

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.4.27](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.27)

УДК 536.25

## ВТОРИЧНЫЕ РЕЖИМЫ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ С ВЯЗКОСТЬЮ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ, В ПЛОСКОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ

Т.П. Любимова<sup>1,2</sup><sup>1</sup> *Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*<sup>2</sup> *Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация*

В работе исследованы вторичные режимы конвекции в жидкости с вязкостью, линейно зависящей от температуры, между двумя вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разных температур. Границы слоя считались твердыми и идеально теплопроводными. Задача решалась численно методом конечных разностей. Расчеты проведены для чисел Прандтля, равных единице и двадцати. В первом случае в жидкости с постоянной вязкостью потеря устойчивости основного течения связана с развитием гидродинамических возмущений, представляющих собой неподвижные вихри на границе встречных потоков. Во втором случае за неустойчивость основного течения ответственны колебательные возмущения, являющиеся тепловыми волнами. Получены зависимости числа Нуссельта от числа Грасгофа и данные о структуре вторичных течений. Найдено, что при числе Прандтля, равном единице, число Нуссельта монотонно растет с увеличением числа Грасгофа, причем вблизи порога неустойчивости основного течения рост происходит по корневому закону, то есть вторичное течение возникает мягко. Вторичные структуры выглядят как дрейфующие вихри на границе встречных потоков, что после переходного процесса приводит к установлению стационарных колебаний теплового потока. При числе Прандтля, равном двадцати, связь числа Нуссельта с числом Грасгофа носит немонотонный характер: на кривой присутствуют участки, на которых число Нуссельта равно единице, и участки, на которых наблюдается увеличение/уменьшение числа Нуссельта с ростом числа Грасгофа. Такое поведение объясняется тем, что при числе Прандтля, равном двадцати, имеются две моды неустойчивости: колебательная и монотонная, причем область нарастающих колебательных возмущений при фиксированном волновом числе ограничена как сверху, так и снизу.

*Ключевые слова:* вертикальный слой, зависящая от температуры вязкость, вторичные режимы конвекции, число Нуссельта

## SECONDARY REGIMES OF CONVECTION OF FLUID WITH TEMPERATURE-DEPENDENT VISCOSITY IN INFINITE VERTICAL LAYER

T.P. Lyubimova<sup>1,2</sup><sup>1</sup> *Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*<sup>2</sup> *Perm State University, Perm, Russian Federation*

The secondary regimes of convection in the fluid having temperature-dependent viscosity and confined between two vertical parallel plates maintained at different temperatures are investigated. The boundaries of the layer are considered as rigid and perfectly conductive. The problem is solved numerically by the finite difference method. Calculations are performed for the Prandtl number values equal to unity and twenty. In the first case, for the fluid with constant viscosity, the loss of stability of the base flow is related to the development of hydrodynamic perturbations in the form of immovable vortices at the boundary of counter-current flows. In the second case, oscillatory perturbations in the form of thermal waves are responsible for the instability. The dependence of the Nusselt number on the Grashof number and the data on the structure of secondary flows are obtained. It is found that at the Prandtl number equal to unity the Nusselt number grows monotonically with increasing Grashof number and near the instability threshold of the base flow it increases according to the square root law, i.e. the bifurcation is supercritical. The secondary flows represent drifting vortices at the boundary of counter-current flows which results in establishing, after the transient period, the stationary oscillations of the heat flux in time. At the Prandtl number equal to 20, the dependence of the Nusselt number on the Grashof number is non-monotonic: it includes the domains with the Nusselt number equal to unity and the domains of increase or decrease of the Nusselt number with the Grashof number. This behavior is explained by the fact that at this Prandtl number value there are two instability modes (oscillatory and monotonic) and the region of the growing oscillatory perturbations at the fixed wave number value is bounded both from below and from above.

*Key words:* vertical layer, temperature-dependent viscosity, secondary regimes of convection, Nusselt number

### 1. Введение

При наличии горизонтального градиента температуры механическое равновесие жидкости невозможно, возникает конвективное движение, интенсивность которого растет с увеличением разности температур. По сравнению с неустойчивостью равновесия явление неустойчивости конвективного течения обладает рядом особенностей. Этот вид неустойчивости — результат развития возмущений на фоне движущейся жидкости, поэтому важнейшим фактором является взаимодействие возмущений с основным потоком. Исследования показали, что существует три механизма неустойчивости конвективных течений. Первый — связан с передачей энергии от основного течения к возмущениям скорости при больших скоростях. Вторым — обусловлен стратификацией, которая может быть следствием условий нагрева или возникает вследствие течения определенной структуры. Третий механизм заключается в генерации нарастающих волн, и для него существенно взаимодействие нестационарных тепловых и гидродинамических возмущений.

Типичным конвективным течением, на примере которого отчетливо проявляются основные особенности неустойчивости, служит течение в слое между вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разных температур. Устойчивость конвективного течения в слое жидкости с постоянной вязкостью впервые рассмотрена Г.З. Гершуни [1, 2]. Он показал, что характеристики конвекции в этом случае зависят от числа Прандтля и числа Грасгофа.

Обычно при исследовании свободной тепловой используется приближение Буссинеска, в котором переменность плотности учитывается только в слагаемом, описывающем подъемную силу в уравнении движения. При этом в большинстве случаев считается, что коэффициенты вязкости и теплопроводности постоянны. Однако во многих ситуациях при определении условий возникновения неустойчивости в потоках важно принимать во внимание непостоянство теплофизических параметров. Наиболее существенна температурная зависимость вязкости. Ее учет особенно значим при изучении устойчивости течений высоковязких жидкостей, поскольку в таких жидкостях интенсивная конвекция и неустойчивость возникают при больших разностях температур.

В плоском вертикальном слое жидкости с вязкостью, зависящей от температуры, и разными температурами на границах возможно плоскопараллельное течение, в котором сохраняется обычное линейное распределение температуры, но возникает деформация поля скорости [3], обусловленная температурной неоднородностью вязкости. Первая попытка решения задачи устойчивости конвективного течения жидкости с вязкостью, зависящей от температуры, в вертикальном слое при нагреве сбоку предпринята в работе [4], где применен метод Галеркина с простейшими аппроксимациями амплитуд. Сделан вывод о понижении порога устойчивости. Решение задачи методом пошаговой ортогонализации, обеспечивающим достаточную точность получения характеристик устойчивости, осуществлено в [5] (также см. [6]).

В работе [7] анализировалась линейная устойчивость механического равновесия в плоском горизонтальном слое жидкости с вязкостью, нелинейно зависящей от температуры. Результаты хорошо согласуются с экспериментом, проведенным авторами для водно-глицериновой смеси. В [8] выполнен линейный анализ устойчивости конвективного течения жидкости с вязкостью, являющейся экспоненциальной функцией температуры, в плоском наклонном слое.

Цель настоящей работы состоит в исследовании вторичных режимов конвекции в жидкости с переменной вязкостью между двумя вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разных температур.

## 2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим вертикальный слой вязкой несжимаемой жидкости, заключенный между двумя параллельными твердыми плоскостями, на которых поддерживаются разные постоянные температуры. Введем декартову прямоугольную систему координат следующим образом: ось  $z$  направим вертикально вверх, ось  $x$  — перпендикулярно границам слоя, начало координат поместим посередине слоя. Будем полагать, что неоднородности температуры малы; в этом случае можно считать, что плотность и динамическая вязкость жидкости линейно меняются с ростом температуры:  $\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)]$ ,  $\eta = \eta_0 [1 - \varepsilon(T - T_0)]$ , где  $T_0$  — температура, принимаемая за начало отсчета.

Для описания поведения жидкости будем использовать систему уравнений свободной тепловой конвекции в приближении Буссинеска:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + g \beta T \boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T &= \chi \Delta T, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости,  $p$  — давление,  $T$  — температура, отсчитываемая от  $T_0$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  — тензор вязких напряжений  $\tau_{ik} = \eta(T) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$ ,  $\rho_0$  — плотность при температуре  $T_0$ ,  $\chi$  — коэффициент температуропроводности,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный вектор, направленный вертикально вверх.

Выберем следующие единицы измерения: для длины — полутолщину слоя  $d$ , для скорости —  $\eta_0 / (\rho_0 d)$ , для времени —  $\rho_0 d^2 / \eta_0$ , для давления —  $\eta_0^2 / (\rho_0 d)$ , для температуры — полуразность температур на вертикальных границах  $\Theta$ . Уравнения в безразмерной форме принимают вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \operatorname{Gr} T \boldsymbol{\gamma}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T = \operatorname{Pr}^{-1} \Delta T, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \tau_{ik} = (1 - \alpha T) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad (3)$$

и содержат следующие безразмерные параметры: число Грасгофа  $\operatorname{Gr} = g\beta\Theta d^3 / (\eta_0/\rho_0)^2$ , число Прандтля  $\operatorname{Pr} = \eta_0/(\rho_0\chi)$  и параметр  $\alpha = \varepsilon/\Theta$ , определяющий зависимость вязкости от температуры. Для безразмерных переменных сохранены прежние обозначения.

Ограничимся рассмотрением плоской задачи:  $v_y = 0$ ,  $\partial/\partial y = 0$ . В этом случае удобно ввести функцию тока  $\psi$ , связанную с компонентами скорости соотношениями:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4)$$

и завихренность течения  $\varphi = \operatorname{rot}_y \mathbf{v} = -\Delta \psi$ .

Применяя к уравнению движения операцию  $\operatorname{rot}_y$  и используя выражения (4), получим уравнения в терминах функции тока и завихренности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= f \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \operatorname{Gr} \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} &= \operatorname{Pr}^{-1} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \\ \varphi &= - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \quad f = 1 - \alpha T. \end{aligned} \quad (5)$$

На твердых границах слоя выполняются условия прилипания и заданы разные постоянные температуры:

$$x = \mp 1: \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad T = \pm 1. \quad (6)$$

### 3. Метод решения

Задача (5), (6) решалась численно методом конечных разностей. При дискретизации уравнений все пространственные производные аппроксимировались центральными разностями. Использовалась явная конечно-разностная схема. Решение уравнения Пуассона для функции тока находилось методом последовательной верхней релаксации. Значения завихренности на вертикальных границах вычислялись по формуле Тома:  $\varphi_{0,k} = -(2/h_x^2)\psi_{1,k}$  [9]. Размер расчетной области по вертикали —  $H$ , соответствовал длине волны наиболее опасных возмущений. На горизонтальных границах области для всех функций ставились условия периодичности.

В расчетах использовалась равномерная сетка с прямоугольными ячейками. Шаг сетки по горизонтали составлял  $2/30$ , по вертикали —  $H/150$ . Шаг по времени выбирался из условия устойчивости и принимался равным  $\Delta t = h_x^2 / (32(1 + |\psi_{\max}|))$  [10].

Для определения порога неустойчивости плоскопараллельного течения решалась полная система нестационарных нелинейных уравнений; на каждом временном шаге по полю температуры находилось число Нуссельта, которое должно быть равным единице для плоскопараллельного течения и превышать единицу для вторичных режимов течения. Критическое число Грасгофа находилось по зависимости  $\operatorname{Nu}(\operatorname{Gr})$ .

#### 4. Основное течение. Линейная устойчивость основного течения

Известно, что в слое жидкости, заключенном между двумя параллельными плоскостями, нагретыми до разных температур, возникает подъемно-опускное течение, которое является устойчивым до тех пор, пока число Грасгофа не достигнет некоторого критического значения. При  $Pr = 1$  для жидкости с постоянной вязкостью ( $\alpha = 0$ ) критическое значение числа Грасгофа составляет примерно 496.

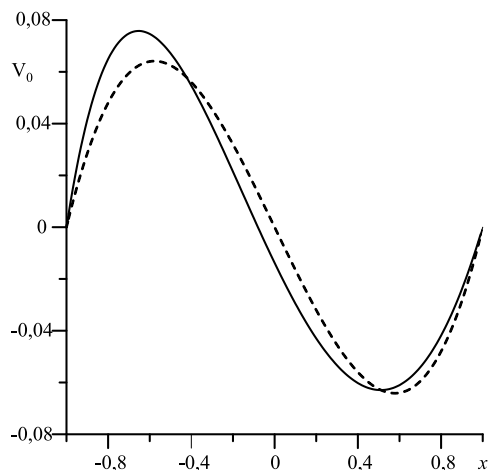


Рис. 1. Профили нормированной скорости основного течения для жидкостей с постоянной (штриховая линия) и переменной (сплошная линия) вязкостями

На рисунке 1 представлены профили скорости основного течения жидкости с постоянной вязкостью ( $\alpha = 0$ ) и жидкости с вязкостью, линейно зависящей от температуры, при  $\alpha = 0,5$  (вязкости у холодной и горячей границ слоя при этом  $\alpha$  отличаются в 3 раза). Как видно, переменность вязкости приводит к несимметричности профиля скорости относительно линии  $x = 0$ : координата, при которой скорость обращается в нуль, смещена к горячей стенке, максимальное значение скорости в левой (более нагретой) половине слоя больше, чем в холодной. Эти результаты качественно соответствуют результатам из [6].

Расчеты, проведенные в [6], показали, что для жидкости с вязкостью, зависящей от температуры, как и для жидкости с постоянной вязкостью, при малых значениях числа Прандтля наиболее опасной является монотонная гидродинамическая мода неустойчивости, проявляющаяся как вихри на границе встречных потоков. При числах Прандтля, больших некоторого значения,

опасной становится колебательная мода неустойчивости, представляющая собой тепловые волны.

На рисунке 2а приведены рассчитанные автором границы устойчивости стационарного плоскопараллельного течения для обеих мод неустойчивости на плоскости параметров «число Прандтля–число Грасгофа» для жидкости с постоянной вязкостью и для жидкости с вязкостью, зависящей от температуры по линейному закону с коэффициентом пропорциональности 0,5. По рисунку видно, что переменность вязкости приводит к дестабилизации стационарного плоскопараллельного течения по отношению к обеим модам неустойчивости: критические значения числа Грасгофа уменьшаются по сравнению со случаем постоянной вязкости. Числа Прандтля  $Pr^*$ , при котором происходит смена типа неустойчивости, ведет себя аналогичным образом.

Рисунок 2б содержит нейтральные кривые  $Gr(k)$  для  $Pr = 20$  и  $\alpha = 0,5$ . Как видно, при этом значении числа Прандтля имеются две моды неустойчивости, причем наиболее опасными являются колебательные возмущения (им соответствует нижняя нейтральная кривая). Отметим, что в приведенном на рисунке диапазоне волновых чисел область чисел Грасгофа, в которой колебательные возмущения нарастают, ограничена не только снизу, но и сверху.

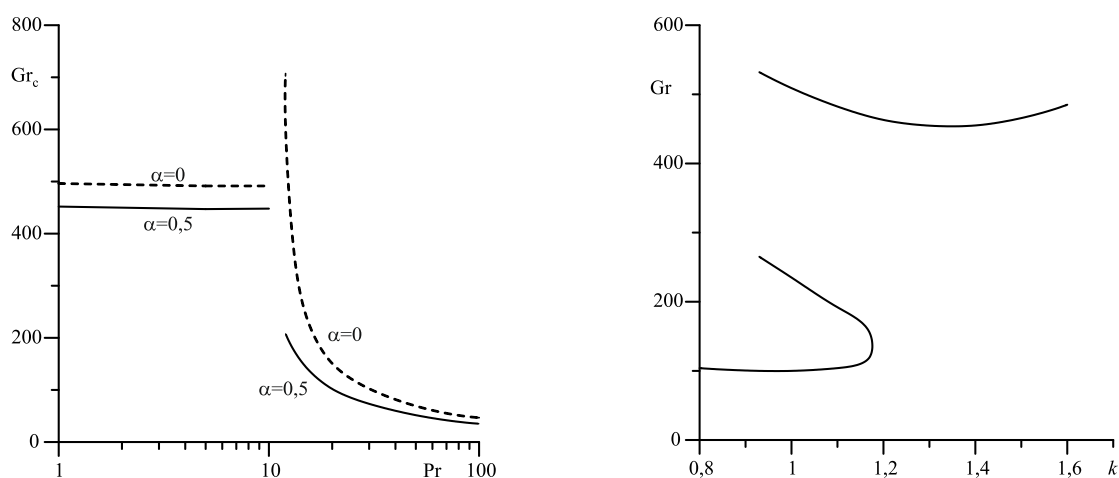


Рис. 2. Зависимости минимального критического числа Грасгофа от числа Прандтля для монотонной и колебательной мод неустойчивости у жидкостей с постоянной и переменной вязкостями (а); нейтральные кривые  $Gr(k)$  при  $Pr = 20$  и  $\alpha = 0,5$  (б)

### 5. Вторичные режимы течения, возникающие в результате неустойчивости стационарного плоскопараллельного течения при малых числах Прандтля

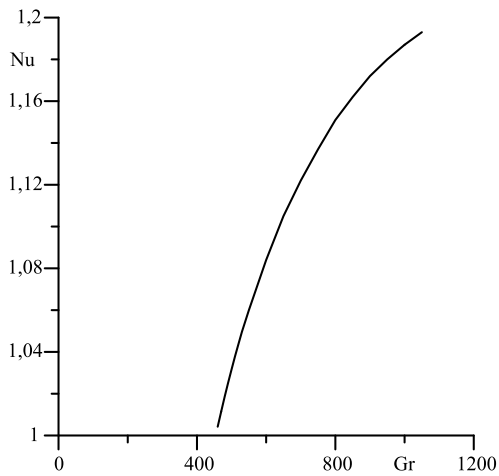


Рис. 3. Зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа для вторичных стационарных режимов конвекции при  $Pr = 1$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $k = 1,4$

Численные расчеты вторичных режимов проводились для двух значений числа Прандтля:  $Pr = 1$  и  $Pr = 20$ . При  $Pr = 1$  потеря устойчивости основного течения связана с развитием гидродинамических возмущений, представляющих собой вихри на границе встречных потоков, при  $Pr = 20$  за неустойчивость основного течения ответственны колебательные возмущения, являющиеся тепловыми волнами.

Обсудим случай  $Pr = 1$ , для которого на рисунке 3 приведена зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа при  $\alpha = 0,5$  и  $k = 1,4$ . Видно, что вблизи порога возникновения вторичного течения число Нуссельта растет с изменением числа Грасгофа по корневому закону, то есть вторичные режимы конвекции возбуждаются мягко. На рисунке 4 показаны линии тока и изотермы вторичных стационарных режимов конвекции при двух значениях числа Грасгофа.

Число  $Gr = 460$  очень близко к пороговому значению 452, определяющему неустойчивость плоскопараллельного течения, поэтому течение почти

не отличается от плоскопараллельного, а изотермы слабо искривлены. При числе  $Gr = 550$  наблюдается значительное отличие линий тока и изотерм от тех, которые соответствуют плоскопараллельному течению: хорошо видны вихри на границе встречных потоков, изотермы сильно искривлены. Отметим также несимметричность полей функции тока и температуры относительно вертикальной оси, проходящей через середину слоя, обусловленную зависимостью вязкости от температуры.

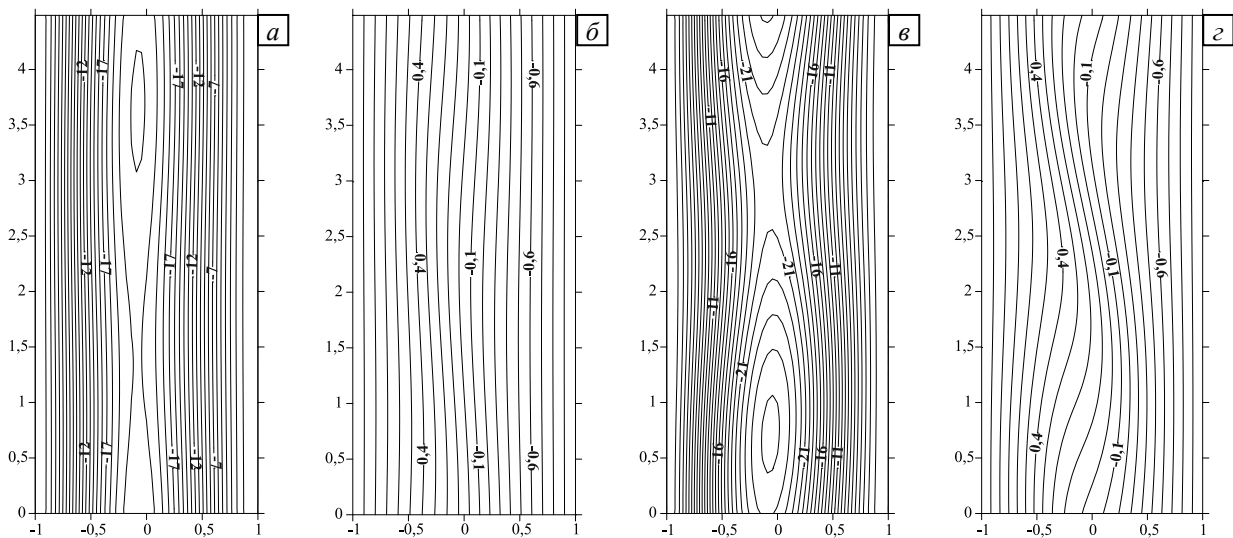


Рис. 4. Линии тока (а, в) и изотермы (б, г) вторичного стационарного режима конвекции при  $Pr = 1$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $k = 1,4$  и различных значениях числа Грасгофа  $Gr$ : 460 (а, б); 550 (в, г)

Анализ результатов показал, что при наличии зависимости вязкости от температуры вторичные режимы конвекции, возникающие при  $Pr = 1$  в результате неустойчивости стационарного плоскопараллельного течения по отношению к гидродинамическим возмущениям, представляют собой не неподвижные, как в случае жидкости с постоянной вязкостью, а дрейфующие в вертикальном направлении вихри на границе встречных потоков. Для иллюстрации этого на рисунках 5, 6 показана временная эволюция течения при  $Pr = 1$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $Gr = 550$  (Рис. 5), а также, для сравнения, в отсутствие температурной зависимости вязкости ( $\alpha = 0$ ) при тех же значениях прочих параметров (Рис. 6).

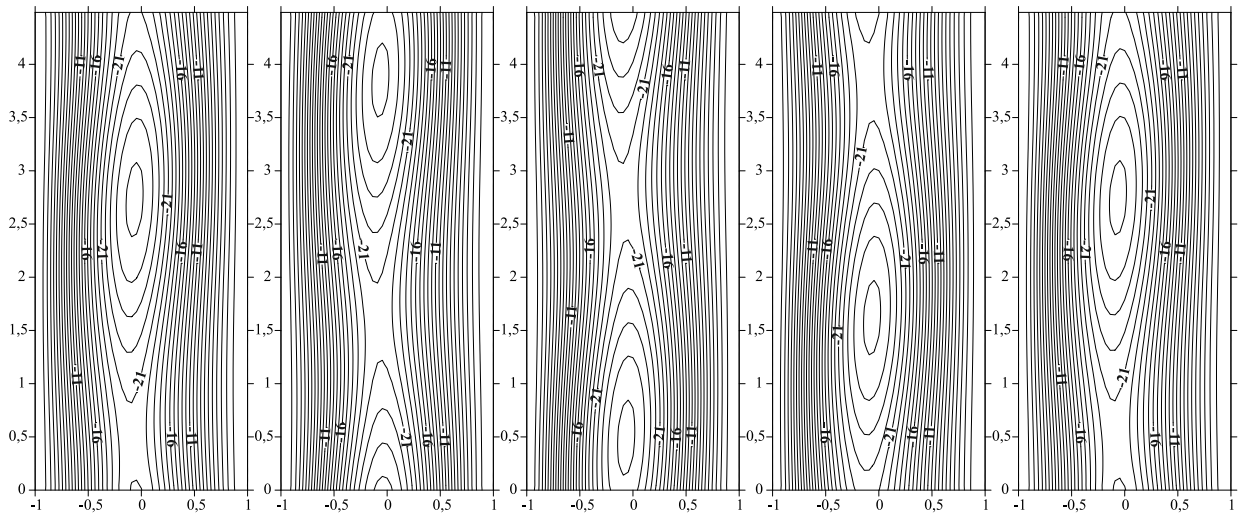


Рис. 5. Временная эволюция течения при  $\alpha = 0,5$ ,  $Pr = 1$ ,  $k = 1,4$ ,  $Gr = 550$ ; изменение линий тока приведено через  $1/4$  периода колебаний

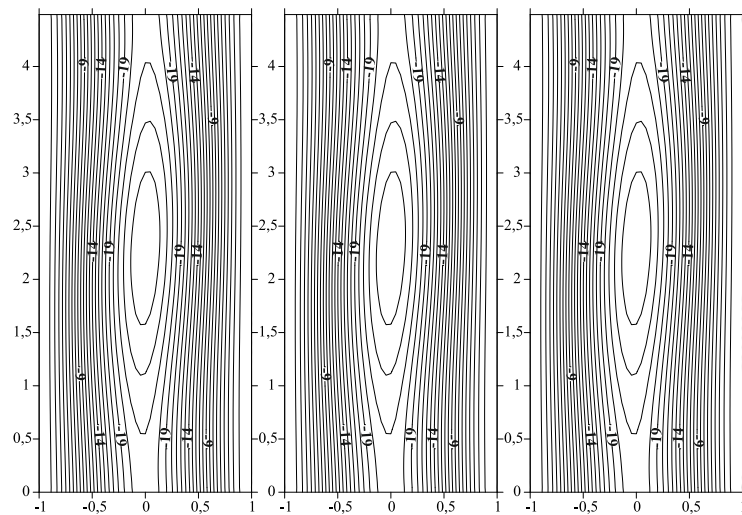


Рис. 6. Временная эволюция конвективного течения при  $\alpha = 0$ ,  $Pr = 1$ ,  $k = 1,4$ ,  $Gr = 550$ ; изменение линий тока через  $1/2$  периода колебаний

На рисунке 7 приведено число Нуссельта как функция времени для жидкости с вязкостью, зависящей от температуры ( $\alpha = 0,5$ ) при  $Pr = 1$ ,  $k = 1,4$ ,  $Gr = 550$ . Видно, что после переходного процесса наблюдаются стационарные колебания  $Nu$  около некоторого среднего значения (форма колебаний числа

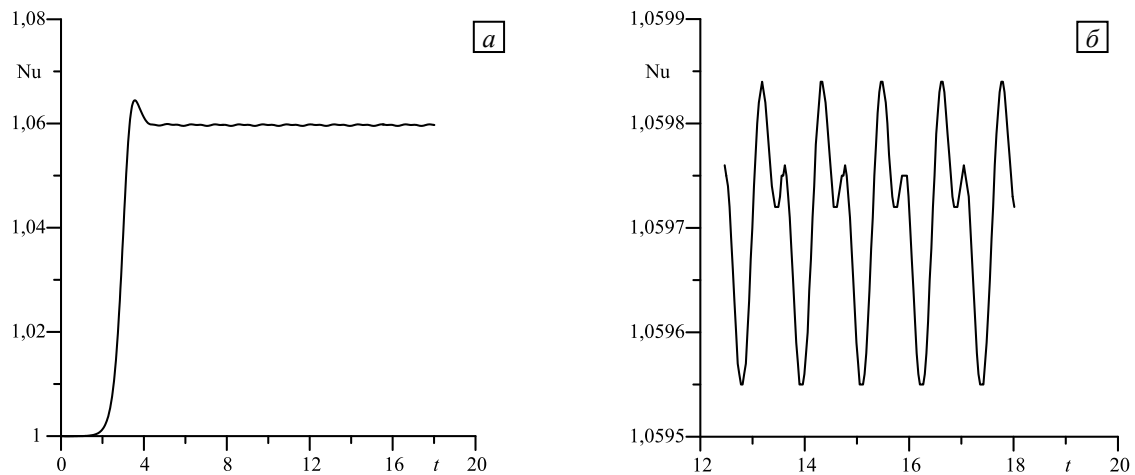


Рис. 7. Зависимость числа Нуссельта от времени при  $Pr = 1$ ,  $k = 1,4$ ,  $Gr = 550$  для жидкости с переменной вязкостью (а); участок кривой в увеличенном масштабе (б)

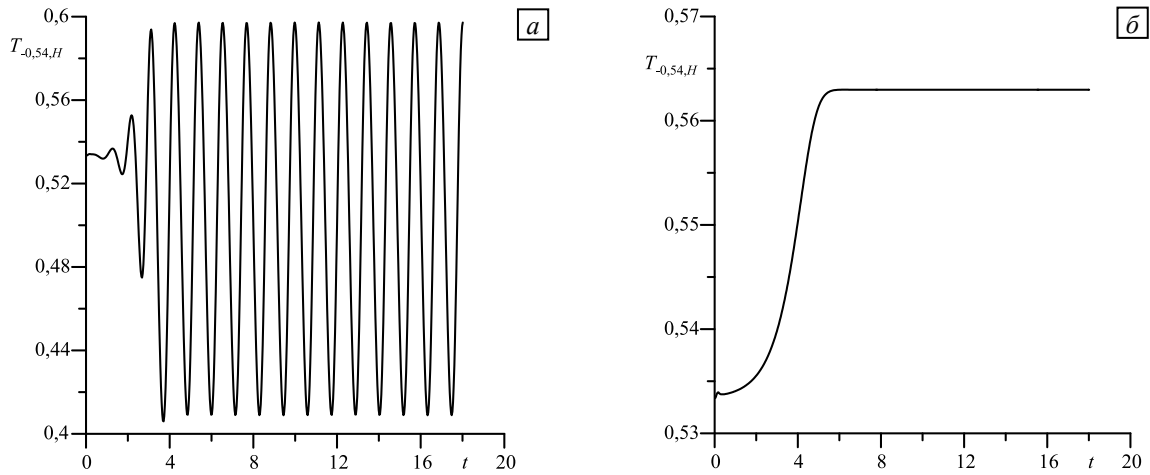


Рис. 8. Изменение температуры в точке с координатами  $(-0,54, H)$  во времени при  $Pg = 1$ ,  $k = 1,4$ ,  $Gr = 550$  для жидкости с вязкостью, зависящей ( $\alpha = 0,5$ ) (а) и не зависящей ( $\alpha = 0$ ) (б) от температуры

Нуссельта для жидкости с переменной вязкостью показана в увеличенном масштабе на рисунке 7б). В случае жидкости с постоянной вязкостью число Нуссельта после переходного процесса выходит на постоянное значение.

Рисунок 8 иллюстрирует эволюцию во времени локальных характеристик поля температуры при тех же значениях параметров для жидкостей с переменной и постоянной вязкостями. Как видно, в жидкости с переменной вязкостью после переходного процесса устанавливаются стационарные колебания локальных характеристик поля температуры (Рис. 8а), а в жидкости с постоянной вязкостью эти характеристики выходят на постоянное значение (Рис. 8б).

Таким образом, вторичный режим, возникающий после потери устойчивости стационарного плоскопараллельного течения жидкости с вязкостью, зависящей от температуры, характеризуется наличием волны, распространяющейся вдоль слоя. Фазовая скорость волны монотонно растет с увеличением числа Грасгофа, при  $Gr = 550$  она равна примерно 3,8, а при  $Gr = 1050$  — примерно 4,1.

## 6. Вторичные режимы течения, возникающие в результате неустойчивости стационарного плоскопараллельного течения при больших числах Прандтля

Перейдем к случаю  $Pg = 20$ . При этом за неустойчивость основного течения ответственны колебательные возмущения, представляющие собой тепловые волны. На рисунке 9 показана зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа для вторичных режимов конвекции при  $Pg = 20$ ,  $k = 0,93$ . Как видно, при увеличении числа Грасгофа вплоть до примерно 102 число Нуссельта остается равным единице, что соответствует режиму стационарного плоскопараллельного течения. Значение  $Gr = 102$  соответствует точке нижней ветви нейтральной кривой колебательной неустойчивости при  $k = 0,93$ , приведенной на рисунке 2б.

В диапазоне от 102 до 180 число Нуссельта растет с увеличением числа Грасгофа по закону, близкому к корневому, то есть наблюдается мягкое возбуждение вторичного конвективного движения.

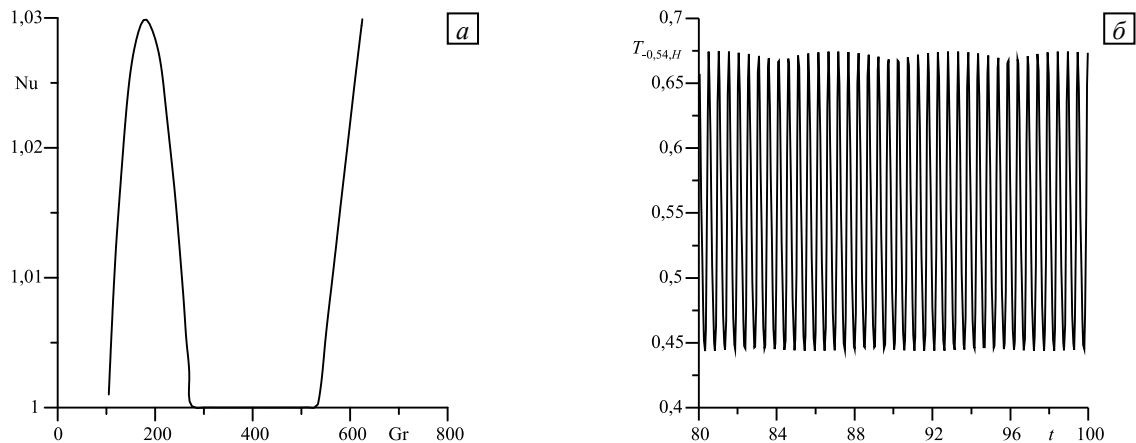


Рис. 9. Зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа (а) и временная эволюция температуры в точке с координатами  $(-0,54, H)$  при  $Gr = 190$  (б);  $Pg = 20$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $k = 0,93$



При дальнейшем росте числа Грасгофа число Нуссельта уменьшается до значения, равного единице, достигаемого при  $Gr \approx 275$ . Это поведение объясняется приближением к точке на верхней ветви нейтральной кривой колебательной неустойчивости при  $k = 0,93$  (см. Рис. 2б). В интервале значений числа Грасгофа от 275 до 532 число Нуссельта остается равным единице, что соответствует режиму стационарного плоскопараллельного течения. При числах Грасгофа, больших примерно 532, число Нуссельта вновь растет. Это связано с тем, что осуществляется переход в область монотонной неустойчивости (см. Рис. 2б).

На рисунке 9б приведена температура как функция времени в точке с координатами  $(-0,54, H)$ . Как видно, имеют место модулированные колебания.

Линии тока и изотермы вторичного течения при  $Pr = 20$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $k = 0,93$ ,  $Gr = 190$  показаны рисунке 10. Для сравнения на том же рисунке приведены линии тока и изотермы вторичного течения при  $Pr = 20$ ,  $\alpha = 0$ ,  $k = 0,8$ ,  $Gr = 200$ . Как видно, имеет место значительная асимметрия поля температуры вторичного режима конвекции в случае жидкости с вязкостью, зависящей от температуры, что, по-видимому, связано с тем, что вследствие переменности вязкости равнопрямие тепловых волн, бегущих вверх и вниз, нарушается [6], и, при выбранных значениях параметров волна, бегущая вверх, нарастает, а волна, бегущая вниз, затухает.

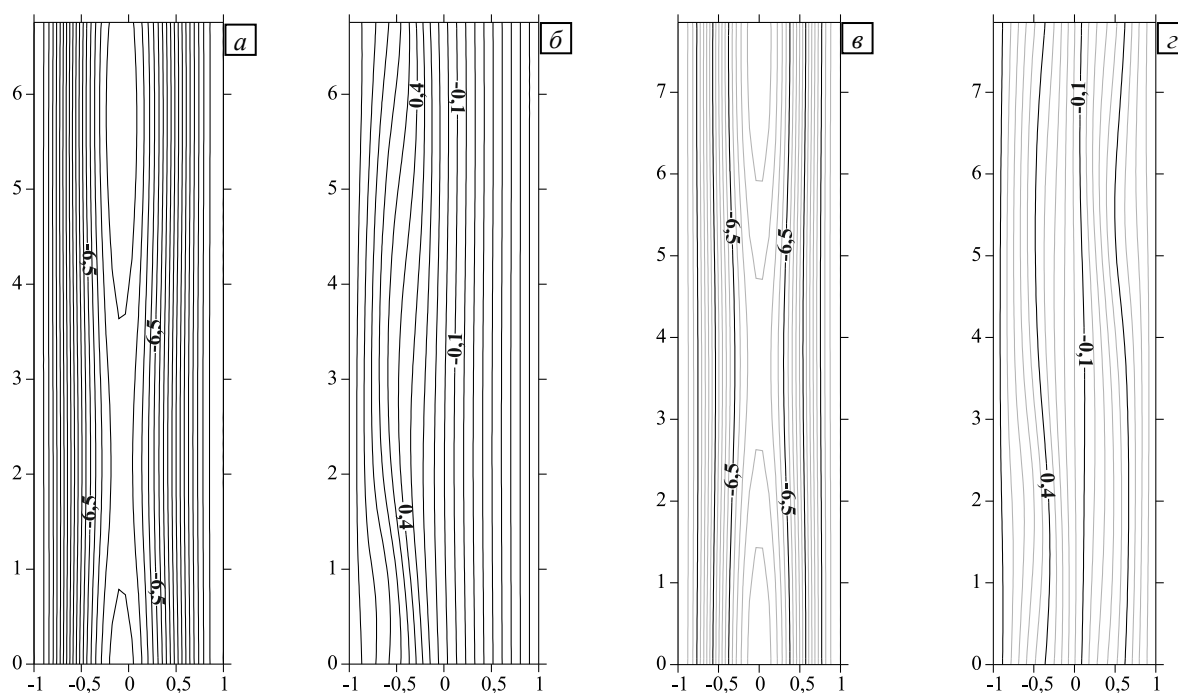


Рис. 10. Линии тока (а, в) и изотермы (б, г) вторичных режимов конвекции при  $Pr = 20$ ;  $\alpha = 0,5$ ,  $k = 0,93$ ,  $Gr = 190$  (а, б);  $\alpha = 0$ ,  $k = 0,8$ ,  $Gr = 200$  (в, г)

## 7. Заключение

Исследована устойчивость стационарного плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости с вязкостью, зависящей от температуры, между двумя вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разных температур. Расчеты показали, что при  $Pr = 1$  наиболее опасной является монотонная гидродинамическая мода неустойчивости, а при  $Pr = 20$  — колебательная мода неустойчивости.

Проанализирован характер возбуждения неустойчивости и вторичные режимы конвекции. Найдено, что вторичные режимы конвекции возбуждаются мягко.

Получены зависимости характеристик течения и теплопереноса от числа Грасгофа при различных числах Прандтля. Показано, что при малых числах Прандтля вторичные режимы течения представляют собой дрейфующие вихри на границе встречных потоков. При больших числах Прандтля имеются две моды неустойчивости: монотонная и колебательная. Наиболее опасны колебательные возмущения, причем область колебательной неустойчивости ограничена сверху и снизу. Это приводит к тому, что связь числа Нуссельта с числом Грасгофа становится немонотонной.



## Литература

1. Гершуни Г.З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости // ЖТФ. 1953. Т. 23, № 10. С. 1838-1844.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными вертикальными плоскостями // Изв. вузов. Физика. 1958. № 4. С. 43-47.
3. Гершуни Г.З., Герасимова С.Б. Об одном случае решения конвективной задачи с учетом зависимости коэффициента вязкости от температуры // Уч. зап. Перм. гос. ун-та. 1954. Т. 6, № 8. С. 87-90.
4. Гершуни Г.З. К вопросу об устойчивости стационарного конвективного движения вязкой жидкости // Уч. зап. Перм. гос. ун-та. 1961. Т. 19, № 3. С. 25-28.
5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Шихов В.М. Об устойчивости конвективного течения жидкости с вязкостью, зависящей от температуры // Теплофиз. высоких темп. 1975. Т. 13, № 4. С. 771-778.
6. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
7. Stengel K.C., Oliver D.S., Booker J.R. Onset of convection in a variable-viscosity fluid // J. Fluid Mech. 1982. Vol. 120. P. 411-431. [DOI](#)
8. Chen Y.-M., Pearlstein A.J. Stability of free-convection flows of variable- viscosity fluids in vertical and inclined slots // J. Fluid Mech. 1989. Vol. 198. P. 513-541. [DOI](#)
9. Thom A., Apelt C.J. Field computations in engineering and physics. London: Van Nostrand, 1961. 165 p.
10. Тарунин Е.Л. Численное исследование тепловой конвекции // Уч. зап. Перм. гос. ун-та. Сер.: Гидродинамика. 1968. № 184. Вып. 1. С. 135-168.

## References

1. Gershuni G.Z. Ob ustoychivosti ploskogo konvektivnogo dvizheniya zhidkosti [On the stability of plane convective fluid motion]. *Journal of Technical Physics – Soviet Physics - Technical Physics*, 1953, vol. 23, no. 10, pp. 1838-1844.
2. Gershuni G.Z., Zhukhovitskiy E.M. O dvukh tipakh neustoychivosti konvektivnogo dvizheniya mezhdru parallel'nymi vertikal'nymi ploskostyami [On two types of instability of convective motion between parallel vertical planes]. *Izv. vuzov. Fizika – Soviet Physics Journal*, 1958, no. 4, pp. 43-47.
3. Gershuni G.Z., Gerasimova S.B. Ob odnom sluchaye resheniya konvektivnoy zadachi s uchedom zavisimosti koeffitsiyenta vyazkosti ot temperatury [On one case of solving a convective problem taking into account the dependence of the viscosity coefficient on temperature]. *Uch. zap. Perm. gos. un-ta – Scientific notes of the Perm State University*, 1954, vol. 6, no. 8, pp. 87-90.
4. Gershuni G.Z. K voprosu ob ustoychivosti statsionarnogo konvektivnogo dvizheniya vyazkoy zhidkosti [On the question of the stability of the stationary convective motion of a viscous fluid]. *Uch. zap. Perm. gos. un-ta – Scientific notes of the Perm State University*, 1961, vol. 19, no. 3, pp. 25-28.
5. Gershuni G.Z., Zhukhovitskiy E.M., Shikhov V.M. Stability of a convective flow of a fluid with a temperature-dependent viscosity. *High Temp.*, 1975, vol. 13, no. 4, pp. 700-705.
6. Gershuni G.Z., Zhukhovitskiy E.M., Nepomnyashchiy A.A. *Ustoychivost' konvektivnykh techeniy* [Stability of convective flows]. М.: Nauka, 1989. 320 p.
7. Stengel K.C., Oliver D.S., Booker J.R. Onset of convection in a variable-viscosity fluid. *J. Fluid Mech.*, 1982, vol. 120, pp. 411-431. [DOI](#)
8. Chen Y.-M., Pearlstein A.J. Stability of free-convection flows of variable- viscosity fluids in vertical and inclined slots. *J. Fluid Mech.*, 1989, vol. 198, pp. 513-541. [DOI](#)
9. Thom A., Apelt C.J. *Field computations in engineering and physics*. London: Van Nostrand, 1961. 165 p.
10. Tarunin E.L. Chislennoye issledovaniye teplovoy konveksii [Numerical investigation of thermal convection]. *Uch. zap. Perm. gos. un-ta. Gidrodinamika – Scientific notes of the Perm State University. Hydrodynamics*, 1968, no. 184, iss. 1, pp. 135-168.

Поступила в редакцию 02.08.2018, после доработки 06.10.2018; принята к опубликованию 08.10.2018