

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.4.30](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.30)

УДК 534.1, 539.3

ВЛИЯНИЕ ПОВРЕЖДЕННОСТИ МАТЕРИАЛА НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ МАГНИТОУПРУГОЙ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ

В.И. Ерофеев, А.В. Леонтьева, А.О. Мальханов

*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук», Нижний Новгород, Россия*

В настоящее время интенсивно развивается механика поврежденных сред, изучающая как напряженно-деформированное состояние конструкций, так и накопление повреждений в их материалах. При этом в ряде задач необходимо учитывать, что элементы конструкций работают в условиях взаимодействия с внешним магнитным полем, которое оказывает влияние на процессы формирования и распространения упругих волн. В публикуемой работе для электропроводящего стержня, совершающего продольные колебания, сформулирована самосогласованная система, включающая в себя уравнение динамики стержня, уравнение изменения напряженности внешнего магнитного поля и кинетическое уравнение накопления повреждений в материале. При этом считается, что повреждения равномерно распределены в материале стержня, магнитное поле стационарно. В качестве модели стержня выбрана классическая модель однородного стержня Бернулли. Последовательно рассмотрены: линеаризованная система и система уравнений, включающая геометрическую и физическую упругие нелинейности. В первом случае показано, что волны, описываемые соответствующей системой, обладают дисперсией и затуханием вследствие двух типов диссипации, из которых один вызван поврежденностью материала, а другой – магнитным полем. Во втором случае получено эволюционное уравнение относительно функции продольной деформации, обобщающее известное в нелинейной волновой динамике уравнение Бюргерса. Найдено и проанализировано его приближенное решение, которое в зависимости от соотношения в материале параметров поврежденности и проводимости позволяет оценить возможность существования стационарных волн, сохраняющих свою форму и скорость в процессе распространения в пространстве. Также рассмотрены предельные случаи эволюционного уравнения, то есть при отсутствии проводимости электромагнитного поля и поврежденности в материале, для которых получены точные решения стационарного профиля.

Ключевые слова: продольная деформация, нелинейно-упругий стержень, поврежденность материала, магнитное поле, эволюционное уравнение, обобщенное уравнение Бюргерса, асимптотическое решение.

INFLUENCE OF MATERIAL DAMAGE ON PROPAGATION OF A LONGITUDINAL MAGNETOELASTIC WAVE IN A ROD

V.I. Erofeev, A.V. Leonteva and A.O. Malkhanov

Mechanical Engineering Research Institute of Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia

At present, continuum damage mechanics is in good progress, studying both the stress-strain state of structures and the accumulation of damages in their materials. Treatment of a number of problems is associated with the necessity of taking into account the fact that structural elements operate under the action of external magnetic field, which affects the formation and propagation of elastic waves. In this work, for an electrically conducting rod performing longitudinal oscillations, we formulate a self-consistent system, which includes the equation of rod dynamics, the equation of variation of the external magnetic field strength, and the kinetic equation of accumulation of damage in the material of the rod. Here we assume that damage is uniformly distributed in the rod material, the magnetic field is stationary and use the classical model of the homogeneous Bernoulli rod as the rod model. The linearized system and the system of equations, including geometrical and physical elastic nonlinearities, are considered sequentially. In the first case, it is shown that the characteristic features of the waves described by this system are the dispersion and frequency-dependent damping due to the presence of two types of dissipation, one of which is caused by damage of the material and the other by a magnetic field. In the second case, an evolution equation for the function of longitudinal deformation is derived as a generalization to the Burgers equation. Its approximate solution is found and analyzed. Depending on the ratio of the damage to conductivity parameters it allows us to estimate the possibility of the existence of stationary waves that retain their shape and velocity during propagation in space. Moreover, the limiting cases of the evolution equation are considered, in particular, in the absence of conductivity of the electromagnetic field and damage in the material. For these cases exact solutions of the stationary profile are obtained.

Key words: longitudinal deformation, nonlinear elastic rod, material damage, magnetic field, evolution equation, generalized Burgers equation, asymptotic solution.

1. Введение

Механика поврежденного континуума интенсивно развивается, начиная с основополагающих работ Л.М. Качанова и Ю.Н. Работнова, обобщенных в монографиях [1] и [2]. Ценность их результатов, признанных ныне классическими, заключается в возможности применения единой схемы представления поврежденности для описания процессов как в упругих, так и упругопластических телах. Под поврежденностью понимается уменьшение в теле вследствие сокращения эффективной площади, передающей внутренние усилия от одной части тела к другой, упругого отклика, обусловленного появлением и развитием рассеянного поля микродефектов (микротрещин в упругом материале, дислокаций в пластическом, микропор при ползучести, поверхностных микротрещин при усталости) [3].

Не измеряемая непосредственно (как, например, скорость, сила или температура) поврежденность, то есть деградация механических свойств тела, может быть обнаружена в результате анализа реакции тела на различные внешние воздействия. Согласно экспериментальной практике наличие поля повреждений в материалах может быть косвенно обнаружено и отчасти количественно представлено через снижение скорости прохождения ультразвукового сигнала [4–6], через уменьшение величин таких характеристик как модуль Юнга («дефект модуля») [7], плотность («разрыхление») [8], твердость [9], амплитуда напряжений при циклическом испытании [10, 11], через ускорение процесса ползучести в третьей стадии [12]. В традиционных расчетах за меру повреждаемости при развитии деформации принимается скалярный параметр $\psi(x, t)$, характеризующий относительную плотность равномерно рассеянных в единице объема микродефектов. Его значение равно нулю, когда повреждений нет, и близко к единице в момент разрушения.

Характеристики процесса накопления повреждений в материале исследуемой конструкции рассчитываются путем последовательного решения на каждом этапе нагружения кинетического уравнения повреждаемости. Исследование накопления повреждений в элементе конструкции продолжается до достижения параметром $\psi(x, t)$ заданного предельного значения, близкого к единице.

Как правило, в механике деформируемого твердого тела задачи динамики рассматривают отдельно от задач накопления повреждений. При разработке предназначенных для их решения методов принято заранее постулировать, что скорость упругой волны является заданной функцией поврежденности, а затем экспериментально определять коэффициенты пропорциональности. Фазовая скорость волны и ее затухание считаются обычно степенными функциями частоты и линейными функциями поврежденности [13]. При несомненных достоинствах (простоте) такой подход, как и любой другой, не опирающийся на математические модели процессов и систем, обладает целым рядом недостатков. Авторы работ [14–16] считают задачу самосогласованной, которая, кроме уравнения развития поврежденности, включает в себя, динамическое уравнение теории упругости.

Заметим, что в ряде задач для элементов конструкций необходимо учитывать работу в условиях взаимодействия с внешним магнитным полем, которое оказывает влияние на процесс формирования и продвижения в них упругих волн [17–20].

Далее будем рассматривать распространение продольных волн в однородном, нелинейно-упругом стержне, находящемся во внешнем магнитном поле, а также учтем наличие поврежденности в материале стержня. Для описания движения продольных волн в стержне выберем классическое нелинейное уравнение Бернулли [21].

2. Уравнения магнитоупругости

Система уравнений для стержня Бернулли, находящегося в магнитном поле, с учетом поврежденности его материала имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left(1 + \frac{\alpha_0}{E} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{H_0}{4\pi\rho} \frac{\partial h}{\partial x} - \beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha \psi - \beta_2 E \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

где $u(x, t)$ — перемещение частиц на срединной линии стержня, $h(x, t)$ — напряженность магнитного поля, $\psi(x, t)$ — скалярная функция, характеризующая относительную плотность равномерно рассеянных в единице объема микродефектов, $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ — скорость распространения продольной волны в отсутствие магнитного поля, E — модуль Юнга, ρ — плотность материала, α_0 — коэффициент упругой нелинейности (для большинства металлов и сплавов $\alpha_0 < 0$, $\alpha_0 > 0$ для многих композитов), H_0 — напряженность внешнего магнитного поля, c — скорость света в вакууме, σ — электрическая проводимость, $\alpha = 1/\tau_*$, β_1 , β_2 — постоянные параметры, характеризующие поврежденность материала и связь циклических процессов с процессами накопления повреждений, τ_* — время релаксации.

При записи системы уравнений (1)–(3) принято во внимание, что суммарное магнитное поле состоит из его постоянного значения и возмущений, появляющихся в результате взаимодействия с полем деформаций:

$$\mathbf{H} = H_0 \mathbf{n} + \mathbf{h},$$

где \mathbf{n} — вектор нормали, \mathbf{h} — малое возмущение магнитного поля. Считается также, что внешнее постоянное магнитное поле с напряженностью H_0 перпендикулярно направлению распространения волны. В этом случае для продольных волн в стержне выполняются соотношения:

$$\mathbf{u} = (u_1, 0, 0) \equiv u(x, t), \quad \mathbf{h} = (0, 0, h_3) \equiv h(x, t), \quad \mathbf{H} = (0, 0, H_0 + h).$$

Если магнитное поле стационарно ($\partial h / \partial t = 0$), систему уравнений (1)–(3) можно свести к одному уравнению относительно перемещения:

$$\left(1 + \frac{H_0^2 \sigma}{c^2 \rho \alpha}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left(1 + \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_0^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{H_0^2 \sigma}{c^2 \rho} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{c_0^2 \alpha_0}{E} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c_0^2 \alpha_0}{\alpha E} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (4)$$

Для удобства анализа зависимостей введем безразмерные величины для продольного перемещения, координаты и времени, соответственно, $U = u/u_0$, $z = x/X$, $\tau = t/T$. Уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_1 \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - a_3 \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - a_4 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (5)$$

где a_i — безразмерные комплексы:

$$a_1 = \frac{H_0^2 \sigma}{c^2 \rho \alpha} \frac{1}{\left(1 + \frac{H_0^2 \sigma}{c^2 \rho \alpha}\right)^2}, \quad a_2 = \left(1 + \frac{H_0^2 \sigma}{c^2 \rho \alpha}\right) \frac{1}{1 + \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_0^2}}, \quad a_3 = \frac{\alpha_0 u_0 \alpha}{c_0 E} \left(\frac{1 + \frac{H_0^2 \sigma}{c^2 \rho \alpha}}{1 + \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_0^2}} \right)^{3/2}, \quad a_4 = \frac{\alpha_0 u_0 \alpha}{c_0 E} \frac{\left(1 + \frac{H_0^2 \sigma}{c^2 \rho \alpha}\right)^{5/2}}{\left(1 + \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_0^2}\right)^{3/2}},$$

а в качестве характерных величин длины и времени приняты, соответственно,

$$X = \frac{c_0}{\alpha} \frac{\left(1 + \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_0^2}\right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{H_0^2 \sigma}{c^2 \rho \alpha}\right)^{3/2}}, \quad T = \frac{1}{\alpha \left(1 + \frac{H_0^2 \sigma}{c^2 \rho \alpha}\right)}.$$

Объединим параметры исходной задачи в их безразмерные комплексы:

$$\frac{H_0^2 \sigma}{c^2 \rho \alpha} = m_1, \quad \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_0^2} = m_2, \quad \frac{\alpha_0 u_0 \alpha}{c_0 E} = m_3;$$

здесь m_1 характеризует проводимость поля ($m_1 > 0$), m_2 — поврежденность материала (параметр поврежденности, $-1 \leq m_2 \leq 1$), m_3 — упругую нелинейность материала ($m_3 < 0$). В результате объединения коэффициенты уравнения (5) существенно упрощаются.

3. Линеаризованное уравнение динамики. Затухание и дисперсия магнитоупругой волны

Рассмотрим дисперсионные свойства волн, описываемых уравнением (5). Для этого достаточно учесть в нем только линейные слагаемые

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_1 \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (6) видно, что рассматриваемая модель включает в себя два типа диссипации, из которых первый обусловлен наличием дефектов в материале (описывается производными третьего порядка), второй — магнитным полем (производная первого порядка).

Будем искать решение уравнения (6) в виде бегущей гармонической волны:

$$U(z, t) = U_0 e^{i(\omega t - kz)} + \text{к.с.},$$

где ω — частота, k — волновое число, к.с. — комплексно-сопряженная величина. Дисперсионное уравнение принимает вид

$$-\omega^2 + k^2 + i(a_1 \omega - \omega^3 + a_2 \omega k^2) = 0, \quad (7)$$

по которому можно заключить, что волновое число k является комплексным: $k = k_1 + ik_2$ [21]. Подставляя это выражение в комплексное дисперсионное уравнение (7), выделяя действительную и мнимую части, получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\omega^2 + k_1^2 - k_2^2 - 2a_2 \omega k_1 k_2 = 0, \\ 2k_1 k_2 + a_1 \omega - \omega^3 + a_2 \omega k_1^2 - a_2 \omega k_2^2 = 0, \end{cases}$$

откуда находим решения (k_{1-+}, k_{2++}) , (k_{1++}, k_{2--}) , (k_{1--}, k_{2+-}) , (k_{1+-}, k_{2--}) для действительной и мнимой частей волнового числа:

$$k_1 = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{\omega m'_2 (a_2 \omega m'_1 + \omega \pm \sqrt{m'})}}{m'_2}, \quad k_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\omega (a_2 \omega^2 - m'_1)}{\sqrt{\omega m'_2 (a_2 \omega m'_1 + \omega \pm \sqrt{m'})}},$$

где, для сокращения записи, введены обозначения: $m' = m'_2 (m_1'^2 + \omega^2)$, $m'_1 = \omega^2 - a_1$, $m'_2 = a_2^2 \omega^2 + 1$. Для дальнейших исследований и анализа дисперсионных зависимостей выберем пару (k_1, k_2) , у которой действительная часть волнового числа имеет знак «плюс» в обоих случаях.

Коэффициенты a_1 и a_2 выразим через параметр α — величину, обратную времени релаксации ($\alpha > 0$):

$$a_1 = \frac{n_1}{\alpha} \frac{1}{\left(1 + \frac{n_1}{\alpha}\right)^2} = \frac{n_1 \alpha}{(\alpha + n_1)^2}, \quad a_2 = \left(1 + \frac{n_1}{\alpha}\right) \frac{1}{1 + \frac{n_2}{\alpha}} = \frac{\alpha + n_1}{\alpha + n_2},$$

где $n_1 = H_0^2 \sigma / (c^2 \rho)$ и $n_2 = \beta_1 \beta_2 E / c_0^2$ — параметры, характеризующие, соответственно, проводимость поля ($n_1 > 0$) и связь циклических процессов с процессами накопления повреждений. Среди параметров α , n_1 и n_2 наибольший интерес представляет параметр поврежденности n_2 . Знак параметра зависит от знаков величин β_1 , β_2 .

Проследим за изменениями дисперсионных характеристик при варьировании параметра n_2 . Графическое представление зависимостей действительной и мнимой частей волнового числа от частоты при изменении параметра n_2 и фиксированных n_1 , α показано на рисунке 1. Принципиально различаются своим видом дисперсионные кривые при разных значениях параметра n_2 . Пороговое (критическое) значение n_2 , при котором меняется характер кривых, следующее: $n_2^* = -\alpha$. Для изображенных кривых асимптоты отмечены на рисунке штриховыми линиями. Действительная часть дисперсионной кривой при $a_2 < 0$ имеет горизонтальную асимптоту $k_1 = \sqrt{-a_2(1-a_2)^2} / (2a_2^2)$, при $a_2 > 0$ — наклонную $k_1 = \omega / \sqrt{a_2}$. Мнимой ветви дисперсионной кривой при $a_2 < 0$ отвечает наклонная асимптота, проходящая через начало координат $k_2 = (1-a_2)\omega / \sqrt{-a_2(1-a_2)^2}$, при $a_2 > 0$ — горизонтальная асимптота

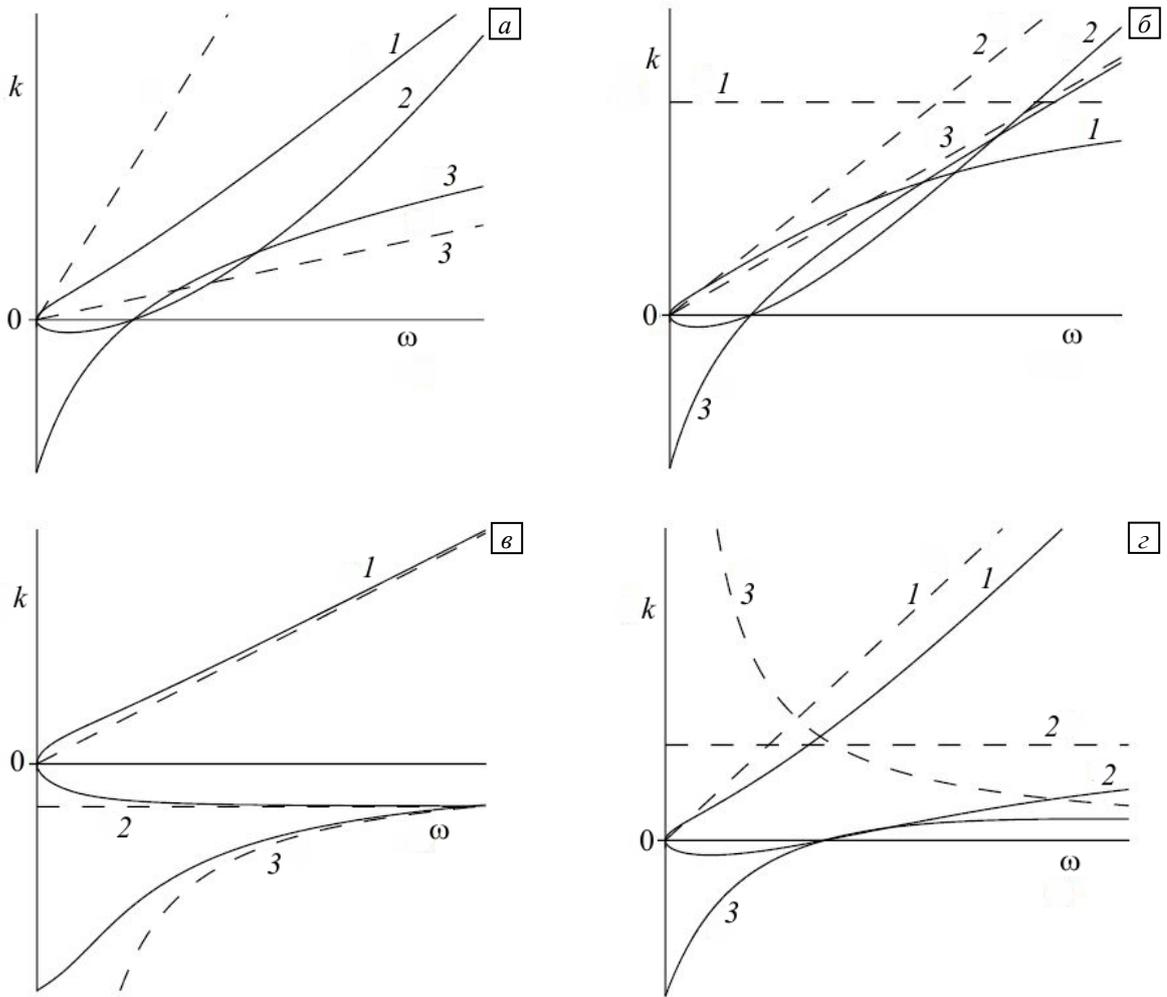


Рис. 1. Зависимости действительной (линии 1), мнимой (2) частей волнового числа и коэффициента затухания (3) от частоты при различных значениях параметра n_2 : $n_2^{(1)}$ (а), $n_2^{(2)}$ (б), $n_2^{(3)}$ (в), $n_2^{(4)}$ (г), где $n_2^{(1)} < n_2^{(2)} < n_2^* < n_2^{(3)} < n_2^{(4)}$

$k_2 = (1 - a_2) / (2a_2\sqrt{a_2})$. Низкочастотные возмущения обладают частотно зависимой диссипацией и дисперсией.

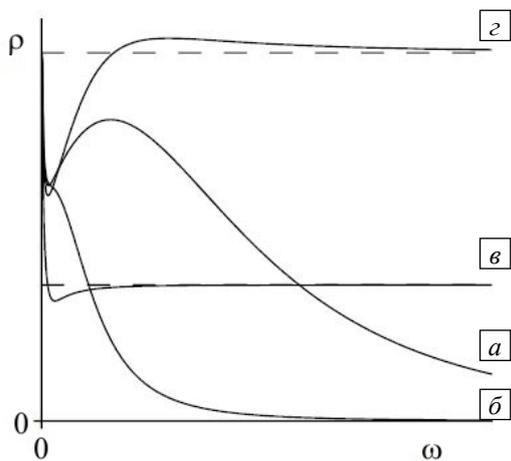


Рис. 2. Зависимости $\rho(\omega)$ при различных значениях параметра n_2 : $n_2^{(1)}$ (а), $n_2^{(2)}$ (б), $n_2^{(3)}$ (в), $n_2^{(4)}$ (г), где $n_2^{(1)} < n_2^{(2)} < n_2^* < n_2^{(3)} < n_2^{(4)}$

Коэффициент затухания $\alpha_d = \text{Im}(k) / \text{Re}(k)$ равен $\alpha_d = (m_1' - a_2\omega^2) / ((a_2m_1' + 1)\omega + \sqrt{m_1'})$. Кривая коэффициента затухания (Рис. 1) имеет наклонную асимптоту $\alpha_d = 2a_2\omega / (a_2 - 1)$ при $a_2 < 0$ и асимптоту в виде гиперболы $\alpha_d = (1 - a_2) / (2a_2\omega)$ при $a_2 > 0$.

Анализ плотности спектрального распределения частот $\rho(\omega) = \text{const} \cdot (dk_1/d\omega)$ показывает, что низкочастотные возмущения обладают частотно зависимой дисперсией при любых значениях n_2 (Рис. 2). График зависимости имеет горизонтальные асимптоты $\rho = 0$ при $a_2 < 0$ и $\rho = 1/\sqrt{a_2}$ при $a_2 > 0$.

При
$$n_2 = \frac{1}{3} \left(-2\alpha + n_1 + 2\sqrt{\alpha^2 - \alpha n_1 + n_1^2} \right)$$

действительная ветвь дисперсионной кривой меняет свое расположение относительно наклонной асимптоты, соответствующая мнимая ветвь приобретает точку минимума. На графиках коэффициента затухания и плотности спектрального

распределения частот появляется точка максимума.

Зависимости фазовой — $v_{ph} = \frac{\omega}{k_1} = \frac{\sqrt{2\omega m'_2}}{\sqrt{a_2 \omega m'_1 + \omega + \sqrt{m'}}$, и групповой — $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk_1}$, скоростей изображены

на рисунке 3. Кривая фазовой скорости имеет наклонную — $v_{ph} = \frac{2a_2^2 \omega}{\sqrt{-a_2(1-a_2)^2}}$ (при $a_2 < 0$), и

горизонтальную — $v_{ph} = \sqrt{a_2}$ (при $a_2 > 0$), асимптоты. У кривой групповой скорости асимптоты следующие: при $a_2 < 0$ — в виде кубической параболы

$v_{gr} = (8a_2^2 \sqrt{-a_2^3/m'_4})\omega^3 - ((a_2^4 m_3'^2 (3a_2 + 1) - 2a_2^2 m_3' (2a_2^3 + 2a_2^2 + 3a_2 + 5) + 35a_2 - 63)\sqrt{-a_2^3/m_4'^2})\omega$, ($m_3' = 4a_1 - 1$,

$m_4' = (a_2 + 1)a_2^2 m_3' - 3a_2 + 5$); при $a_2 > 0$ — горизонтальная асимптота $v_{gr} = \sqrt{a_2}$; при любых значениях a_2 — вертикальные асимптоты, аналитический вид которых найти не удастся.

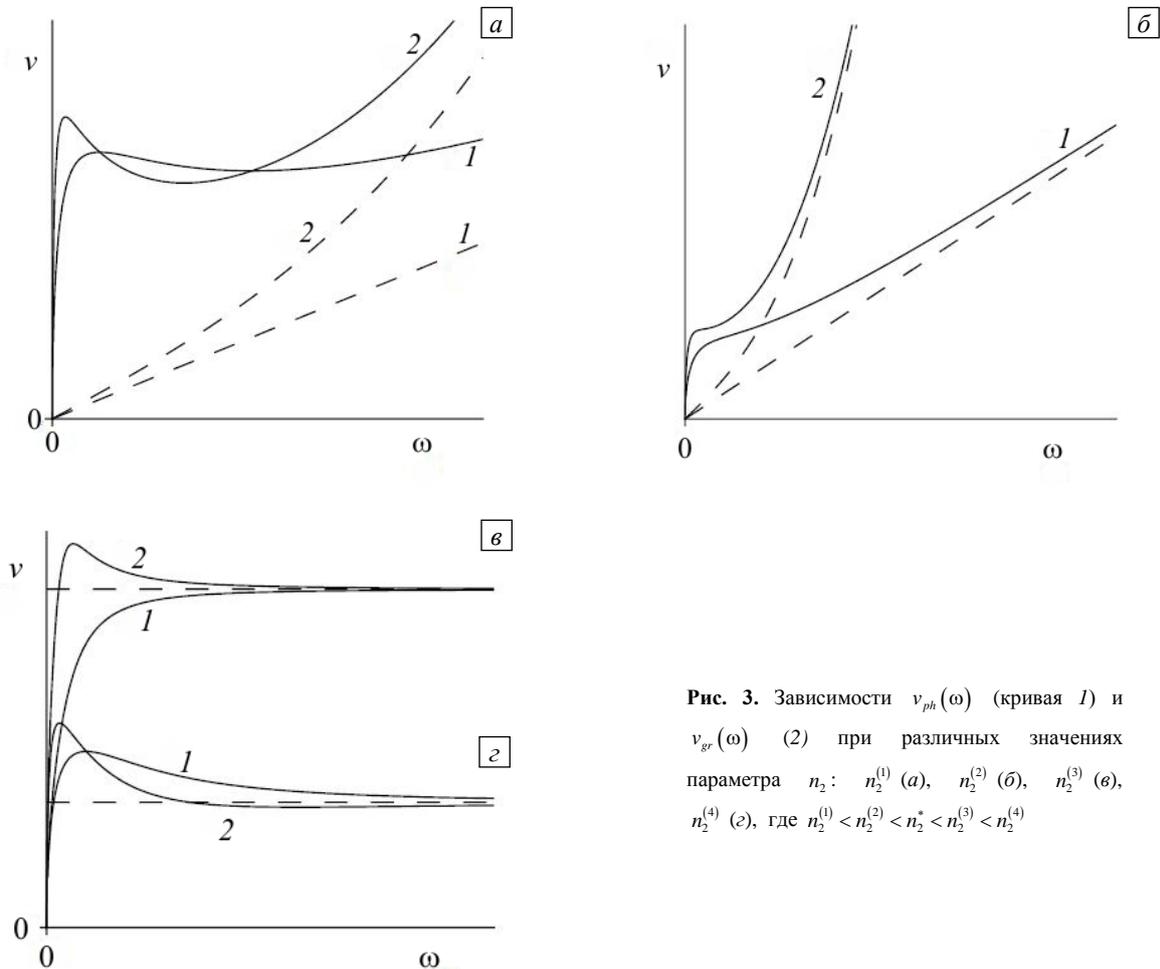


Рис. 3. Зависимости $v_{ph}(\omega)$ (кривая 1) и $v_{gr}(\omega)$ (2) при различных значениях параметра n_2 : $n_2^{(1)}$ (а), $n_2^{(2)}$ (б), $n_2^{(3)}$ (в), $n_2^{(4)}$ (г), где $n_2^{(1)} < n_2^{(2)} < n_2^* < n_2^{(3)} < n_2^{(4)}$

Точки пересечения графиков фазовой и групповой скоростей (Рис. 3) находятся в результате решения неявного уравнения

$$m' - m_2'^2 \omega^2 + 2\sqrt{m'}(m_2' - 1)(\omega + \omega b_2 m_1' + \sqrt{m'}) - 2\omega^2 m_2'(\sqrt{m'} \omega b_2 + m_1' m_2') = 0,$$

корни которого определяют интервалы частот нормальной и аномальной дисперсий.

При $a_2 < 0$ на небольшом интервале изменения параметра n_2 и на интервале частоты ω между двумя точками пересечения кривых фазовой и групповой скоростей, уменьшающемся с увеличением параметра n_2 , ветка групповой скорости лежит ниже графика фазовой скорости и наблюдается нормальная дисперсия. В отсутствие точек пересечения кривых как при $a_2 < 0$, так и при $a_2 > 0$ кривая групповой скорости лежит выше кривой фазовой скорости, и это означает, что в данном случае имеет место

аномальная дисперсия на всем интервале частот. При $a_2 > 0$ возможно наличие точки пересечения графиков фазовой и групповой скоростей. Справа от этой точки находится область нормальной дисперсии, слева — область аномальной дисперсии.

4. Нелинейное эволюционное уравнение и его исследование

В уравнении (5) перейдем в движущуюся систему координат $\xi = z - c\tau$, $\theta = \varepsilon\tau$, где c — скорость волн, заранее неизвестная, ε — малый параметр ($\varepsilon \ll 1$). Выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью c вдоль оси z , медленно эволюционирует во времени из-за нелинейности, дисперсии и диссипации. Считаем, что в уравнении (5) все нелинейные и диссипативные слагаемые — малые величины порядка ε .

В первом по ε приближении получаем эволюционное уравнение относительно функции продольной деформации $W = \partial U / \partial \xi$:

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{a_1}{2\varepsilon} W + \frac{(1-a_2)}{2\varepsilon} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{a_3}{2\varepsilon} W \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{a_4}{2\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(W \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) = 0;$$

здесь учтено, что скорость c определена из уравнения нулевого приближения и равна $c = 1$. Перепишем полученное уравнение в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} + b_1 W + b_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + b_3 W \frac{\partial W}{\partial \xi} - b_4 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(W \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) = 0, \quad (8)$$

где $b_1 = \frac{m_1}{2\varepsilon(1+m_1)^2}$, $b_2 = \frac{m_2 - m_1}{2\varepsilon(1+m_2)}$, $b_3 = \frac{m_3}{2\varepsilon} \left(\frac{1+m_1}{1+m_2} \right)^{3/2}$, $b_4 = \frac{m_3(1+m_1)^{5/2}}{2\varepsilon(1+m_2)^{3/2}}$. Очевидно, что последним

слагаемым в (8) пренебрегать нельзя. Оба нелинейных слагаемых в уравнении являются почти одинаково значимыми. Уравнение (8) можно классифицировать как возмущенное уравнение Бюргерса [22] с дополнительной нелинейностью.

Рассмотрим частный случай уравнения (8). При $m_1 \rightarrow 0$ получаем уравнение, которое можно отнести к обобщенным невозмущенным уравнениям Бюргерса:

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} + b_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + b_3 \left(W \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(W \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \right) = 0, \quad (9)$$

где $b_2 = \frac{m_2}{2\varepsilon(1+m_2)}$, $b_3 = \frac{m_3}{2\varepsilon(1+m_2)^{3/2}}$. Здесь, в отличие от классического уравнения Бюргерса,

присутствует еще один тип нелинейности, и обе нелинейности проявляются в равной степени. Уравнение (9) имеет стационарное решение в виде ударной волны. Такое возможно благодаря наличию в уравнении диссипативных и нелинейных слагаемых, которые уравновешивают друг друга. Учитывая граничные условия [23] (у функции на бесконечностях разные значения), находим решение обыкновенного дифференциального уравнения и его производную:

$$\chi = \frac{2}{b_3(W_2 - W_1)} \left[(b_3 W_2 - b_2) \ln(W_2 - W) - (b_3 W_1 - b_2) \ln(W - W_1) \right], \quad (10)$$

$$\frac{dW}{d\chi} = \frac{b_3(W_2 - W)(W - W_1)}{2(b_2 - b_3 W)}, \quad (11)$$

где $W = W(\chi)$, $\chi = \xi - v\theta$ — бегущая координата, W_1 , W_2 — предельные значения функции, при этом $W_2 > W_1$. Скорость ударной волны определяется как $v = b_3(W_1 + W_2)/2$.

Профиль стационарной ударной волны $W(\chi)$ и график производной (11) показаны на рисунке 4. График производной отображен в верхнюю полуплоскость и смещен по оси ординат на величину W_1 .

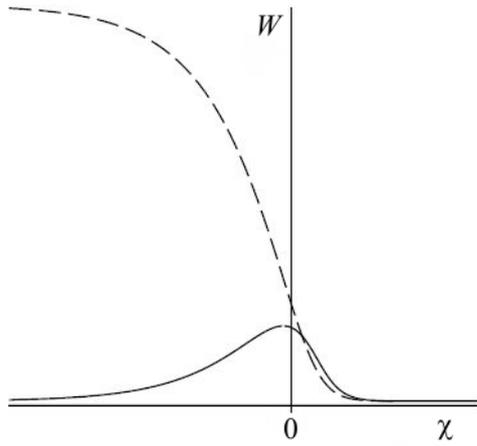


Рис. 4. Зависимости $W(\chi)$ (штриховая линия) и $W'(\chi)$ (сплошная линия) при фиксированных значениях параметров

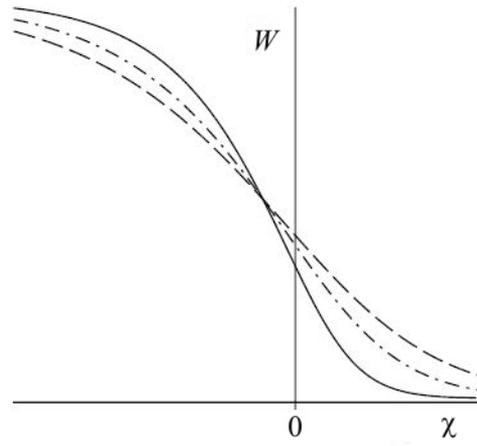


Рис. 5. Зависимость $W(\chi)$ при разных значениях параметра m_2 : $m_2^{(1)}$ – сплошная линия, $m_2^{(2)}$ – штрихпунктирная линия, $m_2^{(3)}$ – штриховая линия; $m_2^{(1)} < m_2^{(2)} < m_2^{(3)}$

Из физических соображений и анализа функции (10) следует, что $-1 < m_2 \leq 1$. Фронт ударной волны и его ширина, в зависимости от изменения параметров поврежденности и упругой нелинейности материала, ведут себя неоднозначно.

При изменении m_2 в интервале от -1 до $m_{2(1)}$ ширина фронта ударной волны уменьшается ($-2/(3\sqrt{3}A) < m_3 < 0$), при изменении в интервале от $m_{2(1)}$ до $m_{2(2)}$ профиль волны не удовлетворяет граничным условиям. При дальнейшем увеличении параметра в пределах допустимых значений ширина фронта волны растет (Рис. 5). Здесь $m_{2(i)}$ — пороговые значения, при которых меняется поведение кривой $W(\chi)$, определяемые из условия отрицательности производной (11) на всем интервале от -1 до $m_{2(2)}$.

Из качественного анализа уравнения (9) следует оценка для параметров ударной волны:

$$\frac{Ab_3}{b_2} \left(\frac{\Delta}{2} - 1 \right) = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{Am_3}{m_2 \sqrt{1+m_2}} \left(\frac{\Delta}{2} - 1 \right) = \text{const} ,$$

где $A = W_2 - W_1$ — амплитуда ударной волны, Δ — ширина фронта ударной волны (Рис. 6). Из рисунка видно, что функция $\Delta(m_2)$ имеет точку максимума или минимума при $m_2 = -2/3 = m_2^*$ (см. штриховую

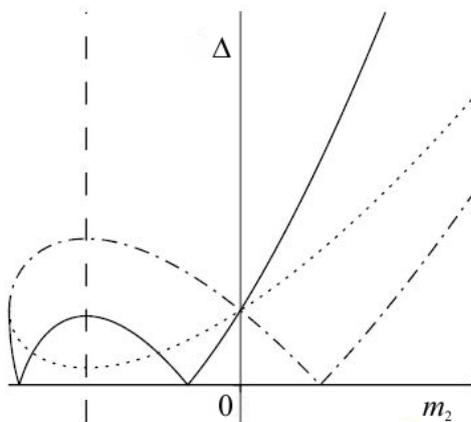


Рис. 6. Зависимость ширины фронта ударной волны от параметра m_2 (при $-2/(3\sqrt{3}A) < m_3 < 0$ – сплошная линия, при $m_3 < -2/(3\sqrt{3}A)$ – пунктирная, при $m_3 > 0$ – штрихпунктирная)

линию) в зависимости от значений параметра m_3 . При $\Delta = 0$ фронт волны вертикальный, то есть решение разрывное. Ширина фронта ударной волны может как возрастать, так и уменьшаться при увеличении трения вследствие поврежденности материала.

Значения $m_{2(1)}$ и $m_{2(2)}$ можно определить из кубического уравнения

$$m_2^3 + m_2^2 - A^2 m_3^2 = 0 ,$$

которому присущи один действительный положительный корень и либо два действительных отрицательных корня, либо два комплексно-сопряженных с отрицательной действительной частью. При $-2/(3\sqrt{3}A) < m_3 < 0$ у уравнения три действительных корня ($D > 0$). Отрицательные корни уравнения являются искомыми значениями m_2 .

Положительный корень $m_{2(3)}$ не удовлетворяет условию существования ударной волны в рассматриваемой системе.

При $m_3 < -2/(3\sqrt{3}A)$ ударная волна, удовлетворяющая граничным условиям, имеет место для любых значений m_2 из заданного полуинтервала. При m_2 от -1 до $-2/3$ ширина фронта ударной волны уменьшается. При m_2 от $-2/3$ до 1 ширина фронта ударной волны увеличивается. При $m_3 = -2/(3\sqrt{3}A)$ и $m_2 = -2/3$ происходит разрыв ударной волны.

Для гипотетических материалов, а также для некоторых композитов параметр упругой нелинейности положителен ($m_3 > 0$). График зависимости ширины фронта ударной волны от параметра m_2 для этого случая изображен на рисунке 6 штрихпунктиром. При $m_2 = m_{2(3)}$ — ширина фронта равна нулю ($\Delta = 0$). При $m_2 > m_{2(3)}$ профиль волны не удовлетворяет граничным условиям.

Если в материале одновременно отсутствуют проводимость и поврежденность ($m_2 \rightarrow 0$), то уравнение (9) принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} + b_3 \left(W \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(W \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \right) = 0, \quad b_3 = \frac{m_3}{2\varepsilon}, \quad (12)$$

и имеет решение в виде стационарной ударной волны

$$\chi = \frac{2}{(W_2 - W_1)} \left[W_2 \ln(W_2 - W) - W_1 \ln(W - W_1) \right],$$

ширина фронта которой является постоянной величиной ($\Delta = \text{const}$), то есть зависимость от амплитуды волны и исходных параметров системы отсутствует. В этом случае к появлению ударной волны приводит взаимодействие разнородных нелинейностей. Линеаризация уравнения (12) относительно малых возмущений ($W = W_0 + \tilde{W}(\xi, \theta)$)

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \theta} + b_3 \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \xi^2} \right) W_0 = 0$$

показывает, что второе нелинейное слагаемое приносит затухание. Последнее и способствует появлению стационарной ударной волны в системе. Уравнение (12) обладает свойством уравнения Бюргерса несмотря на то, что явно диссипативные слагаемые в этом уравнении отсутствуют.

В уравнении (9), по сравнению с уравнением (12), присутствует диссипативное слагаемое. Если оно входит со знаком «минус», то увеличение b_2 приводит к расплыванию профиля волны, если со знаком «плюс», то с ростом b_2 профиль волны становится круче.

Проведем анализ асимптотического решения уравнения (8). Представим функцию W в виде ряда $W = \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \dots$, где ε — малый параметр ($\varepsilon \ll 1$). В качестве начального условия выберем синусоидальный профиль единичной амплитуды $W|_{\theta=0} = \varepsilon \sin(k\xi)$. Подставляя это разложение в (8), в первом и втором приближениях получаем:

$$\frac{\partial W_1}{\partial \theta} + b_1 W_1 + b_2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} = 0, \quad W_1|_{\theta=0} = \sin(k\xi), \quad (13)$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial \theta} + b_1 W_2 + b_2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} = -b_3 W_1 \frac{\partial W_1}{\partial \xi} + b_4 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(W_1 \frac{\partial W_1}{\partial \xi} \right), \quad W_2|_{\theta=0} = 0. \quad (14)$$

Решая задачи Коши (13) и (14), находим:

$$W_1 = e^{(k^2 b_2 - b_1)\theta} \sin(k\xi),$$

$$W_2 = \frac{e^{2(k^2b_2 - b_1)\theta} \left(e^{(2k^2b_2 + b_1)\theta} - 1 \right)}{2b_1 + 4k^2b_2} \left(2k^2b_4 \cos(2k\xi) - kb_3 \sin(2k\xi) \right).$$

Отношение амплитуды второй гармоники к амплитуде первой выражается формулой:

$$f = \frac{\sqrt{1 + \chi_2^2}}{(2 + \chi_1)} e^{(1 - \chi_1)\vartheta} \left(e^{(2 + \chi_1)\vartheta} - 1 \right), \tag{15}$$

где $f = \frac{A_2 b_2}{A_1 |b_4|}$, $\vartheta = \theta k^2 b_2$, $\chi_1 = \frac{b_1}{k^2 b_2}$, $\chi_2 = \frac{b_3}{2k b_4}$.

Параметр m_2 изменяется в пределах $-1 < m_2 < m_1$. График зависимости (15) для различных значений $\tilde{\chi}_1 = -\chi_1$ изображен на рисунке 7, где $\tilde{\vartheta} = -\vartheta$. Анализ функции f показывает, что максимум достигается ею в точке $\tilde{\vartheta} = \frac{1}{\tilde{\chi}_1 - 2} \ln \left(\frac{\tilde{\chi}_1 + 1}{3} \right)$. Из графика видно, что при увеличении $\tilde{\chi}_1$ амплитуда f падает, а максимум сдвигается влево. Изменение параметра χ_2 тоже влияет на изменение амплитуды кривой. Итак, имеем: при $m_1 \rightarrow \infty$ $\tilde{\chi}_1 \rightarrow 0$ и $\chi_2 \rightarrow 0$ (соответствующая кривая $f(\tilde{\vartheta})$ отмечена на рисунке пунктирной линией), а при $m_1 \rightarrow 0$ $\tilde{\chi}_1 \rightarrow 0$, $\chi_2 \rightarrow 1/(2k)$. При $m_1 < m_2 < 1$ отношение амплитуд второй и первой гармоник не ограничено сверху. Амплитуда второй гармоники растет быстрее амплитуды первой гармоники.

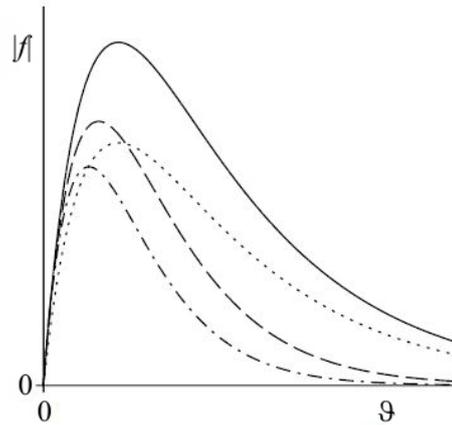


Рис. 7. Зависимость $|f(\tilde{\vartheta})|$ при изменении параметра $\tilde{\chi}_1$ от 0 до 2 и $\chi_2 \neq 0$ ($\tilde{\chi}_1 = 0$ – сплошная линия, $\tilde{\chi}_1 = 1$ – штриховая, $\tilde{\chi}_1 \rightarrow 2$ – штрихпунктирная), при $\tilde{\chi}_1 \rightarrow 0$ и $\chi_2 \rightarrow 0$ – пунктирная

Рассматривая функцию отношения амплитуд $F = A_2/A_1$ как функцию параметра m_1 , приходим к тому, что у функции $F(m_1)$ есть точка минимума, в которой максимум кривой $F(\theta)$ достигает минимального значения. Максимум отношения амплитуд

$F(\theta)$ равен $F_{\max} = -\frac{\sqrt{b_3^2 + 4b_4^2 k^2}}{6kb_2} e^{\frac{k^2 b_2 - b_1}{2k^2 b_2 + b_1} \ln \left(\frac{k^2 b_2 - b_1}{3k^2 b_2} \right)}$. Динамика координат точки максимума при изменении

параметра m_1 изображена на рисунке 8. Из рисунка видно, что при увеличении параметра проводимости от нуля амплитуда кривой $F(\theta)$ сначала падает, затем растет, стремясь на бесконечности

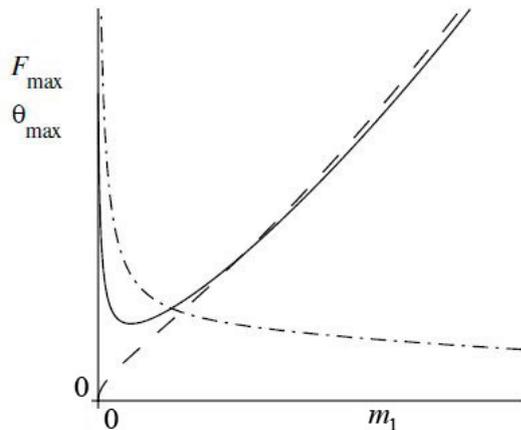


Рис. 8. Зависимости $F_{\max}(m_1)$ – сплошная линия, и $\theta_{\max}(m_1)$ – штрихпунктирная, асимптота — штриховая

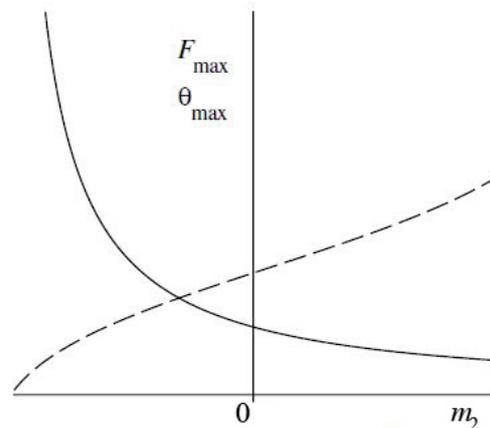


Рис. 9. Зависимости $F_{\max}(m_2)$ (сплошная линия) и $\theta_{\max}(m_2)$ (штриховая)

к $F = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{|m_3|}{\sqrt{1+m_2}} \left(\frac{5}{2} + m_1 + m_2 \right) \sqrt{m_1}$. Абсцисса точки максимума (см. штрихпунктирную линию)

при увеличении параметра m_1 уменьшается, в пределе стремясь к нулю.

Динамика координат точки максимума при фиксированном значении параметра m_1 и изменении параметра m_2 представлена на рисунке 9. При увеличении параметра поврежденности от -1 до m_1 , амплитуда кривой $F(\theta)$ падает, максимум кривой сдвигается вправо. Проведенный анализ справедлив для любых значений параметра упругой нелинейности материала.

5. Заключение

В работе изучается продольная магнитоупругая волна в стержне с учетом поврежденности его материала. Проведенный анализ показывает, что низкочастотные возмущения обладают ярко выраженными диссипацией и дисперсией, пропорциональными радикалу частоты при любых значениях параметра поврежденности. Высокочастотные возмущения для послепороговых значений параметра поврежденности распространяются практически без дисперсии, а затухание принимает постоянное значение, то есть частотная зависимость отсутствует. При допороговых значениях параметра поврежденности высокочастотные возмущения имеют постоянную длину волны, то есть их распространение не связано с частотой, а затухание линейно растет с ее увеличением. Изменение параметра поврежденности может приводить к существованию как нормальной, так и аномальной дисперсий. При отсутствии поврежденности во всем интервале частот проявляется аномальная дисперсия. Наличие поврежденности в диапазоне допороговых значений, близких к граничному значению, позволяет получить нормальную дисперсию на ограниченном интервале частот. Для послепороговых положительных значений коэффициента поврежденности аномальная дисперсия наблюдается только на низких частотах. Определено, что баланс между упругой нелинейностью и диссипацией, вызванной поврежденностью материала, может привести к формированию локализованной слабой ударной волны деформации. Ширина ударной волны будет расти, а ее скорость — уменьшаться с увеличением значения параметра, характеризующего поврежденность материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10073-мк).

Литература

1. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Maugin G.A. The thermomechanics of plasticity and fracture. Cambridge University Press, 1992. 369 p.
4. Зув Л.Б., Муравьев В.В., Данилова Ю.С. О признаке усталостного разрушения сталей // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25, № 9. С. 31-34. (English version [DOI](#))
5. Hirao M., Ogi H., Suzuki N., Ohtani T. Ultrasonic Attenuation Peak During Fatigue of Polycrystalline Copper // Acta Mater. 2000. Vol. 48. P. 517-524. [DOI](#)
6. Wang J., Fang Q.F., Zhu Z.G. Sensitivity of ultrasonic attenuation and velocity change to cyclic deformation in pure aluminum // Phys. Status Solidi. 1998. Vol. 169. P. 43-48. [DOI](#)
7. Кленко В.В., Колупаев Б.Б., Колупаев Б.С., Лебедев Е.В. Диссипация энергии и дефект модуля в гетерогенных системах на основе гибкоцепных линейных полимеров // ВМС. Сер. Б. 2007. Т. 49, № 1. С. 139-143. (English version [DOI](#))
8. Волков В.М. Разрыхление металлов и разрушение конструкций машин // Вестник ВГАВТ. 2003. Вып. 4. С. 50-69.
9. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение. М.: Мир, 1984. 624 с.
10. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. М.: Машиностроение, 1981. 272 с.
11. Романов А.Н. Разрушение при малоцикловом нагружении. М.: Наука, 1988. 278 с.
12. Березина Т.Г., Минц И.И. Влияние структуры на развитие третьей стадии ползучести хромомолибденованадиевых сталей // Жаропрочность и жаростойкость металлических материалов. М.: Наука, 1976. С. 149-152.
13. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. М.: Наука, 2009. 280 с.
14. Ерофеев В.И., Никитина Е.А. Самосогласованная динамическая задача оценки поврежденности материала акустическим методом // Акустический журнал. 2010. Т. 56, № 4. С. 554-557. (English version [DOI](#))
15. Erofeev V.I., Nikitina E.A., Sharabanova A.V. Wave propagation in damaged materials using a new generalized continuum // Mechanics of generalized continua. One hundred years after the Cosserats. Series: Advances in Mechanics and Mathematics. Vol. 21 / Eds. G.A. Maugin, A.V. Metrikine. Springer, 2010. P. 143-148. [DOI](#)
16. Stulov A., Erofeev V. Frequency-dependent attenuation and phase velocity dispersion of an acoustic wave propagating in the media with damages // Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials. Series: Advances Structured Materials. Vol. 42 / Eds. H. Altenbach, S. Forest. Springer, 2016. P. 413-423. [DOI](#)
17. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Влияние магнитного поля на локализацию волны деформации // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 1. С. 95-100. (English version [DOI](#))

18. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Мальханов А.О. Нелинейные продольные локализованные волны в пластине, взаимодействующей с магнитным полем // Вычисл. мех. сплош. сред. 2010. Т. 3, № 4. С. 5-15. [DOI](#)
19. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Нелинейные локализованные продольные магнитоупругие волны в пластине, находящейся в произвольно ориентированном магнитном поле // Вычисл. мех. сплош. сред. 2012. Т. 5, № 1. С. 79-84. [DOI](#)
20. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Локализованные волны деформации в нелинейно-упругой проводящей среде, взаимодействующей с магнитным полем // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 2. С. 130-138. [DOI](#)
21. Ерофеев В.И., Кажжаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
22. Корсунский С.В. Распространение звуковых пучков конечной амплитуды в электропроводящих средах // Акустический журнал. 1990. Т. 36, № 1. С. 48-52.
23. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Ленанд, 2017. 312 с.

References

1. Kachanov L.M. *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Springer, 1986. 140 p.
2. Rabotnov Yu.N. *Creep Problems in Structural Members*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1969. 836 p.
3. Maugin G.A. *The thermomechanics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press, 1992. 369 p.
4. Zuev L.B., Murav'ev V.V., Danilova Yu.S. Criterion for fatigue failure in steels. *Technical Physics Letters*, 1999, vol. 25, no. 5, pp. 352-353. [DOI](#)
5. Hirao M., Ogi H., Suzuki N., Ohtani T. Ultrasonic Attenuation Peak During Fatigue of Polycrystalline Copper. *Acta Mater.*, 2000, vol. 48, pp. 517-524. [DOI](#)
6. Wang J., Fang Q.F., Zhu Z.G. Sensitivity of ultrasonic attenuation and velocity change to cyclic deformation in pure aluminum. *Phys. Status Solidi*, 1998, vol. 169, pp. 43-48. [DOI](#)
7. Klepko V.V., Lebedev E.V., Kolupaev B.B., Kolupaev B.S. Energy dissipation and modulus defect in heterogeneous systems based on flexible-chain linear polymers. *Polym. Sci. Ser. B*, 2007, vol. 49, no. 1-2, pp. 18-21. [DOI](#)
8. Volkov V.M. Structures the loosening of metals and fracture of machine. *Vestnik VGAVT – Bulletin of VSAWT*, 2003, no. 4, pp. 50-69.
9. Collins J.A. *Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention*. 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1993. 654 p.
10. Makhutov N.A. *Deformatsionnyye kriterii razrusheniya i raschet elementov konstruktsey na prochnost'* [Deformation Criteria of Fracture and Calculation of Construction Elements for Strength]. М.: Mashinostroyeniye, 1981. 272 p.
11. Romanov A.N. *Razrusheniye pri malotsiklovom nagruzhenii* [Fracture under low-cycle loading]. М.: Nauka, 1988. 278 p.
12. Berezina T.G., Mints I.I. *Vliyaniye struktury na razvitiye tret'yey stadii polzuchesti khromomolibdenovanadiyevykh staley* [The influence of the structure on the development of the third stage of creep of chromomolybdenum vanadium steels] // *Zharoprochnost' i zharostoykost' metallicheskih materialov* [Heat-strength and heat-resistant of metallic materials]. М.: Nauka, 1976. Pp. 149-152.
13. Uglov A.L., Erofeev V.I., Smirnov A.N. *Akusticheskiy kontrol' oborudovaniya pri izgotovlenii i ekspluatatsii* [Acoustic control of equipment during its manufacture and operation]. М.: Nauka, 2009. 280 p.
14. Erofeev V.I., Nikitina E.A. The self-consistent dynamic problem of estimating the damage of a material by an acoustic method. *Acoust. Phys.*, 2010, vol. 56, no. 4, pp. 584-587. [DOI](#)
15. Erofeev V.I., Nikitina E.A., Sharabanova A.V. Wave propagation in damaged materials using a new generalized continuum. *Mechanics of generalized continua. One hundred years after the Cosserats. Series: Advances in Mechanics and Mathematics, vol. 21*, ed. G.A. Maugin, A.V. Metrikine. Springer, 2010. P. 143-148. [DOI](#)
16. Stulov A., Erofeev V. Frequency-dependent attenuation and phase velocity dispersion of an acoustic wave propagating in the media with damages. *Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials. Series: Advances Structured Materials, vol. 42*, ed. H. Altenbach, S. Forest, Springer, 2016, P. 413-423. [DOI](#)
17. Erofeev V.I., Mal'khanov A.O. Magnetic field effect on strain wave localization. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2010, vol. 39, no. 1, pp. 78-82. [DOI](#)
18. Erofeev V.I., Zemlyanukhin A.I., Catson V.M., Malkhanov A.O. Nonlinear localized longitudinal waves in a plate under magnetic field. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 4, pp. 5-15. [DOI](#)
19. Erofeev V.I., Malkhanov A.O. Nonlinear longitudinal localized magnetoelastic waves in a plate in an arbitrarily oriented magnetic field. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 1, pp. 79-84. [DOI](#)
20. Erofeev V.I., Mal'khanov A.O. Localized strain waves in a nonlinearity elastic conducting medium interacting with a magnetic field. *Mech. Solids*, 2017, vol. 52, no. 2, pp. 224-231. [DOI](#)
21. Erofeev V.I., Kazhayev V.V., Semerikova N.P. *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost'* [Waves in the Rods: Dispersion. Dissipation. Nonlinearity]. М.: Fizmatlit, 2002. 208 p.
22. Korsunskii S.V. Rasprostraneniye zvukovykh puchkov konechnoy amplitudy v elektroprovodyashchikh sredakh [Propagation of large amplitude acoustic beams through electrically conducting medium]. *Akusticheskiy zhurnal – Soviet Physics. Acoustics*, 1990, vol. 36, no. 1, pp. 48-52.
23. Ryskin N.M., Trubetskov D.I. *Nelineynyye volny* [Nonlinear waves]. М.: Lenand, 2017. 312 p.

Поступила в редакцию 05.10.2018, после доработки 31.10.2018; принята к опубликованию 31.10.2018

Сведения об авторах

Ерофеев Владимир Иванович, дфмн, проф., дир., Институт проблем машиностроения (ИПМ РАН), 603024, г. Нижний Новгород, ул. Белинского, д. 85, e-mail: erof.vi@yandex.ru

Леонтьева Анна Викторовна, ктн, снс, ИПМ РАН, e-mail: aleonav@mail.ru

Мальханов Алексей Олегович, кфмн, снс, ИПМ РАН, e-mail: alexey.malkhanov@gmail.com