На рисунке 4 изображена спектральная плотность энергии пульсаций угла  $\theta_0$  для кольца термодатчиков в первой плоскости. Заполненный спектр в широком диапазоне частот говорит о существовании хаотических колебаний. Можно видеть, что при  $\beta = 20^\circ$  на спектре наблюдается доминирующая частота  $f \approx 0,17$  (0,09 Гц в размерном виде), а для  $\beta = 40^\circ$  выделенные частоты отсутствуют. Это позволяет сделать вывод о том, что при умеренном наклоне полости ориентация КМЦ осциллирует с выделенной частотой, но стабилизируется с увеличением  $\beta$ . Экспериментальные данные из [4], приведенные на том же рисунке для  $\beta = 20^\circ$ , демонстрируют пик на близкой частоте. На спектрах, полученных в эксперименте, при наклоне  $40^\circ$  наблюдается слабо выраженный пик на частоте около 0,15–0,17, однако из-за его сравнительно небольшого размера говорить о наличии характерной частоты нельзя. Вейвлет-спектрограммы ориентации  $\theta_0$ , построенные в [4] в дополнение к временным спектрам, подтверждают вывод о том, что выделенная частота осцилляции ориентации КМЦ наблюдается при  $0^\circ \leq \beta \leq 30^\circ$ , но при увеличении наклона до  $40^\circ$  осцилляции  $\theta_0$  затухают.

При  $\beta = 0^\circ$  направление КМЦ непостоянно, поэтому поля скорости и температуры сложно разделить на составляющие — средние и пульсационные. Это возможно сделать с помощью специальных техник выделения КМЦ, см., например, как это выполнено в [5]. Однако в данной работе подобный анализ не проводился, основное внимание уделено здесь изучению структуры течения при отличных от нуля значениях  $\beta$ .

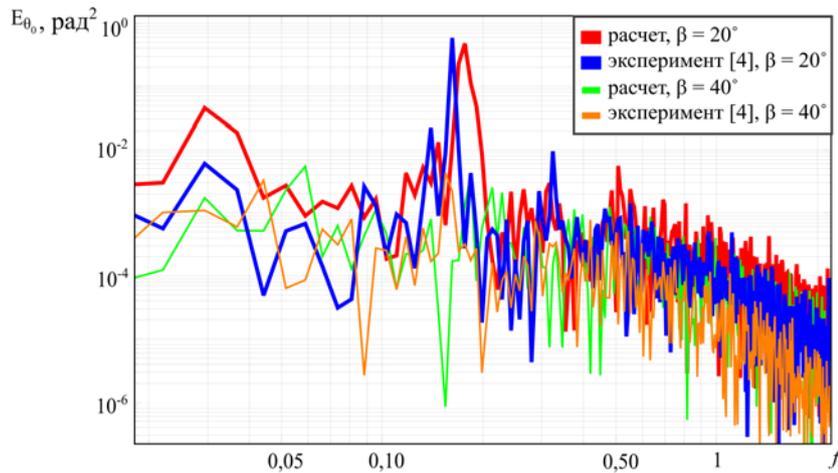


Рис. 4. Спектральная плотность энергии пульсаций угла ориентации КМЦ  $\theta_0$

На рисунке 5 представлены осредненные по времени поля температуры (изображено цветом) и скорости (обозначено стрелками) в 3 ортогональных сечениях для углов наклона 20, 40 и 70°. Как и на рисунке 3, здесь видно присутствие КМЦ в плоскости  $Oyz$ . Среднее течение при  $\beta = 20^\circ$  и  $40^\circ$  имеет похожую структуру, однако следует отметить, что при  $\beta = 20^\circ$ , из-за осцилляций  $\theta_0$ , для получения надежных средних характеристик требуется значительно большее время осреднения по сравнению с  $\beta = 40^\circ$ . В сечении  $Oxz$ , ортогональном плоскости поворота, наблюдаются вторичные течения вблизи стенок полости (Рис. 5б, д). Поля температуры в плоскости  $\{x, y\}$  (Рис. 5в, е) показывают, что восходящий — горячий, и нисходящий — холодный, потоки располагаются вблизи «верхней» и «нижней» боковых стенок цилиндра. Кроме того, хорошо видны вторичные вихри. Существенно отличается течение при  $\beta = 70^\circ$ : среда становится сильно стратифицированной по температуре (Рис. 5ж), а восходящий и нисходящий потоки теперь находятся не у стенок, а сдвигаются от них внутрь цилиндра (Рис. 5и).

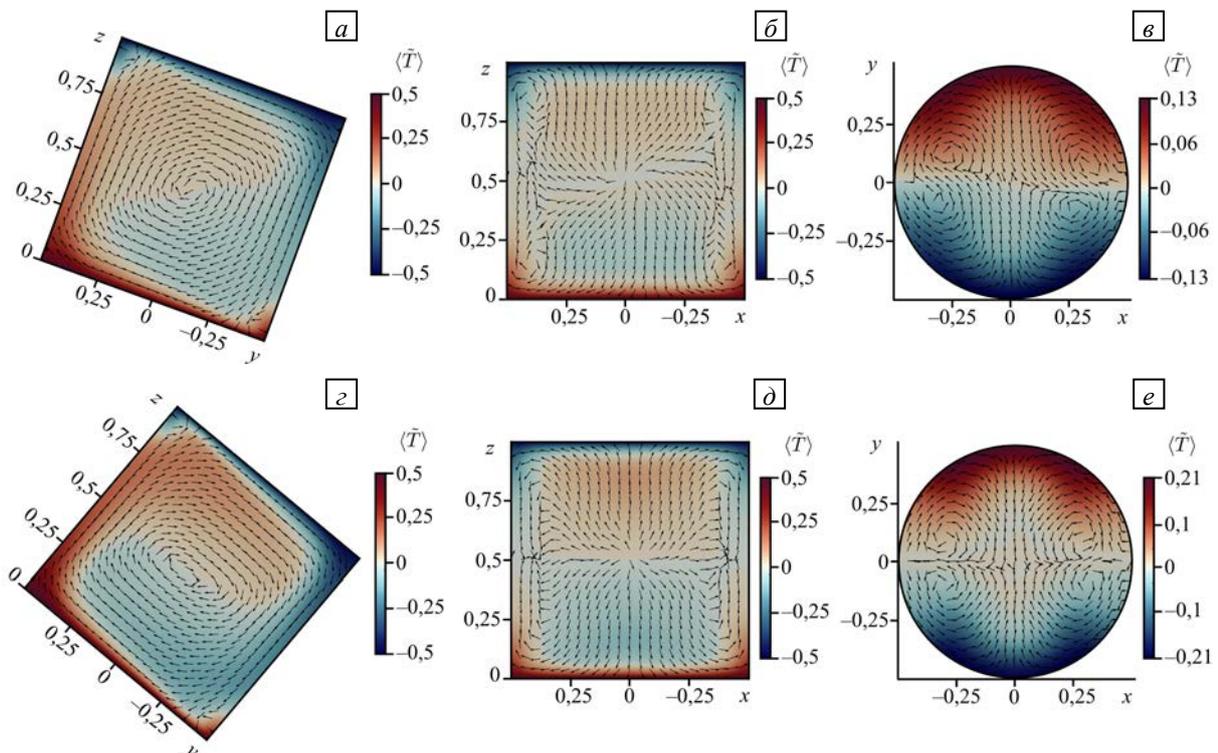


Рис. 5. Поля температуры и скорости, осредненные по времени, в сечениях  $Oyz$  (а, г, ж),  $Oxz$  (б, д, з) и в плоскости  $\{x, y\}$  при  $z = 0,5$  (в, е, и) для углов наклона  $\beta$ , град: 20 (а, б, в), 40 (г, д, е) и 70 (ж, з, и)

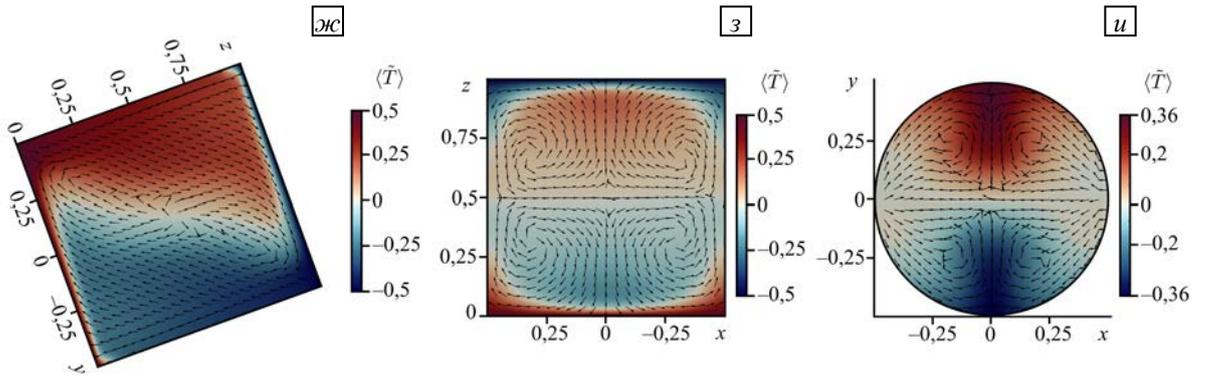


Рис. 5. Продолжение

Поля среднеквадратичного отклонения (СКО) температуры (Рис. 6) свидетельствуют, что наибольшие температурные пульсации наблюдаются при меньших наклонах цилиндра. При всех значениях  $\beta$  области с интенсивными пульсациями сосредоточены вдоль нижнего и верхнего торцов с максимальными значениями вблизи боковых стенок, где встречаются горячий и холодный потоки

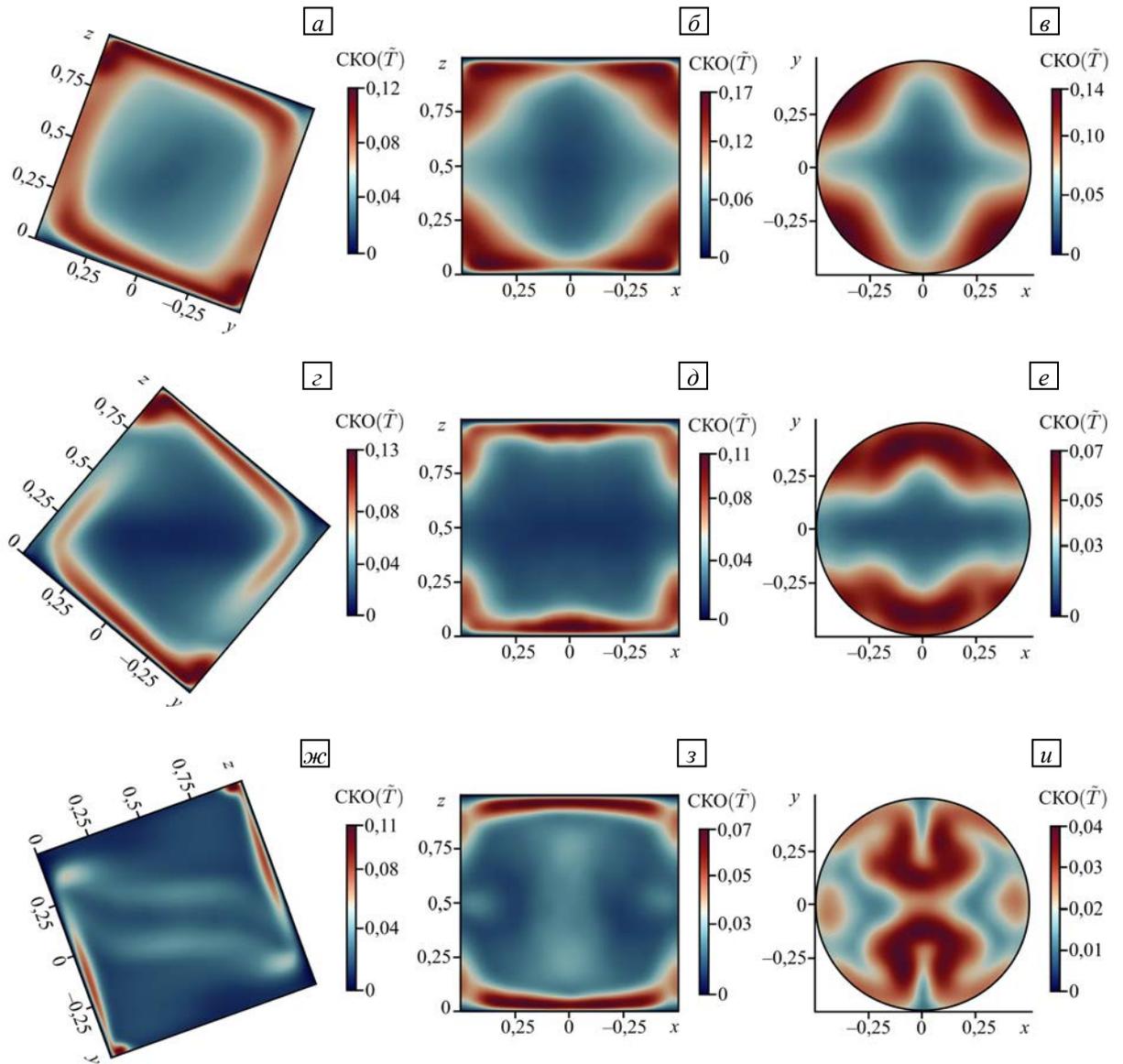
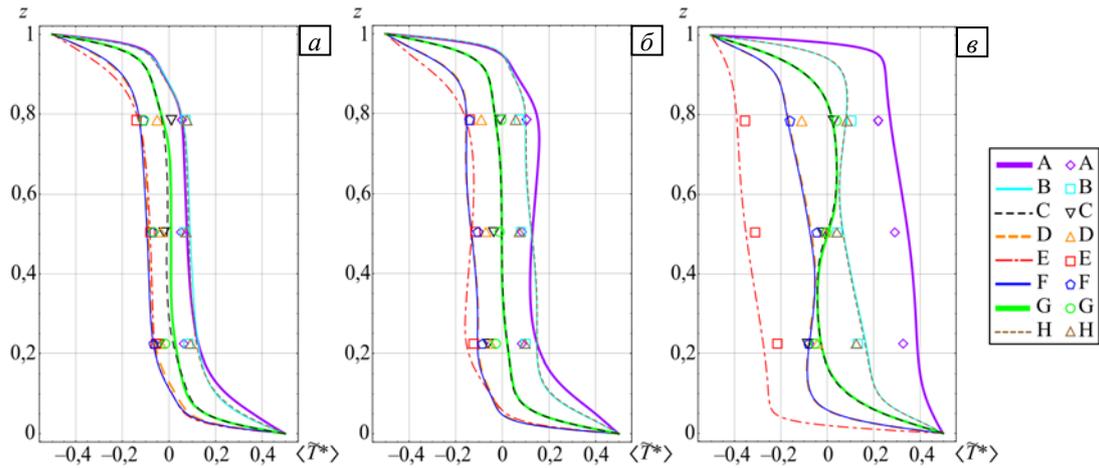


Рис. 6. Поля пульсаций температуры в сечениях  $Ouz$  (а, з, ж),  $Oxz$  (б, д, з) и в плоскости  $\{x, y\}$  при  $z = 0,5$  (в, е, и) для углов наклона  $\beta$ , град: 20 (а, б, в), 40 (з, д, е) и 70 (ж, з, и)



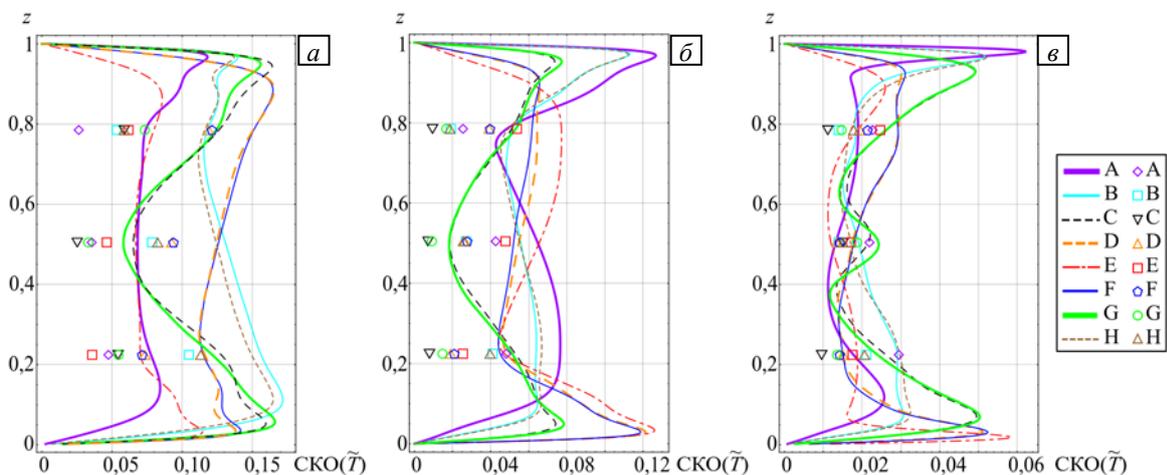
**Рис. 7.** Профили осредненных по времени полей температуры вдоль линий расположения термомпар (см. Рис. 1) при различных значениях  $\beta$ , град: 20 (а), 40 (б) и 70 (е); символами обозначены экспериментальные данные из [4]

жидкости. По мере удаления от стенок цилиндра интенсивность пульсаций снижается, причем тем быстрее, чем значительнее наклон. Также с ростом  $\beta$  пульсации все сильнее локализируются. При наклоне  $20^\circ$  области с интенсивными пульсациями температуры, располагающиеся вдоль боковых стенок полости, занимают гораздо больший объем, чем при наклоне в  $40^\circ$  и, конечно, при  $70^\circ$ . В последнем случае вдоль боковых стенок цилиндра пульсации практически отсутствуют. Рисунок 8а показывает, что при  $\beta = 70^\circ$  распределение пульсаций температуры в плоскости  $\{x, y\}$  при  $z = 0,5$  существенно отличается от такового при меньших наклонах (Рис. 8б, е), однако при этом амплитуда пульсаций оказывается сравнительно небольшой.

На рисунках 7, 8 представлены профили осредненного по времени поля температуры и поля пульсаций температуры вдоль линий, на которых были установлены термомпары (Рис. 1) в экспериментальной установке [4]. Экспериментальные данные также приведены на рисунках. Зависимости температуры от координаты  $z$  построены относительно среднего по объему значения в численном расчете и по всем термомпарам в эксперименте.

Как свидетельствует рисунок 7, при наклоне  $20^\circ$  в области расположения термомпар температура не сильно отклоняется от средней, то есть существенная неоднородность температуры наблюдается только в тепловом пограничном слое, а в ядре течения градиент температуры невелик. С увеличением наклона цилиндра среда становится все более стратифицированной по температуре, что отчетливо видно при сравнении профилей вдоль линий А и Е для разных значений  $\beta$ . Имеет место хорошее соответствие расчетных и экспериментальных (из [4]) данных.

Из рисунка 8, как и из рисунков 6, следует, что максимальные пульсации температуры сосредоточены в тепловом пограничном слое и с ростом угла наклона цилиндра происходит уменьшение амплитуды пульсаций. Уровень пульсаций температуры в расчете оказывается выше уровней,



**Рис. 8.** Профили пульсаций температуры вдоль линий расположения термомпар (см. Рис. 1) при различных значениях  $\beta$ , град: 20 (а), 40 (б) и 70 (е); символами обозначены экспериментальные данные из [4]

измеренных в эксперименте. Похожая тенденция отмечается и в работе [6], где также рассматривалась турбулентная конвекция натрия в наклонном цилиндре, но с аспектным отношением  $\Gamma = 5$ . При этом хорошо заметно, что в области максимальных пульсаций в экспериментах [4] термопары отсутствуют, то есть в тех точках, где возможны сравнения, общий уровень пульсаций низок.

В экспериментальном исследовании [4] при помощи кросскорреляционного метода [4, 11] оценена средняя скорость жидкого металла между соседними термопарами вдоль линий А и Е. Данные обозначены на рисунке 9 символами и приведены вместе с профилями осредненной по времени скорости  $\tilde{U}_z$ , полученными на основании численных расчетов. Как и на рисунке 5, здесь прослеживается изменение структуры течения с ростом угла наклона цилиндра: для  $20^\circ$  и  $40^\circ$  кривые похожи, в то время как для  $\beta = 70^\circ$  структура оказывается отличной от остальных. Хотя применяемый в эксперименте кросскорреляционный метод дает статистическую оценку скорости в областях между парами соседних термопар, в данном случае его точность оказывается достаточно высокой, что подтверждается наличием хорошего соответствия экспериментальных оценок из [4] и результатов расчета.

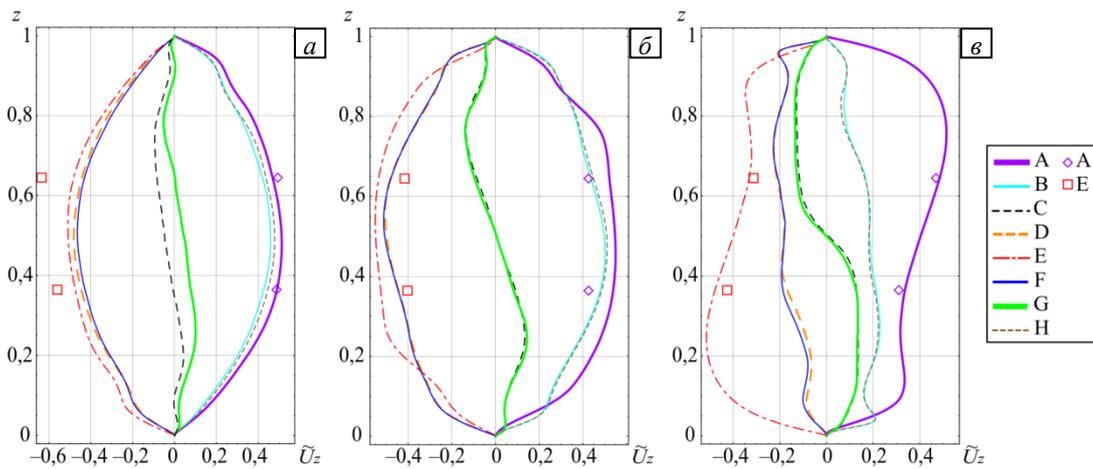


Рис. 9. Профили осредненных по времени полей скорости вдоль линий расположения термопар (см. Рис. 1) при различных значениях  $\beta$ , град: 20 (а), 40 (б) и 70 (в); символами обозначены экспериментальные данные из [4]

Важными интегральными характеристиками конвективных процессов, описывающими интенсивность течения и эффективный перенос тепла, являются числа Рейнольдса  $Re$  и Нуссельта  $Nu$ . В отличие от экспериментальных исследований, где доступны результаты измерений лишь в отдельных точках, при математическом моделировании для вычисления значений  $Re$  и  $Nu$  может использоваться информация о полях скорости и температуры во всей расчетной области.

Для того чтобы разделить вклады в кинетическую энергию конвективного течения КМЦ и турбулентных пульсаций, поле скорости может быть представлено в виде двух частей:  $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$ , где  $\mathbf{U} = \langle \mathbf{v} \rangle_t$  — вектор средней скорости,  $\mathbf{u}' = \mathbf{v} - \mathbf{U}$  — вектор пульсации скорости, а  $\langle \cdot \rangle_t$  означает осреднение по времени. Тогда полное число Рейнольдса запишется как

$$Re_{tot} = \sqrt{\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle} L / \nu,$$

а два дополнительных числа: «крупномасштабное» —  $Re_U$  (характеристика среднего течения), и «мелкомасштабное» —  $Re_u$  (характеристика мелкомасштабной турбулентности), будут определяться по формулам:

$$Re_U = \sqrt{\langle \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \rangle} L / \nu, \quad Re_u = \sqrt{\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' \rangle} L / \nu.$$

Здесь  $\langle \cdot \rangle$  означает осреднение по времени и всему объему.

Зависимости чисел Рейнольдса от угла наклона цилиндра представлены на рисунке 10а. Для случая  $\beta = 0^\circ$  вычислялось только  $Re_{tot}$ . Как уже отмечалось ранее, направление КМЦ в этом случае непостоянно, поэтому разделение на  $Re_U$  и  $Re_u$  не проводилось. Из рисунка следует, что  $Re_{tot}$  растет при наклоне от 0 до  $20^\circ$  (на 8%) и достигает максимального значения, а затем, с увеличением  $\beta$ , уменьшается.

Число Рейнольдса для среднего течения  $Re_U$  при переходе от  $20^\circ$  к  $40^\circ$  демонстрирует рост на 10% и имеет максимум при наклоне  $40^\circ$ , но далее падает до минимального значения при  $\beta = 70^\circ$ . При этом по убывающему с ростом наклона значению  $Re_u$  можно видеть монотонное снижение уровня пульсаций с увеличением наклона.

Число Нуссельта определяется как [1]

$$Nu(z) \equiv \frac{\langle v_z T \rangle_z - \chi \partial_z \langle T \rangle_z}{\chi \Delta L^{-1}},$$

где  $\langle \cdot \rangle_z$  означает осреднение по любой поверхности  $z = \text{const}$  и по времени.

На рисунке 10б представлена зависимость относительного числа Нуссельта  $Nu(\beta)/Nu(0)$  от угла наклона цилиндра. При вертикальном положении полости число Нуссельта, по данным расчета, составляет  $Nu(0) = 9,27$ , и это значение является наименьшим. С ростом угла наклона от  $0^\circ$  до  $40^\circ$  число Нуссельта растет, что говорит об увеличении интенсивности теплового потока. При  $\beta = 40^\circ$  и  $70^\circ$  значения  $Nu$  близки друг к другу и превышают  $Nu(0)$  на 26% и 25% соответственно. Расчеты выполнены только для четырех значений  $\beta$ , поэтому информации для того, чтобы судить о характере зависимости  $Nu$  от  $\beta$ , недостаточно.

В экспериментах [4] измерения проводились с шагом по  $\beta$ , равным  $10^\circ$ . На соответствующей кривой наблюдается монотонное возрастание  $Nu$  с увеличением угла наклона до  $\beta = 70^\circ$ , после чего его величина начинает снижаться с дальнейшим ростом наклона. Расчетные значения  $Nu$  оказываются выше, чем в эксперименте, особенно в случае  $\beta = 40^\circ$ . Расхождение численных и экспериментальных данных на рисунке 10б, возможно, обусловлено неидеальным совпадением в расчетах и экспериментах граничных условий и физических параметров среды.

На рисунке 10б также приведены данные DNS расчета из [10] со значениями управляющих параметров  $Pr = 0,1$  и  $Ra = 10^6$ . Для этого режима течения значение числа Рейнольдса значительно меньше значений, соответствующих режиму, который рассматривается в данной работе, однако в этом случае произведение чисел Релея и Прандтля составляет  $Ra Pr = 10^5$ , что сопоставимо с  $Ra Pr = 1,4 \cdot 10^5$  для анализируемого режима течения. Зависимость  $Nu$  от  $\beta$ , полученная в [10], отличается от таковой в экспериментах [4]. Максимальная интенсивность теплового потока наблюдается при  $\beta = 54^\circ$ . Значения в точках  $45^\circ$  и  $72^\circ$  близки друг к другу так же, как близки значения относительного числа  $Nu$ , полученные в данной работе для  $\beta = 40^\circ$  и  $\beta = 70^\circ$ .

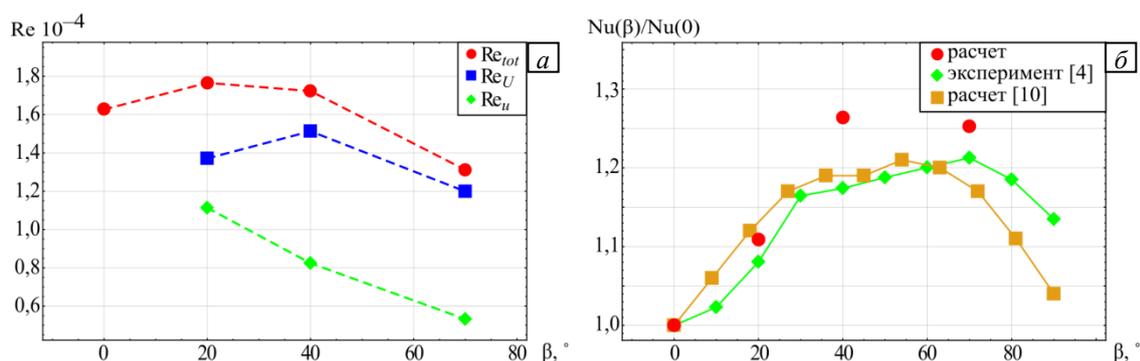


Рис. 10. Зависимости числа Рейнольдса (а) и относительного числа Нуссельта  $Nu(\beta)/Nu(0)$  (б) от угла наклона цилиндра

#### 4. Выводы

Численно исследована турбулентная конвекция жидкого натрия в наклонном цилиндре с единичным аспектным отношением при числе Релея  $1,5 \cdot 10^7$ . Параметры расчетов выбирались в соответствии с параметрами экспериментов, описанных в [4]. Получены трехмерные поля скорости и температуры, а также интегральные характеристики процесса для четырех качественно отличающихся режимов течения, реализующихся при наклонах  $\beta = 0, 20, 40, 70^\circ$ .

Показано, что структура течения существенно зависит от величины  $\beta$ . В цилиндре возникает КМЦ с периодом обращения от 5,4 при  $\beta = 40^\circ$  до 7,8 при  $\beta = 70^\circ$ . При умеренном наклоне полости ( $\beta = 20^\circ$ ) наблюдается доминирующая частота осцилляций угла ориентации КМЦ. Значение доминирующей частоты пульсаций угла ориентации КМЦ  $f \approx 0,17$  согласуется с экспериментом. При увеличении наклона до  $40^\circ$  течение стабилизируется, доминирующая частота у КМЦ отсутствует.

Наибольшие температурные пульсации наблюдаются при малых наклонах цилиндра. Области с интенсивными пульсациями при всех  $\beta$  сосредоточены у нижнего и верхнего торцов, а максимальные значения пульсаций расположены вблизи боковых стенок, где встречаются горячий и холодный потоки жидкости. По мере удаления от стенок цилиндра интенсивность пульсаций снижается, причем тем быстрее, чем больше угол наклона. Также с ростом  $\beta$  пульсации все сильнее локализируются. В экспериментальном исследовании [4] в данных областях термопары отсутствовали, таким образом, некоторые особенности процесса оказались недоступными для анализа.

Число Рейнольдса, характеризующее полную энергию течения, достигает максимума при  $\beta = 20^\circ$ , а затем, с последующим увеличением  $\beta$ , уменьшается. Среднее течение, описываемое числом  $Re_U$ , имеет максимальную интенсивность при  $\beta = 40^\circ$ . Интенсивность пульсаций скорости, представляемых числом  $Re_u$ , монотонно убывает с увеличением угла наклона полости.

В случае конвекции жидких металлов в длинных цилиндрах ( $\Gamma = 5$ ,  $\Gamma = 20$ ), как показано в [6, 8, 11] число Нуссельта в основном определяется интенсивностью КМЦ, а относительное значение числа Нуссельта при  $\beta = 45^\circ$  составляет  $\approx 8$  для  $\Gamma = 20$  [8] и  $\approx 1,52 \div 2,1$  для  $\Gamma = 5$  [6, 11]. В коротком цилиндре поток тепла при наклоне увеличивается не так существенно, как в длинных цилиндрах. В случае  $\Gamma = 1$  при  $\beta = 40^\circ$  относительное число Нуссельта составляет 1,26.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00459-а).

## Литература

1. Ahlers G., Grossmann S., Lohse D. Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Benard convection // Rev. Mod. Phys. 2009. Vol. 81, no. 2. P. 503-537. [DOI](#)
2. Chilla F., Schumacher J. New perspectives in turbulent Rayleigh-Benard convection // Eur. Phys. J. E. 2012. Vol. 35, no. 7. 58. [DOI](#)
3. Kolesnichenko I., Khalilov R., Teimurazov A., Frick P. On boundary conditions in liquid sodium convective experiments // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. Vol. 891, no. 1. 012075. [DOI](#)
4. Khalilov R., Kolesnichenko I., Pavlinov A., Mamykin A., Shestakov A., Frick P. Thermal convection of liquid sodium in inclined cylinders // Phys. Rev. Fluids. 2018. Vol. 3, no. 4. 043503. [DOI](#)
5. Scheel J.D., Schumacher J. Predicting transition ranges to fully turbulent viscous boundary layers in low Prandtl number convection flows // Phys. Rev. Fluids. 2017. Vol. 2, no. 12. 123501. [DOI](#)
6. Teimurazov A., Frick P. Thermal convection of liquid metal in a long inclined cylinder // Phys. Rev. Fluids. 2017. Vol. 2, no. 11. 113501. [DOI](#)
7. Frick P., Khalilov R., Kolesnichenko I., Mamykin A., Pakholkov V., Pavlinov A., Rogozhkin S. Turbulent convective heat transfer in a long cylinder with liquid sodium // Europhys. Lett. 2015. Vol. 109, no. 1. 14002. [DOI](#)
8. Васильев А.Ю., Колесниченко И.В., Мамыкин А.Д., Фрик П.Г., Халилов Р.И., Рогожкин С.А., Пахолков В.В. Турбулентный конвективный теплообмен в наклонной трубе, заполненной натрием // ЖТФ. 2015. Т. 85, вып. 9. С. 45-49. (English version [DOI](#))
9. Guo S.-X., Zhou S.-Q., Cen X.-R., Qu L., Lu Y.-Z., Sun L., Shang X.-D. The effect of cell tilting on turbulent thermal convection in a rectangular cell // J. Fluid Mech. 2014. Vol. 762. P. 273-287. [DOI](#)
10. Shishkina O., Horn S. Thermal convection in inclined cylindrical containers // J. Fluid Mech. 2016. Vol. 790. R3. [DOI](#)
11. Колесниченко И.В., Мамыкин А.Д., Павлинов А.М., Пахолков В.В., Рогожкин С.А., Фрик П.Г., Халилов Р.И., Шепелев С.Ф. Экспериментальное исследование свободной конвекции натрия в длинном цилиндре // Теплоэнергетика. 2015. № 6. С. 31-39. (English version [DOI](#))
12. Zwirner L., Shishkina O. Confined inclined thermal convection in low-Prandtl-number fluids // J. Fluid Mech. 2018. Vol. 850. P. 984-1008. [DOI](#)
13. Кириллов П.Л., Денискина Н.Б. Теплофизические свойства жидкометаллических теплоносителей (справочные таблицы и соотношения). ЦНИИАтоминформ, 2000. 42 с.
14. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment // Mon. Weather Rev. 1963. Vol. 91. P. 99-164. [DOI](#)
15. Deardorff J.W. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers // J. Fluid Mech. 1970. Vol. 41. P. 453-480. [DOI](#)
16. Weller H.G., Tabor G., Jasak H., Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques // Comput. Phys. 1998. Vol. 12. P. 620-631. [DOI](#)
17. Issa R. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // J. Comput. Phys. 1986. Vol. 62, no. 1. P. 40-65. [DOI](#)
18. Ferziger J.H., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer, 2002. 423 p.

19. Fletcher R. Conjugate gradient methods for indefinite systems // Numerical Analysis. Lecture Notes in Mathematics, vol. 506 / Ed. G.A. Watson. Springer, 1976. P. 73-89. [DOI](#)
20. Verzicco R., Camussi R. Numerical experiments on strongly turbulent thermal convection in a slender cylindrical cell // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 477. P. 19-49. [DOI](#)
21. Stevens R.J.A.M., Verzicco R., Lohse D. Radial boundary layer structure and Nusselt number in Rayleigh-Benard convection // J. Fluid Mech. 2010. Vol. 643. P. 495-507. [DOI](#)
22. Shishkina O., Stevens R.J.A.M., Grossmann S., Lohse D. Boundary layer structure in turbulent thermal convection and its consequences for the required numerical resolution // New J. Phys. 2010. Vol. 12, no. 7. 075022. [DOI](#)
23. Cioni S., Ciliberto S., Sommeria J. Strongly turbulent Rayleigh-Benard convection in mercury: comparison with results at moderate Prandtl number // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 335. P. 111-140. [DOI](#)

## References

1. Ahlers G., Grossmann S., Lohse D. Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Benard convection. *Rev. Mod. Phys.*, 2009, vol. 81, no. 2, pp. 503-537. [DOI](#)
2. Chilla F., Schumacher J. New perspectives in turbulent Rayleigh-Benard convection. *Eur. Phys. J. E*, 2012, vol. 35, no. 7, 58. [DOI](#)
3. Kolesnichenko I., Khalilov R., Teimurazov A., Frick P. On boundary conditions in liquid sodium convective experiments. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2017, vol. 891, no. 1, 012075. [DOI](#)
4. Khalilov R., Kolesnichenko I., Pavlinov A., Mamykin A., Shestakov A., Frick P. Thermal convection of liquid sodium in inclined cylinders. *Phys. Rev. Fluids*, 2018, vol. 3, no. 4, 043503. [DOI](#)
5. Scheel J.D., Schumacher J. Predicting transition ranges to fully turbulent viscous boundary layers in low Prandtl number convection flows. *Phys. Rev. Fluids*, 2017, vol. 2, no. 12, 123501. [DOI](#)
6. Teimurazov A., Frick P. Thermal convection of liquid metal in a long inclined cylinder. *Phys. Rev. Fluids*, 2017, vol. 2, no. 11, 113501. [DOI](#)
7. Frick P., Khalilov R., Kolesnichenko I., Mamykin A., Pakholkov V., Pavlinov A., Rogozhkin S. Turbulent convective heat transfer in a long cylinder with liquid sodium. *Europhys. Lett.*, 2015, vol. 109, no. 1, 14002. [DOI](#)
8. Vasil'ev A.Y., Kolesnichenko I.V., Mamykin A.D., Frick P.G., Khalilov R.I., Rogozhkin S.A., Pakholkov V.V. Turbulent convective heat transfer in an inclined tube filled with sodium. *Tech. Phys.*, 2015, vol. 60, no. 9, pp. 1305-1309. [DOI](#)
9. Guo S.-X., Zhou S.-Q., Cen X.-R., Qu L., Lu Y.-Z., Sun L., Shang X.-D. The effect of cell tilting on turbulent thermal convection in a rectangular cell. *J. Fluid Mech.*, 2014, vol. 762, pp. 273-287. [DOI](#)
10. Shishkina O., Horn S. Thermal convection in inclined cylindrical containers. *J. Fluid Mech.*, 2016, vol. 790, R3. [DOI](#)
11. Kolesnichenko I.V., Mamykin A.D., Pavlinov A.M., Pakholkov V.V., Rogozhkin S.A., Frick P.G., Khalilov R.I., Shepelev S.F. Experimental study on free convection of sodium in a long cylinder. *Therm. Eng.*, 2015, vol. 62, no. 6, pp. 414-422. [DOI](#)
12. Zwirner L., Shishkina O. Confined inclined thermal convection in low-Prandtl-number fluids. *J. Fluid Mech.*, 2018, vol. 850, pp. 984-1008. [DOI](#)
13. Kirillov P.L., Deniskina N.B. *Teplofizicheskiye svoystva zhidkometallicheskih teplonositeley (spravochnyye tablitsy i sootnosheniya)*. TsNIIAtominform, 2000. 42 p.
14. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment. *Mon. Weather Rev.*, 1963, vol. 91, pp. 99-164. [DOI](#)
15. Deardorff J.W. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 41, pp. 453-480. [DOI](#)
16. Weller H.G., Tabor G., Jasak H., Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. *Comput. Phys.*, 1998, vol. 12, pp. 620-631. [DOI](#)
17. Issa R. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *J. Comput. Phys.*, 1986, vol. 62, no. 1, pp. 40-65. [DOI](#)
18. Ferziger J.H., Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2002. 423 p.
19. Fletcher R. Conjugate gradient methods for indefinite systems. *Numerical Analysis. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 506, ed. G.A. Watson. Springer, 1976. Pp. 73-89. [DOI](#)
20. Verzicco R., Camussi R. Numerical experiments on strongly turbulent thermal convection in a slender cylindrical cell. *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 477, pp. 19-49. [DOI](#)
21. Stevens R.J.A.M., Verzicco R., Lohse D. Radial boundary layer structure and Nusselt number in Rayleigh-Benard convection. *J. Fluid Mech.*, 2010, vol. 643, pp. 495-507. [DOI](#)
22. Shishkina O., Stevens R.J.A.M., Grossmann S., Lohse D. Boundary layer structure in turbulent thermal convection and its consequences for the required numerical resolution. *New J. Phys.*, 2010, vol. 12, no. 7, 075022. [DOI](#)
23. Cioni S., Ciliberto S., Sommeria J. Strongly turbulent Rayleigh-Benard convection in mercury: comparison with results at moderate Prandtl number. *J. Fluid Mech.*, 1997, vol. 335, pp. 111-140. [DOI](#)

Поступила в редакцию 11.10.2018, после доработки 02.11.2018; принята к опубликованию 02.11.2018

## Сведения об авторах

Мандрыкин Сергей Дмитриевич, асп., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: msd@icmm.ru

Теймуразов Андрей Сергеевич, кфмн., нс, ИМСС УрО РАН; e-mail: tas@icmm.ru