

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.4.29](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.29)

УДК 517.977.56

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМОЙ В ЗАДАЧАХ ВЫТЯЖКИ КВАРЦЕВЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКОН

В.П. Первадчук, Д.Б. Владимирова, И.В. Гордеева

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

В данной работе рассмотрена задача оптимального управления распределенными системами, описывающая производственный процесс получения оптического волокна. Изготовление кварцевых оптических волокон является технологически сложным и состоит из нескольких этапов. На заключительной стадии – вытяжке, непрерывно осуществляется контроль за диаметром волокна. И, как показывает практика, существует прямая корреляция между постоянством диаметра готового волокна и постоянством по длине других его характеристик, поэтому все системы контроля и управления процессом создания волокна построены на этом. В разделе 1 статьи делается небольшой экскурс в историю развития теории оптимального управления: излагаются основные подходы к постановке и обоснованию оптимизационных задач. Далее формулируется постановка задачи оптимального управления процессом вытяжки оптического волокна. Дается определение обобщенного решения поставленной задачи, которая является одномерной с граничным наблюдением и граничным управлением. В третьем разделе работы приводится подробный вывод системы оптимальности. В обсуждаемом случае функция управления представляет собой скорость намотки готового волокна. Четвертый раздел посвящен представлению алгоритма реализации задачи оптимального управления и анализу полученных на его основе результатов. Задача решена при двух типах начальных условий для функции отклонения радиуса от его стационарного (программного) решения. В обоих случаях системы оптимальности решены с помощью алгоритмов мультифизического моделирования, найдены величины функции управления. Полученные значения, корректирующие скорость намотки готового волокна, соответствуют возможностям реального производства.

Ключевые слова: оптимальное стабилизирующее управление, распределенные системы, оптическое волокно, вытяжка, система оптимальности

BOUNDARY CONTROL OF DISTRIBUTED SYSTEMS IN THE PROBLEMS OF QUARTZ OPTICAL FIBER DRAWING

V.P. Pervadchuk, D.B. Vladimirova and I.V. Gordeeva

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

The problem of optimal control of distributed systems describing the process of optical fiber production is considered. Production of quartz optical fibers is a complex technological process, which consists of several stages. At the final stage of fiber production (fiber drawing), the fiber diameter is continuously measured and there is a good correlation between the constancy of the resulted fiber diameter and the constancy of its other characteristics along the fiber length. Therefore, all control and management systems of this process are developed on this basis. The introduction of the paper is a short excursus into the history of the theory of optimal control: main approaches to the formulation and justification of optimization problems are considered. Further, the formulation of the optimal control problem for the optical fiber drawing is proposed. A definition of the generalized solution for the problem is given. This problem is a one-dimensional problem with boundary observation and boundary control. The third part of the paper presents a detailed derivation of the optimality system. In our case, the control function is the winding speed of the resulted fiber. In conclusion, an algorithm for realizing the optimal control problem is proposed and the results are analyzed. The problem is solved for two types of initial conditions for the function of radius deviation from its stationary (programmed) solution. In both cases, optimality systems are solved using the algorithms of multi-physical modeling, and control functions are found. The obtained correction values for the winding speed of the resulted fiber correspond to real production possibilities.

Key words: optimal stabilizing control, distributed systems, optical fiber, drawing, optimality system

1. Введение

Оптимальное управление системами с распределенными параметрами является более трудоемким для исследования, нежели аналогичная проблема для систем с сосредоточенными параметрами. Основная причина заключается в том, что движение систем с распределенными параметрами описывается функциональными уравнениями — уравнениями в частных производных, и зачастую сопряжено с наличием непростых граничных и начальных условий, а также управляющих параметров. В рамках производственных задач контроль за реальными объектами требует создания оптимальных управляющих алгоритмов. Процессы, в которых объекты участвуют, не всегда могут быть представлены математически в виде обыкновенных дифференциальных уравнений, и потому сложны с точки зрения моделирования. Таким образом, возникает необходимость развития теории оптимального управления, которая находит практическое применение во многих технических приложениях, и ее обобщения на случай систем с распределенными параметрами.

Первые результаты в теории оптимального управления распределенными системами, касающиеся, в том числе, и вопросов существования и единственности решений, относятся к работам Ж.-Л. Лионса

[1, 2]. Во второй половине прошлого столетия в публикациях А.Г. Бутковского [3, 4], помимо точных математических постановок задач оптимального управления, приведены приближенные методы их решения, подходы к оптимизации систем, описываемых рекуррентными соотношениями, а также метод моментов применительно к задачам управления распределенными системами. Основы теории управляемости, наблюдаемости и идентифицируемости систем, в том числе распределенных, представлены в работах А.И. Егорова, К.А. Лурье, Т.К. Сиразетдинова [5–7]. Показано, что процесс управления распределенными системами может быть рассмотрен как краевая задача для дифференциальных уравнений в частных производных или для бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вопросам получения необходимых и достаточных условий разрешимости задач оптимального управления распределенными системами в новых формах, в том числе в формах оптимизационных систем, посвящена монография А.В. Фурсикова [8]. Первые практические результаты по представленной теории касались задач гидродинамики: задачи минимизации работы при разгоне покоящейся жидкости до заданной скорости; задач обтекания; неоднородных краевых задач для уравнений Навье–Стокса. Систематическое изложение основных методов анализа и синтеза распределенных систем с автоматическим регулированием, определение базовых характеристик управляемости и наблюдаемости распределенными объектами представлено Э.Я. Раппопортом [9]. Методы исследования систем с подвижными источниками воздействия, а также алгоритмы управления такими системами изучены В.А. Кубышкиным [10]. В современных исследованиях В.В. Провоторова [11], продолжающих работы А.В. Фурсикова [8] и О.А. Ладыженской [12], в основу которых положен подход, использующий априорные оценки обобщенных решений начально-краевой задачи для уравнений параболического типа, сформулированы условия существования и единственности задач оптимизации в различных постановках, показана управляемость систем.

2. Постановка задачи

Объектом исследования в данной работе служит распределенная система, моделирующая производственный процесс вытяжки кварцевых оптических волокон. Изготовление кварцевых оптических волокон технологически сложно и состоит из нескольких этапов. На каждом из них особым моментом

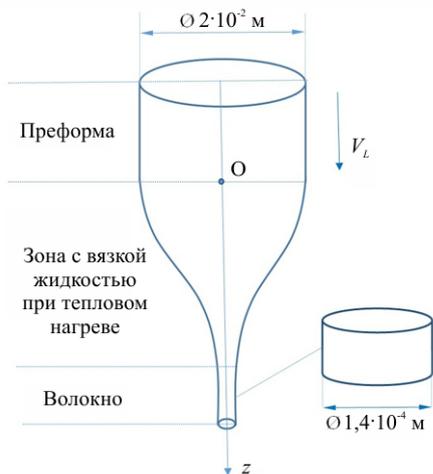


Рис. 1. Общая схема установки для вытяжки оптического волокна

контроля качества является измерение ряда важнейших технологических параметров — геометрических и прочностных, а также характеристик, определяющих уровень оптических потерь. На заключительной стадии изготовления — вытяжке готового волокна, непрерывно отслеживается только величина диаметра волокна. Как показывает практика, имеет место прямая корреляция между постоянством диаметра готового волокна и постоянством других его характеристик по длине, поэтому существующие системы контроля и управления процессом вытяжки волокна построены на этом. В идеальном случае в изотермических условиях постоянство диаметра готового волокна может быть получено при стационарном режиме, то есть при постоянной скорости подачи заготовки (преформы) и вытяжки волокна. Однако в действительности на постоянство геометрии готового волокна могут оказать влияние не только микроизменения скоростей подачи преформы и вытяжки, но и различные дефекты самой заготовки. Общая схема установки для вытяжки и ее основные геометрические характеристики представлены на рисунке 1. В рамках изотермической постановки задачи областью решения является зона длиной L , которая

заполнена вязкой жидкостью (в условиях теплового нагрева). Отметим, что данная работа носит модельный, исследовательский характер вследствие того, что проблема в ней решается при постоянной вязкости расплава. Рассмотрим одномерную систему координат, пространственная ось Oz которой ориентирована вниз, по направлению вытяжки (вдоль оси симметрии). В одномерном приближении технологический процесс вытяжки описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных [13]:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial R(t, z)}{\partial t} &= V(t, z) \frac{\partial R(t, z)}{\partial z} + \frac{R(t, z)}{2} \frac{\partial V(t, z)}{\partial z}, \\
 R^2(t, z) \frac{\partial V(t, z)}{\partial t} &= \frac{3\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(R^2(t, z) \frac{\partial V(t, z)}{\partial z} \right)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями:

$$R|_{t=0} = R_s(z), \quad R|_{z=0} = R_0(t), \quad (2)$$

$$V|_{t=0} = V_s(z), \quad V|_{z=0} = V_0(t), \quad V|_{z=L} = V_L(t). \quad (3)$$

Здесь: t — время; z — продольная координата; $R(t, z)$ и $V(t, z)$ — скорость и радиус струи расплава кварца соответственно; ρ , μ — постоянные плотность и вязкость расплава кварца; $R_0(t)$ — радиус кварцевой заготовки; $R_s(t)$ и $V_s(t)$ — функции, отвечающие начальному состоянию системы; $V_0(t)$ и $V_L(t)$ — скорости подачи заготовки и вытяжки волокна. Предположим, что $t \in [0, \tau]$, $z \in [0, L]$. Обозначим через Ω область с длиной, изменяющейся в пределах отрезка $[0, L]$, через Ω_t — декартово произведение $[0, \tau] \times [0, L]$, через Γ_t — кусочно-гладкую границу Ω_t , при этом $\Gamma_0 = \Gamma_t|_{t=0}$, $\Gamma_1 = \Gamma_t|_{z=0}$, $\Gamma_2 = \Gamma_t|_{z=L}$. Уравнения (1) выполняются внутри области Ω_t , условия (2) и (3) — на частях границы Γ_t . Введем необходимые в дальнейшем пространства: $L_2(\Omega_t)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом на Ω_t ; $W_2^1(\Omega_t)$ — пространство функций из $L_2(\Omega_t)$, имеющих обобщенную первую производную, также принадлежащую $L_2(\Omega_t)$.

Построим обобщенное решение.

Определение. Обобщенным решением задачи (1)–(3) назовем ограниченные в Ω_t функции $R(t, z)$ и $V(t, z)$, при этом:

– для всякой функции $\varphi(t, z) \in W_2^1(\Omega_t)$ такой, что $\varphi(\tau, z) = 0$, $\varphi(t, z)|_{\Gamma_2} = 0$, выполняется соотношение

$$(R, \varphi_t)_{L_2(\Omega_t)} = -(R, (\varphi \cdot V)_z)_{L_2(\Omega_t)} - \frac{1}{2}(V, (\varphi \cdot R)_z)_{L_2(\Omega_t)} - (R_0, \varphi)_{L_2(\Gamma_0)} - \frac{3}{2}(V_0, \varphi \cdot R_0)_{L_2(\Gamma_1)};$$

– для всякой функции $\psi(t, z) \in W_2^1(\Omega_t)$, такой, что $\psi(\tau, z) = 0$, $\psi(t, z)|_{\Gamma_1} = \psi(t, z)|_{\Gamma_2} = 0$, имеет место равенство

$$-(V, (\psi \cdot R^2))_t_{L_2(\Omega_t)} = -\frac{3\mu}{\rho}(R^2 \cdot V_z, \psi_z)_{L_2(\Omega_t)} + (V_s, R_0^2 \cdot \psi)_{L_2(\Gamma_0)}.$$

Здесь для краткости в обозначении функций независимые аргументы t и z опускаются. Очевидно, что всякое классическое решение начально-краевой задачи (1)–(3) является обобщенным и, наоборот, всякое обобщенное решение есть классическое.

Описав состояние системы (1)–(3), сформулируем задачу управления. Пусть требуется удерживать систему около состояния, в котором минимальны отклонения геометрических характеристик вытягиваемой кварцевой нити (например, радиуса волокна) от некоторых оптимальных значений при условии, что скорость намотки волокна находится в заданных рамках. Фактически это означает, что управляющим параметром является введенная выше функция времени $V_L(t)$, выступающая в (3) в роли граничного условия, а наблюдаемым параметром — радиус готового волокна $R(t, L)$. Движение системы при заранее определенных значениях скоростей и радиусов будем называть программным движением, а соответствующее ему управление — программным управлением.

Известно [14], что в большом числе случаев анализ состояния нелинейной системы можно заменить анализом состояния системы, линеаризованной в окрестности ее стационарного состояния. Стационарное значение радиуса волокна удобно рассматривать в этом случае в роли оптимальной геометрической характеристики.

Линеаризуем уравнения (1), полагая, что с учетом изменений радиус струи $R(t, z)$ и скорость $V(t, z)$, а значит, и функция управления в общей форме $u(t, z)$, описываются следующими зависимостями:

$$R(t, z) = R_{st}(z)(1 + \tilde{R}(t, z)), \quad (4)$$

$$V(t, z) = V_{st}(z)(1 + \tilde{V}(t, z)), \quad (5)$$

$$u(t, z) = u_{st}(z)(1 + \tilde{u}(t, z)). \quad (6)$$

Здесь $R_{st}(z)$, $V_{st}(z)$ отвечают программному стационарному движению, $u_{st}(z)$ — программному управлению, соответствующему стационарному режиму; $\tilde{R}(t, z)$, $\tilde{V}(t, z)$ — это отклонения (возмущения) фактического движения от программного, а $\tilde{u}(t, z)$ — отклонение реального управления от программного. Подставляя указанные выше зависимости (4)–(6) в систему (1)–(3) и пренебрегая нелинейными слагаемыми, приходим к задаче:

$$\begin{cases} -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial t} = V_{st} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} + \frac{V_{st}}{2} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \frac{3\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial z^2} + \beta(z) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} + 2\beta(z) \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z}, \\ \tilde{R}|_{t=0} = \tilde{R}_s(z), \quad \tilde{R}|_{z=0} = 0, \\ \tilde{V}|_{t=0} = 0, \quad \tilde{V}|_{z=0} = 0, \quad \tilde{V}|_{z=L} = \tilde{u}(t), \end{cases} \quad (7)$$

где коэффициент $\beta(z)$ имеет вид:

$$\beta(z) = \frac{3\mu}{\rho} \frac{1}{V_{st}} \frac{\partial V_{st}}{\partial z}. \quad (8)$$

Полученная таким образом начально-краевая задача (7) описывает состояния, которые можно трактовать как отклонения (в долях) от стационарных программных состояний исходной системы (1)–(3).

На $L_2^+(\Gamma_2) = \{z(t) \in L_2(0, \tau) : z(t) \geq 0\}$ введем в рассмотрение функционал

$$F(\tilde{u}) = \int_0^\tau \tilde{R}^2(t, L) dt + \alpha \|\tilde{u}(t)\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 = \int_0^\tau \tilde{R}^2(t, L) dt + \alpha \int_0^\tau \tilde{u}^2(t, L) dt \rightarrow \min, \quad (9)$$

где α — некоторое положительное число. Тогда задача (7), (9) представляет собой задачу с граничным управлением и граничным наблюдением, заключающуюся в отыскании минимального значения функционала, когда управляющий параметр \tilde{u} принимает значения из пространства функций $L_2^+(\Gamma_2)$ при $\alpha > 0$.

3. Оптимизационная система

Необходимые условия существования решения как исходной оптимизационной задачи, так и задачи (7), (9), полученной в результате линеаризации, именуется системой оптимальности или оптимизационной системой. В данном случае имеется возможность записать оптимизационную систему в форме краевой задачи для исходных уравнений и уравнений для так называемых сопряженных состояний [15].

Вопросы существования решений задач оптимизации для параболических систем с целевыми функционалами в специальных формах обсуждались в [8, 15–17]. Отметим, что важными свойствами функционала (9) являются выпуклость, полунепрерывность снизу и коэрцитивность. В силу этого существует по крайней мере одна функция $\tilde{u}_0(t)$ (оптимальный элемент), при которой функционал будет достигать своей точной нижней грани:

$$F(\tilde{u}_0) = \min_{\tilde{u} \in L_2(\Gamma_2)} F(\tilde{u}(t)). \quad (10)$$

Согласно критерию оптимальности значение дифференциала Гато [8, 15, 17] при оптимальном элементе \tilde{u}_0 обратится в нуль:

$$\frac{1}{2} \langle F'(\tilde{u}_0), w - \tilde{u}_0 \rangle = \int_0^\tau \left(\tilde{R} \dot{\tilde{R}} \right) \Big|_{z=L} dt + \alpha \int_0^\tau (\tilde{u}_0 \delta \tilde{u}_0) \Big|_{z=L} dt = 0. \quad (11)$$

Здесь: $\dot{\tilde{R}} = \left(\tilde{R} \right)'_{\tilde{u}} \Big|_{\tilde{u}=\tilde{u}_0}$; $\langle \cdot \rangle$ — оператор слабого дифференцирования; $\delta \tilde{u}_0 = w - \tilde{u}_0$ — вариация функции управления.

Нужно отметить, что дифференциальная задача в постановке (7) является линейной относительно функции управления $\tilde{u}(t)$. Таким образом, функция состояния системы $\tilde{R}(t, z)$ может быть представлена как результат действия некоторого линейного оператора (обозначим его Λ) на функцию управления $\tilde{u}(t)$:

$$\tilde{R}(z, t) = \Lambda(\tilde{u}(t)) = \Lambda(\tilde{u}). \quad (12)$$

Используя свойство линейности оператора Λ , получим:

$$\int_0^{\tau} \Lambda \tilde{u}_0 \Lambda(w - \tilde{u}_0) dt + \alpha \int_0^{\tau} \tilde{u}_0 (w - \tilde{u}_0) dt = 0. \quad (13)$$

Проварьируем начально-краевую задачу (7) [18, 19]:

$$\begin{cases} -\frac{\partial \dot{\tilde{R}}}{\partial t} = V_{st} \frac{\partial \dot{\tilde{R}}}{\partial z} + \frac{V_{st}}{2} \frac{\partial \dot{\tilde{V}}}{\partial z}, & 1 \\ \dot{\tilde{R}}|_{t=0} = 0, \quad \dot{\tilde{R}}|_{z=0} = 0, & 2 \\ \frac{\partial \dot{\tilde{V}}}{\partial t} = \frac{3\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \dot{\tilde{V}}}{\partial z^2} + \beta(z) \frac{\partial \dot{\tilde{V}}}{\partial z} + 2\beta(z) \frac{\partial \dot{\tilde{R}}}{\partial z}, & 3 \\ \dot{\tilde{V}}|_{t=0} = 0, \quad \dot{\tilde{V}}|_{z=0} = 0, \quad \dot{\tilde{V}}|_{z=L} = \delta \tilde{u}_0. & 4 \end{cases} \quad (14)$$

Умножим уравнение неразрывности (14)₁ на произвольную функцию $q(t, z) \in L_2(\Omega_t)$, а уравнение движения (14)₃ — на произвольную функцию $p(t, z) \in L_2(\Omega_t)$, проинтегрируем оба уравнения по области Ω_t и найдем их сумму. Результатом сложения будет следующее выражение:

$$\begin{aligned} -\int_0^{\tau} \int_0^L \frac{\partial \dot{\tilde{R}}}{\partial t} q dz dt + \int_0^{\tau} \int_0^L \frac{\partial \dot{\tilde{V}}}{\partial t} p dz dt &= \int_0^{\tau} \int_0^L V_{st} \frac{\partial \dot{\tilde{R}}}{\partial z} q dz dt + \int_0^{\tau} \int_0^L \frac{V_{st}}{2} \frac{\partial \dot{\tilde{V}}}{\partial z} q dz dt + \frac{3\mu}{\rho} \int_0^{\tau} \int_0^L \frac{\partial^2 \dot{\tilde{V}}}{\partial z^2} p dz dt + \\ &+ \int_0^{\tau} \int_0^L \beta(z) \frac{\partial \dot{\tilde{V}}}{\partial z} p dz dt + 2 \int_0^{\tau} \int_0^L \beta(z) \frac{\partial \dot{\tilde{R}}}{\partial z} p dz dt. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой Грина для слагаемых, содержащих производные функций $\dot{\tilde{R}}$ и $\dot{\tilde{V}}$. Получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} \int_0^L \dot{\tilde{R}} \frac{\partial q}{\partial t} dz dt - \int_0^{\tau} \dot{\tilde{R}} q|_0^{\tau} dz - \int_0^{\tau} \int_0^L \dot{\tilde{V}} \frac{\partial p}{\partial t} dz dt + \int_0^{\tau} \dot{\tilde{V}} p|_0^{\tau} dz &= - \int_0^{\tau} \int_0^L \dot{\tilde{R}} \frac{\partial (V_{st} q)}{\partial z} dz dt + \int_0^{\tau} \dot{\tilde{R}} V_{st} q|_0^{\tau} dt - \\ - \int_0^{\tau} \int_0^L \dot{\tilde{V}} \frac{\partial (V_{st} q/2)}{\partial z} dz dt + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \dot{\tilde{V}} V_{st} q|_0^{\tau} dt + \frac{3\mu}{\rho} \int_0^{\tau} \int_0^L \dot{\tilde{V}} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} dz dt + \frac{3\mu}{\rho} \int_0^{\tau} \frac{\partial \dot{\tilde{V}}}{\partial z} p|_0^{\tau} dt - \frac{3\mu}{\rho} \int_0^{\tau} \dot{\tilde{V}} \frac{\partial p}{\partial z} |_0^{\tau} dt - \\ - \int_0^{\tau} \int_0^L \dot{\tilde{V}} \frac{\partial (\beta(z) p)}{\partial z} dz dt + \int_0^{\tau} \dot{\tilde{V}} \beta(z) p|_0^{\tau} dt - 2 \int_0^{\tau} \int_0^L \dot{\tilde{R}} \frac{\partial (\beta(z) p)}{\partial z} dz dt + 2 \int_0^{\tau} \dot{\tilde{R}} \beta(z) p|_0^{\tau} dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Потребуем, чтобы функции $q(t, z)$ и $p(t, z)$ удовлетворяли следующей дифференциальной задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (V_{st} q)}{\partial z} + 2 \frac{\partial (\beta(z) p)}{\partial z} = 0, \\ q|_{t=\tau} = 0, \quad q|_{z=L} = \frac{\dot{\tilde{R}}}{V_{st}}, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (V_{st} q/2)}{\partial z} - \frac{3\mu}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial (\beta(z) p)}{\partial z} = 0, \\ p|_{t=\tau} = p|_{z=0} = p|_{z=L} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Тогда, с учетом (14) и (16), интегральное соотношение (15) примет вид:

$$\int_0^\tau (\tilde{R}\dot{\tilde{R}})\Big|_{z=L} dt = \frac{3\mu}{\rho} \int_0^\tau \left(\delta\tilde{u}_0 \frac{\partial p}{\partial z} \right)\Big|_{z=L} dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau (\tilde{R}\delta\tilde{u}_0)\Big|_{z=L} dt.$$

Подставляя его в (11), получим:

$$-\alpha \int_0^\tau (\tilde{u}_0 \delta\tilde{u}_0)\Big|_{z=L} dt = \frac{3\mu}{\rho} \int_0^\tau \left(\delta\tilde{u}_0 \frac{\partial p}{\partial z} \right)\Big|_{z=L} dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau (\tilde{R}\delta\tilde{u}_0)\Big|_{z=L} dt.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{u}_0(t) = \frac{1}{2\alpha} \tilde{R}\Big|_{z=L} - \frac{3\mu}{\alpha\rho} \frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{z=L}.$$

Окончательно система оптимальности принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial t} = V_{st} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} + \frac{V_{st}}{2} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}, \\ \tilde{R}\Big|_{t=0} = \tilde{R}_s(z), \quad \tilde{R}\Big|_{z=0} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \frac{3\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial z^2} + \beta(z) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} + 2\beta(z) \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z}, \\ \tilde{V}\Big|_{t=0} = 0, \quad \tilde{V}\Big|_{z=0} = 0, \quad \tilde{V}\Big|_{z=L} = \frac{1}{2\alpha} \tilde{R} - \frac{3\mu}{\alpha\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (V_{st} q)}{\partial z} + 2 \frac{\partial (\beta(z) p)}{\partial z} = 0, \\ q\Big|_{t=\tau} = 0, \quad q\Big|_{z=L} = \frac{\tilde{R}}{V_{st}}, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial ((V_{st}/2) q)}{\partial z} - \frac{3\mu}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial (\beta(z) p)}{\partial z} = 0, \\ p\Big|_{t=\tau} = 0, \quad p\Big|_{z=0} = 0, \quad p\Big|_{z=L} = 0. \end{array} \right. \quad (17)$$

4. Численная реализация и обсуждение результатов

Численное решение системы оптимальности (17) проводилось с использованием метода конечных элементов в пакете мультифизического моделирования Comsol Multiphysics. Процесс решения данной системы условно делился на несколько этапов:

- поиск стационарного решения (функций $R_{st}(z)$ и $V_{st}(z)$); функции были найдены из решения системы (1) с начальными и граничными условиями (2), (3);
- определение функции $\beta(z)$, зависящей от стационарных состояний;
- непосредственное решение системы оптимальности (17) и отыскание функции оптимального управления $\tilde{u}_0(t)$.
- анализ полученных результатов.

Опишем процесс реализации несколько подробнее.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (1) с начальными и граничными условиями (2), (3) позволяет установить решение, то есть функции $R_{st}(z)$, $V_{st}(z)$ и, следовательно, коэффициент $\beta(z)$ в аналитическом виде:

$$R_{st} = 0,0075/\sqrt{e^{5,3648z}}, \quad V_{st} = 0,2e^{5,3648z}, \quad \beta = 73,1563.$$

Система оптимальности была решена для следующих значений параметров: $t = 5$ с; $\rho = 2200$ кг/м³; $\mu = 10000$ Па·с; $L = 0,3$ м. Возмущение радиуса волокна от его стационарного состояния задавалось в виде

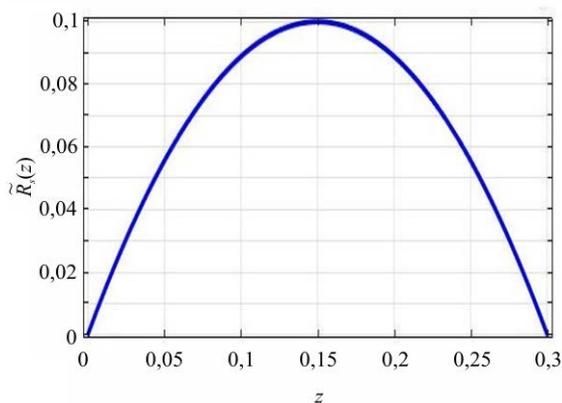


Рис. 2. Возмущение радиуса вытяжки (в долях от стационарного решения)

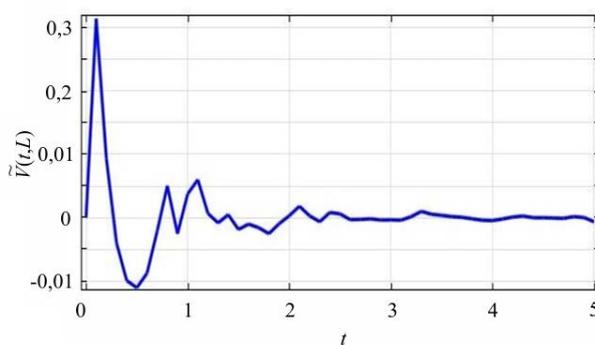


Рис. 3. Функция оптимального управления

выпуклой вверх функции, изображенной на рисунке 2. Максимальное отклонение радиуса волокна от его стационарного (программного) состояния составило 10%.

Особое внимание обращалось на выбор значения α . Значения параметра α необходимо определить заранее, либо подобрать путем решений тестовых задач. На основе последнего в данной работе его значение равнялось 0,5.

На рисунке 3 представлена полученная функция граничного управления $\tilde{V}(t,L)$.

Рассмотрим эту же задачу в предположении, что функция $\tilde{R}_s(z)$, задающая начальное возмущение радиуса волокна, определяется теперь выпуклой вниз функцией и имеет вид, показанный на рисунке 4. Максимальное отклонение радиуса волокна от его стационарного (программного) состояния в этом случае также составляет 10%. Из решения системы оптимальности (17) при тех же значениях входных параметров имеем функцию $\tilde{V}(t,L)$ в виде, представленном на рисунке 5.

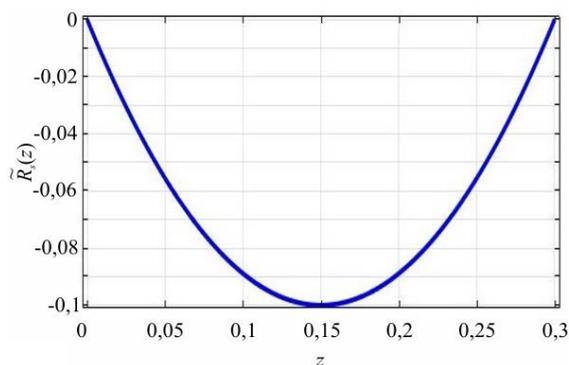


Рис. 4. Возмущение радиуса вытяжки (в долях от стационарного решения)

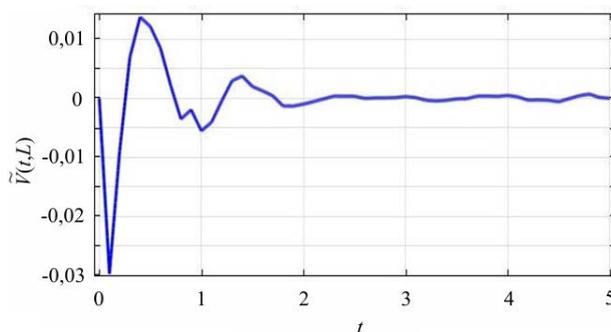


Рис. 5. Функция оптимального управления

Анализируя результаты решения системы оптимальности (16) с двумя разными, но «зеркальными» относительно друг друга начальными условиями для уравнения состояния, можно заметить, что полученные функции управления (Рис. 3 и 5) практически являются также зеркальными отражениями. Отметим, что значения корректировки скорости намотки (значения функции управления) варьируются в пределах от -3 до $+3\%$, что соответствует возможностям реального производства.

Целевой функционал (9) был рассчитан при различных значениях функции управления. В частности, при постоянстве скорости

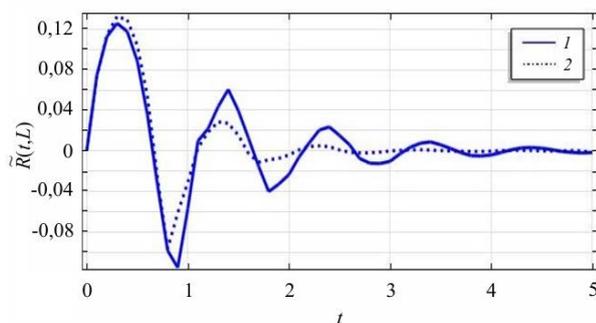


Рис. 6. К сравнению функций отклонения радиусов готового волокна для двух режимов вытяжки: при $\dot{u}=0$ (кривая 1); при оптимальном значении функции управления (2)

намотки готового волокна ($\tilde{u} = 0$) — режим 1, значение функционала превысило значение, отвечающее оптимальному состоянию $\tilde{u}_0(t) = \frac{1}{2\alpha} \tilde{R} - \frac{3\mu}{\alpha\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=L}$ (режиму 2). На рисунке 6 показаны отклонения радиусов готового волокна для этих режимов вытяжки.

Как можем видеть, в режиме оптимального управления процесс уже со 2-й секунды имеет тенденцию к стабилизации. Отклонения радиуса от его стационарного состояния R_{st} уменьшаются.

5. Заключение

В работе сформулирована, обоснована и решена в одномерной постановке задача оптимального стабилизирующего управления процессом производства кварцевых оптических волокон. В качестве функции управления выступает скорость намотки готового волокна. Для поставленной нелинейной задачи выполнена линеаризация в окрестности стационарного состояния и получена система оптимальности в сильной форме, то есть в форме краевой задачи в частных производных для отклонений радиуса и скорости вытяжки, а также для их сопряженных состояний. Рассмотрено два разных начальных условия, задающих возмущение радиуса относительно его стационарного (программного) состояния. В обоих случаях представлены функции оптимального управления.

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
2. Лионс Ж.-Л. Об оптимальном управлении распределенными системами // УМН. 1973. Т. 28, № 4(172). С. 15-46. (English version [DOI](#))
3. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
4. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
5. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004. 504 с.
6. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 480 с.
7. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 480 с.
8. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с.
9. Рапопорт Э.Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2005. 292 с.
10. Кубышкин В.А., Финягина В.И. Подвижное управление в системах с распределенными параметрами. М.: СИНТЕГ, 2005. 216 с.
11. Провоторов В.В. Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2014. № 3. С. 154-163.
12. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
13. Ярин А.Л. О возникновении автоколебаний при формировании волокна // ПММ. 1983. № 1. С. 82-88. (English version [DOI](#))
14. Васильев В.Н., Дульнев Г.Н., Наумчик В.Д. Нестационарные процессы при формировании оптического волокна. 1. Устойчивость процесса вытяжки // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 55, № 2. С. 284-292. (English version [DOI](#))
15. Шумкова Д.Б. Прикладная математика: оптимальное управление распределенными системами в экономике и технике: учебно-метод. пос. Пермь: ПГТУ, 2009. 50 с.
16. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
17. Шумкова Д.Б. Оптимальное управление в задачах с неизвестными границами и подвижными источниками / Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Пермь, ПГТУ, 2006. 111 с.
18. Первадчук В.П., Шумкова Д.Б. Оптимальное управление в задачах с подвижным тепловым источником // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физ.-мат. науки. 2010. № 2(98). С. 37-44.
19. Pervadchuk V., Vladimirova D., Gordeeva I. Optimal control of distributed systems in problems of quartz optical fiber production // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1926. 020036. [DOI](#)

References

1. Lions J.L. *Optimal control of systems governed by partial differential equations*. Berlin, Springer, 1971. 400 p.
2. Lions J.-L. The optimal control of distributed systems. *Russian Math. Surveys*, 1973, vol. 28, no. 4(172), pp. 13-46. [DOI](#)
3. Butkovskiy A.G. *Teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* [The theory of optimal control of systems with distributed parameters]. М.: Nauka, 1965. 474 p.
4. Butkovskiy A.G. *Metody upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* [Control methods for systems with distributed parameters]. М.: Nauka, 1975. 568 p.
5. Egorov A.I. *Osnovy teorii upravleniya* [Fundamentals of control theory]. М.: Fizmatlit, 2004. 504 p.

6. Lur'ye K.A. *Optimal'noye upravleniye v zadachakh matematicheskoy fiziki* [Optimal control in problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1975. 480 p.
7. Sirazetdinov T.K. *Optimizatsiya sistem s raspredelennymi parametrami* [Optimization of systems with distributed parameters]. M.: Nauka, 1977. 480 p.
8. Fursikov A.V. *Optimal'noye upravleniye raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya* [Optimal control of distributed systems. Theory and applications]. Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1999. 352 p.
9. Rapoport E.Ya. *Analiz i sintez sistem avtomaticheskogo upravleniya s raspredelennymi parametrami* [Analysis and synthesis of automatic control systems with distributed parameters]. M.: Vysshaya shkola, 2005. 292 p.
10. Kubyshekin V.A., Finyagina V.I. *Podvizhnoye upravleniye v sistemakh s raspredelennymi parametrami* [Mobile control in systems with distributed parameters]. M.: SINTEG, 2005. 216 p.
11. Provotorov V.V. Optimum control of parabolic system with the distributed parameters on the graph. *Vestnik S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr. – Bulletin of Saint-Petersburg university. Applied mathematics. Computer science. Management processes*, 2014, no. 3, pp. 154-163.
12. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineynyye i kvazilineynyye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and quasilinear parabolic equations]. M.: Nauka, 1967. 736 p.
13. Iarin A.L. On generation of auto-oscillations during fibers formation. *J. Appl. Math. Mech.*, 1983, vol. 47, no. 1, pp. 59-64. [DOI](#)
14. Vasil'ev V.N., Dul'nev G.N., Naumchi, V.D. Nonstationary processes in optical fiber formation. 1. Stability of the drawing process. *Journal of Engineering Physics*, 1988, vol. 55, pp. 918-924. [DOI](#)
15. Shumkova D.B. *Prikladnaya matematika: optimal'noye upravleniye raspredelennymi sistemami v ekonomike i tekhnike* [Applied mathematics: optimal control of distributed systems in economics and technology]. Perm: Perm State Technical University, 2009. 50 p.
16. Ekeland I., Temam R. *Convex analysis and variational problems*. Amsterdam, Elsevier, 1976. 400 p.
17. Shumkova D.B. *Optimal'noye upravleniye v zadachakh s neizvestnymi granitsami i podvizhnymi istochnikami* [Optimal control in problems with unknown boundaries and mobile sources]. PhD Dissertation, Perm State Technical University, Perm, 2006. 111 p.
18. Pervadchuk V.P., Shumkova D.B. Optimal'noye upravleniye v zadachakh s podvizhnym teplovym istochnikom [Optimal control in problems with a movable heat source]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskiye nauki – Scientific and technical statements SPbGPU. Physics and Mathematics*, 2010, no. 2(98), pp. 37-44.
19. Pervadchuk V., Vladimirova D., Gordeeva I. Optimal control of distributed systems in problems of quartz optical fiber production. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1926, 020036. [DOI](#)

Поступила в редакцию 25.08.2018, после доработки 24.09.2018; принята к опубликованию 26.10.2018

Сведения об авторах

Первадчук Владимир Павлович, д-р, проф., зав. каф., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, Пермский край, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29; e-mail: pervadchuk@mail.ru

Владимирова Дарья Борисовна, к-фмн., доц., ПНИПУ; e-mail: da0807@mail.ru

Гордеева Ирина Викторовна, асп., ст. преп., ПНИПУ; e-mail: boxofemails123@gmail.com