

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.3.25](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.3.25)

УДК 539.4

## МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ СТРУКТУРАМИ АРМИРОВАНИЯ

А.П. Янковский

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

На основе метода шагов по времени построена математическая модель упругопластического деформирования пространственно армированных гибких пологих оболочек. Решение соответствующей начально-краевой задачи находится по явной схеме типа «крест». Неупругое поведение материалов компонентов композиции описывается теорией течения с изотропным упрочнением. Возможное ослабленное сопротивление волокнистых пологих оболочек поперечным сдвигам учитывается в рамках уточненной кинематической модели, из которой как частный случай получается теория Редди. Геометрическая нелинейность задачи вводится в приближении Кармана. Исследовано упругопластическое динамическое изгибное деформирование «плоской» и пространственно армированных стеклопластиковых и металлокомпозитных цилиндрических панелей под действием нагрузок взрывного типа. Показано, что как для сравнительно толстых, так и довольно тонких пологих оболочек замена «плоской» перекрестной структуры армирования на пространственную может приводить к уменьшению податливости конструкции в поперечном направлении на несколько десятков процентов. Продемонстрировано, что традиционная неклассическая теория Редди не гарантирует получения адекватных результатов динамических расчетов неупруго деформируемых композитных искривленных панелей даже при их малой относительной толщине и слабо выраженной анизотропии композиции (металлокомпозиции). Установлено, что в силу физической и геометрической нелинейности рассматриваемой задачи максимальный по модулю прогиб в армированной пологой оболочке малой относительной толщины может достигаться значительно позже снятия кратковременной динамической нагрузки.

*Ключевые слова:* пологие оболочки, пространственное армирование, геометрическая нелинейность, упругопластическое деформирование, уточненные модели изгиба, теория Редди, динамическое нагружение, схема типа «крест»

## MODELING OF ELASTOPLASTIC DEFORMATION OF FLEXIBLE SHALLOW SHELLS WITH SPATIAL REINFORCEMENT STRUCTURES

A.P. Yankovskii

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation*

A mathematical model of elastic-plastic deformation is constructed for spatially reinforced flexible flat shells on the basis of the method of time steps. The solution of the corresponding initial-boundary value problem is constructed by an explicit “cross” scheme. The inelastic behavior of the materials of the composition phases is described by the theory of flow with isotropic hardening. The possible weakened resistance of the fibrous shallow shells to transverse shears is taken into account in the framework of a refined kinematic model, from which, as a special case, the Reddy theory is obtained. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the form of the Karman approximation. The elastic-plastic dynamic bending deformation is investigated for “flat” and spatially reinforced glass-plastic and metal-composite cylindrical panels under the action of explosive loads. It is shown that for both relatively thick and relatively thin flat shells, the replacement of the “flat” cross-reinforcement structure by the spatial one can lead to a decrease in the design flexibility in the transverse direction by several tens of percent. It is demonstrated that the traditional non-classical Reddy theory does not guarantee adequate results of dynamic calculations of non-elastic deformable composite curved panels even with their small relative thickness and weakly expressed anisotropy of the composition (metal-composition). It is found that due to the physical and geometric nonlinearity of the problem under consideration, the maximum deflection modulo in the reinforced shallow shell of small relative thickness can be achieved much later than the removal of short-term dynamic load.

*Keywords:* shallow shell, spatial reinforcement, geometric nonlinearity, elastic-plastic deformation, refined model of bend, theory of Reddy, dynamic loading, «cross» scheme

### 1. Введение

В настоящее время в конструкторской практике все более широкое применение находят композиционные материалы (КМ) с пространственными волокнистыми структурами армирования [1–3]. Такой тип армирования позволяет упразднить серьезный недостаток усиленных в плоскости волокнистых композитов — расслоение в силу слабого сопротивления поперечному сдвигу и отрыву, а также дает возможность локализовать распространение трещин в пределах нескольких ячеек периодичности композиции. Следовательно, актуальной является проблема адекватного моделирования механического поведения тонкостенных конструкций с пространственными структурами армирования.

Линейно-упругое деформирование пространственно-армированных сред из КМ моделировалось в [1, 4–6]. Современные инженерные изделия зачастую подвергаются высокоинтенсивным внешним воздействиям [1, 7], при которых материал композитной конструкции ведет себя упругопластически. В работе [8] предложена математическая модель упругопластического поведения перекрестно армированных в плоскости пластин, использующая явную численную схему типа «крест». Структурная

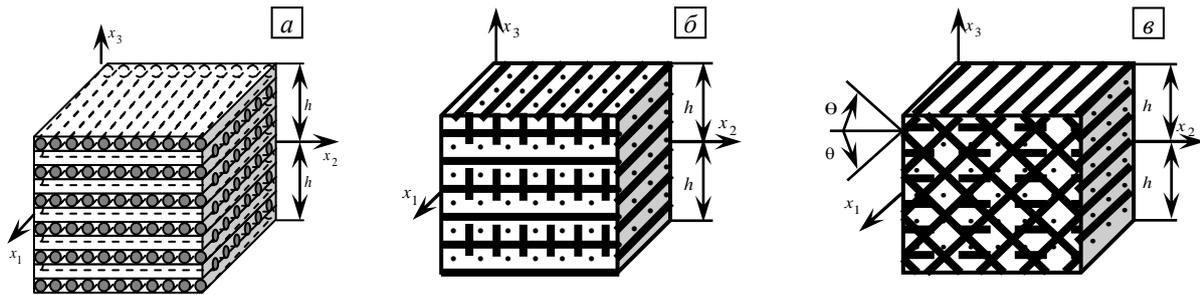


Рис. 1. Элемент полой КМ-оболочки с «плоской» ортогональной структурой 2D-армирования (а), б) – с пространственной ортогональной структурой 3D-армирования; в) – с неортогональной пространственной структурой 4D-армирования

модель упругопластического поведения пространственно-армированных сред, основанная на определяющих соотношениях теории течения, на сегодняшний день еще не построена.

Наиболее ярко основные преимущества КМ (сочетание легкости с высокой прочностью) проявляются в изготовленных из них тонкостенных волокнистых конструкциях типа искривленных панелей и оболочек [7, 9–16], поэтому актуальной является и проблема адекватного описания изгибного поведения таких силовых КМ-элементов при воздействиях на них интенсивных нагрузок и возможном ослабленном сопротивлении поперечным сдвигам.

Учет поперечных сдвигов в тонкостенных КМ-конструкциях традиционно производится в рамках кинематических гипотез Тимошенко–Рейсснера [7–9, 12, 14, 16] или Амбарцумяна–Редди [8, 10, 11, 13, 15] (в последнем случае в первом приближении принимается во внимание искривление поперечной нормали тонкостенного элемента). При этом, как правило, исследуется лишь линейно-упругое поведение КМ-панелей и оболочек. Лишь в [12] рассматривалось упругопластическое деформирование слоистых (с изотропными слоями) тонкостенных конструкций с привлечением кинематической гипотезы ломаной линии. В работе [17] показано, что при перекрестном плоском армировании пластин и пологих оболочек теория Редди не гарантирует получения адекватных результатов расчетов механического поведения тонкостенных элементов КМ-конструкций, если материалы компонентов композиции деформируются упругопластически. Для правильного учета ослабленного сопротивления таких конструкций поперечным сдвигам необходимо прибегать к аппроксимациям кинематических переменных более высоких порядков, чем принято в рамках теории Редди [18].

В связи с вышеизложенным настоящая работа посвящена моделированию упругопластического деформирования гибких искривленных панелей и пологих оболочек с пространственными структурами армирования при использовании кинематических гипотез, позволяющих более точно, чем в рамках теории Редди, описать их возможное ослабленное сопротивление поперечным сдвигам. При этом численное интегрирование соответствующих начально-краевых задач предполагается осуществлять на основе явной пошаговой схемы типа «крест».

## 2. Моделирование упругопластического поведения гибкой полой оболочки с пространственной структурой армирования

Рассматривается изгибное деформирование полой КМ-оболочки толщиной  $2h$ , с которой связана криволинейная ортогональная система координат  $Ox_1x_2x_3$ , так, что отсчетная поверхность  $Ox_1x_2$  ( $x_3 = 0$ ) совпадает со срединной поверхностью конструкции ( $|x_3| \leq h$ ); координатные линии  $x_1$  и  $x_2$  — линии главной кривизны срединной поверхности; ось  $Ox_3$  перпендикулярна к отсчетной поверхности. Оболочка имеет плоско-перекрестную или пространственно-перекрестную структуру армирования, которая в поперечном направлении  $Ox_3$  предполагается квазиоднородной. На рисунке 1 изображены элементы такой конструкции, причем их искривленность в силу как ее малости, так и малости самих элементов не показана).

Конструкция усилена  $K$  семействами волокон с плотностями армирования  $\omega_k$ ,  $1 \leq k \leq K$ . На рисунке 1а представлено «плоское» ортогональное 2D-армирование при  $K = 2$ , на рисунке 1б — ортогональное пространственное 3D-армирование при  $K = 3$  [4], а на 1в — неортогональное пространственное 4D-армирование при  $K = 4$  [1]). Относительное объемное содержание материала связующего в ячейке периодичности равняется [1]:

$$\omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k. \quad (1)$$

Для описания возможного (например, в случаях ортогональных структур, Рис. 1а, б) ослабленного сопротивления полой КМ-оболочки поперечным сдвигам используем уточненные, по сравнению с теорией Редди, кинематические соотношения и учтем геометрическую нелинейность в приближении Кармана. Согласно [17] осредненные деформации композиции  $\varepsilon_{ij}$  и перемещения  $U_i$  точек полой оболочки аппроксимируются так:

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(m)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(m)}) + \frac{x_3}{2h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(+)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(+)}) - \frac{x_3}{2h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(-)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(-)}) + \frac{\delta_{ij} w}{R_i} + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{x_3 + h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \frac{x_3 - h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(-)}(t, \mathbf{x}) + \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \sum_{m=0}^M x_3^m \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}) \quad (i, j = 1, 2),$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}) + \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) \varepsilon_{i3}^{(+)} - \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) \varepsilon_{i3}^{(-)} \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}. \quad (4)$$

В выражениях (2)–(4) приняты обозначения:  $w$  — прогиб;  $u_i$  — тангенциальные перемещения точек срединной поверхности ( $x_3 = 0$ ) в направлениях  $x_i$ ;  $R_i$  — главные радиусы кривизны этой поверхности;  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$  — деформации поперечных сдвигов на верхней ( $x_3 = h$ ) и нижней ( $x_3 = -h$ ) лицевых поверхностях полой КМ-оболочки;  $t_0$  — начальный момент времени  $t$ ;  $\partial_i$  — оператор частного дифференцирования по  $x_i$  ( $i = 1, 2$ );  $M$  — целое число, задающее количество слагаемых, удерживаемых в частичных суммах по степеням  $x_3$ ;  $G$  — область, занимаемая полой оболочкой в плане;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Равенство (4) соответствует традиционной для тонкостенных элементов конструкций кинематической гипотезе, в рамках которой изменчивостью перемещения  $U_3(t, \mathbf{r})$  в поперечном направлении  $Ox_3$  пренебрегают [7–17]. При  $m = 0$  из (2)–(4) вытекают кинематические гипотезы теории Редди [8, 10, 11, 13, 15, 19]. Таким образом, в равенствах (2)–(4) неизвестны функции  $w$ ,  $u_i$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2$ ,  $0 \leq m \leq M$ ), зависящие от времени  $t$  и двух пространственных переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

Так как весьма затруднительно [11], особенно при неупругом поведении материалов компонентов композиции, установить реальное распределение напряжений, деформаций и их скоростей в материале, в котором связующая матрица содержит произвольно ориентированные, более жесткие многочисленные включения, то для получения практически пригодных определяющих соотношений упругопластического деформирования рассматриваемого КМ полой оболочки сделаем исходные допущения, аналогичные принятым в [8, 11].

1. В пределах репрезентативной ячейки КМ представляет собой макроскопически квазиоднородное анизотропное тело; при достаточно густом равномерном насыщении связующей матрицы тонкими армирующими волокнами эта гипотеза вполне приемлема [11]).
2. Между связующим и арматурой имеет место идеальный механический контакт.
3. В пределах представительного элемента, выделенного из КМ на миниуровне, деформации и напряжения во всех компонентах и в композиции будем считать кусочно-постоянными; эффекты высших порядков, связанные с изменением полей деформаций и напряжений на микроуровне в малых окрестностях границ контакта связующего и арматуры, не учитываем.
4. Поля напряжений и деформаций в композиции усредняем по объему ячейки периодичности: согласно допущению 3 пропорционально объемному содержанию  $\omega_k$  каждого компонента (см. (1)).
5. Материалы компонентов композиции полагаем изотропными; их механическое поведение описывается уравнениями теории пластического течения с изотропным упрочнением [20]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{B}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K). \quad (5)$$

Здесь:

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{A}_k - \mathbf{P}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K); \quad (6)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = \left\{ \dot{\sigma}_1^{(k)}, \dot{\sigma}_2^{(k)}, \dot{\sigma}_3^{(k)}, \dot{\sigma}_4^{(k)}, \dot{\sigma}_5^{(k)}, \dot{\sigma}_6^{(k)} \right\}^T \equiv \left\{ \dot{\sigma}_{11}^{(k)}, \dot{\sigma}_{22}^{(k)}, \dot{\sigma}_{33}^{(k)}, \dot{\sigma}_{23}^{(k)}, \dot{\sigma}_{31}^{(k)}, \dot{\sigma}_{12}^{(k)} \right\}^T, \quad (7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \left\{ \dot{\varepsilon}_1^{(k)}, \dot{\varepsilon}_2^{(k)}, \dot{\varepsilon}_3^{(k)}, \dot{\varepsilon}_4^{(k)}, \dot{\varepsilon}_5^{(k)}, \dot{\varepsilon}_6^{(k)} \right\}^T \equiv \left\{ \dot{\varepsilon}_{11}^{(k)}, \dot{\varepsilon}_{22}^{(k)}, \dot{\varepsilon}_{33}^{(k)}, 2\dot{\varepsilon}_{23}^{(k)}, 2\dot{\varepsilon}_{31}^{(k)}, 2\dot{\varepsilon}_{12}^{(k)} \right\}^T,$$

где  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(k)}$  — компоненты тензоров деформаций и напряжений в  $k$ -м компоненте композиции; точка над символом означает частное дифференцирование по времени  $t$ .

В (5), (6) симметричные матрицы  $\mathbf{V}_k = (b_{ij}^{(k)})$ ,  $\mathbf{A}_k = (a_{ij}^{(k)})$ ,  $\mathbf{P}_k = (p_{ij}^{(k)})$  имеют размерность  $6 \times 6$ , причем ненулевые элементы матриц  $\mathbf{A}_k$  и  $\mathbf{P}_k$  определяются так [20]:

$$\begin{aligned}
 a_{ii}^{(k)} &= 2\mu^{(k)} + \lambda^{(k)}, & a_{ij}^{(k)} &= a_{ji}^{(k)} = \lambda^{(k)}, & a_{rr}^{(k)} &= \mu^{(k)}, & p_{nl}^{(k)} &= A^{(k)} s_n^{(k)} s_l^{(k)} \\
 & & & & (j \neq i, & i, j = 1, 3, & r = 4, 6, & l, n = 1, 6), \\
 2\mu^{(k)} &= \frac{E^{(k)}}{1 + \nu^{(k)}}, & \lambda^{(k)} &= \frac{\nu^{(k)} E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})}, & A^{(k)} &= \frac{\mu^{(k)} c^{(k)}}{J_2^{(k)}} (1 - \kappa^{(k)}), & \kappa^{(k)} &= \frac{\bar{\mu}^{(k)}}{\mu^{(k)}}, \\
 J_2^{(k)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (s_i^{(k)})^2 + \sum_{i=4}^6 (s_i^{(k)})^2, & c^{(k)} &= \begin{cases} 0 & \text{при } W^{(k)} \leq 0, \\ 1 & \text{при } W^{(k)} > 0, \end{cases} & J_2^{(k)} &= J_{2*}^{(k)} \text{ или } J_2^{(k)} < J_{2*}^{(k)}, \\
 W^{(k)} &= \sum_{i=1}^6 s_i^{(k)} e_i^{(k)}, & s_j^{(k)} &= \sigma_j^{(k)} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_i^{(k)}, & s_i^{(k)} &= \sigma_i^{(k)}, \\
 e_j^{(k)} &= \varepsilon_j^{(k)} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^{(k)}, & e_l^{(k)} &= \varepsilon_l^{(k)}, & J_{2*}^{(k)} &= \max \{ J_{2p}^{(k)}, J_{2m}^{(k)} \} \quad (j = 1, 3, \quad l = 4, 6).
 \end{aligned} \tag{8}$$

При этом:  $E^{(k)}$ ,  $\nu^{(k)}$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала  $k$ -го компонента композиции;  $\bar{\mu}^{(k)}$  — касательный модуль диаграммы чистого сдвига того же материала;  $c^{(k)}$  — функция переключения, которая задает активное упругопластическое нагружение или разгрузку  $k$ -го компонента композиции;  $J_{2p}^{(k)}$  — значение второго инварианта девиатора напряжений  $J_2^{(k)}$ , при котором материал  $k$ -го компонента

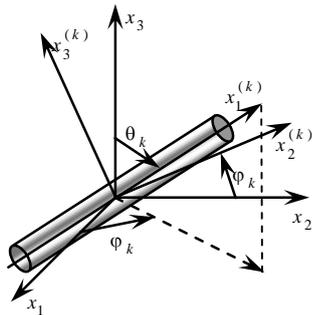


Рис. 2. Локальная система координат, связанная с волокном  $k$ -го семейства

композиции впервые начинает деформироваться пластически;  $J_{2m}^{(k)}$  — максимальное значение  $J_2^{(k)}$ , достигнутое за всю предыдущую историю деформирования элемента среды  $k$ -го компонента композиции. Соотношения (7) определяют соответствие между шестью компонентами  $f_i^{(k)}$  ( $i = 1, 6$ ) некоторого вектора-столбца  $\mathbf{f}_k$  и компонентами симметричного тензора второго ранга  $f_{jl}^{(k)}$  ( $j, l = 1, 3, 0 \leq k \leq K$ ). Согласно (8)  $e_i^{(k)}$  и  $s_i^{(k)}$  ( $i = 1, 6$ ) — компоненты девиаторов деформаций и напряжений в  $k$ -м компоненте композиции.

С каждым  $k$ -м семейством арматуры свяжем локальную ортогональную систему координат  $x_i^{(k)}$  так, чтобы ось  $x_1^{(k)}$  совпала с направлением траектории волокна, а оси  $x_2^{(k)}$  и  $x_3^{(k)}$  были перпендикулярны этим траекториям (Рис. 2). Направление армирования волокнами  $k$ -го семейства однозначно задается двумя углами сферической системы координат: полярным расстоянием  $\theta_k$  и долготой  $\varphi_k$ . Направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  между осями  $x_i^{(k)}$   $k$ -й локальной системы координат и осями  $x_j$  ( $i, j = 1, 3$ ) глобальной системы координат при этом вычисляются так:

$$\begin{aligned}
 l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, & l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k, & l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, & l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, \\
 l_{23}^{(k)} &= 0, & l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k, & l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, & l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k, & 1 \leq k \leq K.
 \end{aligned} \tag{9}$$

При переходе от глобальных координат  $x_i$  к локальным  $x_i^{(k)}$  проведем преобразования вектор-столбцов, аналогичных (7):

$$\bar{\sigma}_k = \mathbf{G}_k \sigma_k, \quad \bar{\sigma}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(k)}, \quad \bar{\varepsilon}_k = \mathbf{Q}_k \varepsilon_k, \quad \bar{\varepsilon}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 q_{ij}^{(k)} \varepsilon_j^{(k)} \quad (i = 1, 6), \tag{10}$$

где  $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$ ,  $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$  — матрицы  $6 \times 6$  с элементами (9):

$$\begin{aligned}
 g_{11}^{(k)} = q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \\
 2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Не показанные в (11) элементы матриц  $\mathbf{G}_k$ ,  $\mathbf{Q}_k$  приведены в таблицах (21.40), (21.44) работы [11]. В равенствах (10) чертой сверху обозначены величины, определенные в локальной системе координат  $x_i^{(k)}$  ( $i = \overline{1, 3}$ ).

На основании 2-го и 3-го допущений и условий сопряжения полей перемещений и напряжений на границах контакта арматуры со связующим имеем (см. (10)):

$$\sum_{j=1}^6 q_{1j}^{(k)} \varepsilon_j^{(k)} = \sum_{j=1}^6 q_{1j}^{(k)} \varepsilon_j^{(0)}, \quad \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(0)}, \quad i = \overline{2, 6}, \quad 1 \leq k \leq K.
 \tag{12}$$

Первое равенство из (12) устанавливает одинаковое удлинение волокон  $k$ -го семейства и связующего в направлении траектории армирования, остальные равенства в (12) характеризуют условия контакта между волокнами и связующим в напряжениях на боковой поверхности арматуры.

Допущения 1–5 аналогичны гипотезам, принятым в [8], поэтому, повторяя выкладки подобно [8] и учитывая соотношения (1), (5), (6), (8) и (12), получим матричное равенство, описывающее упругопластическое деформирование пространственно-армированного КМ:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{V} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}.
 \tag{13}$$

Здесь: 
$$\mathbf{V} = (\omega_0 \mathbf{V}_0 + \sum_{k=1}^K \omega_k \mathbf{V}_k \mathbf{E}_k) \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = (\omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^K \omega_k \mathbf{E}_k)^{-1}, \quad \mathbf{E}_k = \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad 1 \leq k \leq K;
 \tag{14}$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  — 6-компонентные вектор-столбцы скоростей усредненных напряжений  $\dot{\sigma}_{ij}$  и деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  в композиции, по структуре аналогичные (7);  $\mathbf{I}$  — единичная матрица  $6 \times 6$ ;  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}_k$ ,  $\mathbf{C}_k$  — матрицы  $6 \times 6$ ;  $\mathbf{D}_k^{-1}$  — матрица, обратная матрице  $\mathbf{D}_k$ , также размерностью  $6 \times 6$ . Элементы  $c_{ij}^{(k)}$ ,  $d_{ij}^{(k)}$  матриц  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{D}_k$  на основании (6), (8), (9), (11) и (12) вычисляются по формулам:

$$c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)} \quad (i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}).
 \tag{15}$$

При выводе равенств (13), (14) попутно, как и в [8], получают следующие записи в матричном виде:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \mathbf{H} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}};
 \tag{16}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{E}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0, \quad 1 \leq k \leq K.
 \tag{17}$$

Равенство (16) связывает скорости деформаций в связующем  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$  со скоростями усредненных деформаций композиции  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Соотношения (17) позволяют выразить скорости деформаций арматуры  $k$ -го семейства  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$  через скорости деформаций связующего  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ , то есть в конечном итоге при учете (16) — через  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ .

Так как исследуется деформирование пологой КМ-оболочки как гибкой тонкостенной системы, напряжение  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$  с приемлемой для практических приложений точностью можно аппроксимировать по толщине конструкции линейно [9]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0,
 \tag{18}$$

где  $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  — нормальные напряжения на верхней ( $x_3 = +h$ ) и нижней ( $x_3 = -h$ ) лицевых поверхностях, которые известны из соответствующих силовых граничных условий.

Матричное равенство (13) представляет собой систему шести алгебраических уравнений. Согласно соотношениям соответствия, аналогичным (7), из третьего уравнения этой системы можно определить скорость поперечной деформации КМ-оболочки

$$\dot{\varepsilon}_{33} \equiv \dot{\varepsilon}_3 = \frac{1}{b_{33}} (\dot{\sigma}_3 - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i} \dot{\varepsilon}_i). \quad (19)$$

Здесь:  $b_{3i}$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) — элементы матрицы  $\mathbf{B}$  в (13);  $\dot{\sigma}_3$  находится из выражения (18) после дифференцирования по времени  $t$ ; скорости деформаций  $\dot{\varepsilon}_i$  в правой части (19) получаются за счет дифференцирования по времени соотношений (2), а значит, выражаются через двумерные функции  $w$ ,  $\dot{w}$ ,  $\dot{u}_l$ ,  $\dot{\varepsilon}_{13}^{(\pm)}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{13}^{(m)}$  ( $l = 1, 2, 0 \leq m \leq M$ ).

В матричном виде (5), (13), (14), (16) и (17) формально полностью совпадают с аналогичными равенствами в [8] с той лишь разницей, что в [8] все матрицы имели размерность  $5 \times 5$ , а вектор-столбцы являлись пятикомпонентными. Вызвано это тем, что в [8] вместо (18) использовалась традиционная для тонкостенных элементов конструкций силовая гипотеза  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \approx 0$  [7–17, 19]. Это в случае плоского перекрестного армирования, рассматриваемого в [8, 17], позволило за счет допущений 2 и 4 сразу исключить из рассмотрения (как это обычно и делается в теории тонких пластин и оболочек) скорости напряжений  $\dot{\sigma}_{33}^{(k)}$  и деформаций  $\dot{\varepsilon}_{33}^{(k)}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{33}$  ( $0 \leq k \leq K$ ), то есть без (19). В случае же пространственного армирования, обсуждаемого в настоящем исследовании, применение такого традиционного приема оказалось невозможным.

Для приведения трехмерных уравнений движения полой КМ-оболочки к двумерным, как и в [17], воспользуемся методом взвешенных невязок. При этом в качестве весовых функций выберем однородные полиномы  $x_3^l$ . Тогда при учете предположений (4) и (18) получим [17]:

$$\begin{aligned} 2h\rho\ddot{w} &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w \right) - \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} M_{ii}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} + X_3^{(0)}, \\ \rho \ddot{u}_i^{(l)} &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w \right) - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w + h^l \left[ \sigma_{i3}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{i3}^{(-)} \right] - \\ &\quad - h^l \left[ \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w + R_i^{-1} M_{i3}^{(l)} + X_i^{(l)} \quad (i = 1, 2), \\ &\quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad X_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h X_i(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\ M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad u_s^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_s(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\ l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &\equiv l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \frac{h^l}{2} \left[ (\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^l) + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l) \right] \\ &\quad (i, j = \overline{1, 3}, \quad s = \overline{1, 2}), \quad 0 \leq l \leq M + 1; \end{aligned} \quad (21)$$

$\rho_0$ ,  $\rho_k$  — объемная плотность материалов связующего и волокон  $k$ -го семейства;  $X_i$  — компоненты объемной нагрузки, действующей на КМ (определяются по правилу простой смеси, аналогично  $\rho$ );  $\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv \sigma_{i3}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  — касательные напряжения на верхней ( $x_3 = +h$ ) и нижней ( $x_3 = -h$ ) лицевых поверхностях, известные из соответствующих силовых граничных условий;  $M_{ij}^{(0)} \equiv F_{ij}$ ,  $M_{ij}^{(1)} \equiv M_{ij}$  и  $M_{i3}^{(0)} \equiv F_{i3}$  ( $i, j = \overline{1, 2}$ ) — согласно третьему равенству из (21), соответственно, мембранные усилия, изгибающие и крутящие механические моменты в полой оболочке и поперечные силы; остальные силовые факторы в (20) — моменты высших порядков от напряжений.

Для однозначного интегрирования уравнений рассматриваемой задачи необходимо знать начальные и граничные условия. Для приведения исходных трехмерных начальных и граничных условий к двумерным, соответствующим системе (20), вновь прибегнем к методу взвешенных невязок с теми же весовыми функциями  $x_3^l$ . Тогда на той части кромки (обозначим ее  $\Gamma_\sigma$ ), на которой известны силовые граничные условия, будем иметь соотношения, записанные в силовых факторах (21) [17]

$$n_1 (M_{i1}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_i w) + n_2 (M_{i2}^{(l)} - M_{23}^{(l)} \partial_i w) = P_i^{(l)}(t, \mathbf{x}),$$

$$\sum_{j=1}^2 n_j \left( M_{j3}^{(0)} + \sum_{l=1}^2 M_{jl}^{(0)} \partial_l w \right) = P_3^{(0)}(t, \mathbf{x}), \quad (i = 1, 2), \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad t \geq t_0, \quad (22)$$

а на другой части кромки (обозначим ее  $\Gamma_u$ ), на которой заданы кинематические граничные условия, — соотношения в обобщенных кинематических переменных (21) при учете (4) [17]:

$$w(t, \mathbf{x}) = U_{*3}(t, \mathbf{x}), \quad u_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) = u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \quad (i = 1, 2), \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t \geq t_0. \quad (23)$$

В (22), (23) приняты обозначения:

$$P_j^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h p_j(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3 \quad (j = \overline{1, 3}, \quad i = 1, 2),$$

$$n_1 = \cos \gamma, \quad n_2 = \sin \gamma,$$

в которых полагаются известными:  $p_j$  — внешние распределенные нагрузки на торцевой поверхности оболочки, действующие в направлениях  $x_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ );  $U_{*3}$  — прогиб на  $\Gamma_u$ ;  $U_{*i}$  — перемещения на торцевой поверхности в тангенциальных направлениях  $x_i$  ( $i = 1, 2$ );  $u_{*i}^{(l)}$  — некоторые функции;  $\gamma$  — угол, на который внешняя нормаль к контуру  $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$ , ограничивающему область  $G$ , отклоняется от направления  $Ox_1$ .

Для моделирования поведения пологой КМ-оболочки в момент времени  $t = t_0$  должны быть определены начальные условия (см. (4) и (21)) [17]:

$$w(t_0, \mathbf{x}) = U_{03}(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}), \quad u_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2),$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad 0 \leq l \leq M + 1. \quad (25)$$

Сюда входят

$$u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3 \quad (i = 1, 2), \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad (26)$$

в которых при  $t = t_0$  известны  $U_{0j}, V_{0j}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) — перемещения и скорости точек конструкции, и  $u_{0i}^{(l)}, v_{0i}^{(l)}$  ( $i = 1, 2$ ) — некоторые функции.

В соответствии с (24) на кромке также заданы  $P_i^{(0)}, P_3^{(0)}$  — погонные усилия, действующие в направлениях  $x_i$  и  $x_3$ , и  $P_i^{(1)}$  ( $i = 1, 2$ ) — погонные механические моменты; остальные величины в правых частях (22) — известные моменты высших порядков от поверхностных сил, приложенных к торцевой поверхности.

Таким образом, для однозначного интегрирования рассматриваемой начально-краевой задачи в каждой точке области  $G$  в начальный момент времени  $t_0$  необходимо знать условия (25) вместе с (26), а в каждой точке граничного контура  $\Gamma$  — силовые (22) или кинематические (23) факторы вместе с (24). Возможно задание и смешанных из (22) и (23) граничных условий, например при моделировании шарнирного опирания кромки оболочки.

Согласно четвертому равенству (21) проинтегрируем выражения (3) по толщине оболочки с весами  $x_3^l$  ( $0 \leq l \leq M + 1$ ), тогда получим матричные соотношения

$$C \boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{w} \partial_i w - \mathbf{e}^{(+)} \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(+)} + \mathbf{e}^{(-)} \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(-)} \quad (i = 1, 2), \quad (27)$$

где

$$\mathbf{u}_i = \{u_i^{(0)}, u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(M)}, u_i^{(M+1)}\}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i = \{u_i, \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(0)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(M-1)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(M)}\}^T, \quad (28)$$

$C = (c_{ij})$  — матрица размерностью  $(M + 2) \times (M + 2)$ ,  $\mathbf{w} = \{w_i\}$ ,  $\mathbf{e}^{(\pm)} = \{e_i^{(\pm)}\}$  — вектор-столбцы размерностью  $(M + 2)$ , элементы которых вычисляются так:

$$c_{l+1,1} = \frac{h^{l+1}}{l+1} (1 + (-1)^l), \quad c_{l+1,m+2} = 2h^{l+m+2} (1 - (-1)^{l+m}) \left[ \frac{1}{(m+1)(l+m+2)} - \frac{1}{(m+3)(l+m+4)} \right],$$

$$w_{l+1} = \frac{h^{l+2}}{l+2} (1 - (-1)^l), \quad e_{l+1}^{(\pm)} = h^{l+2} \left[ \frac{1 + (-1)^l}{2(l+3)} \pm \frac{1 - (-1)^l}{l+2} \right], \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad 0 \leq m \leq M. \quad (29)$$

Согласно (29) элементы матрицы  $\mathbf{C}$  и вектор-столбцов  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{e}^{(\pm)}$  вычисляются один раз, поэтому уравнение (27) для удобства преобразуем к виду:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}_i + \bar{\mathbf{w}} \partial_i w - \bar{\mathbf{e}}^{(+)} \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(+)} + \bar{\mathbf{e}}^{(-)} \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(-)} \quad (i = 1, 2), \quad (30)$$

где

$$\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{w}, \quad \bar{\mathbf{e}}^{(\pm)} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}^{(\pm)}, \quad (31)$$

$\mathbf{C}^{-1}$  — матрица, обратная матрице  $\mathbf{C}$ .

Если в текущий момент времени  $t$  из каких-то соображений получены значения функций  $w$ ,  $u_i^{(l)}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(\pm)}$  ( $0 \leq l \leq M+1$ ), то по формулам (30) при учете (28) и (31) можно найти значения функций  $u_i$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2$ ,  $0 \leq m \leq M$ ), характеризующих средние деформации (2) и тангенциальные перемещения (3) в полой КМ-оболочке.

### 3. Численный метод расчета

Для численного интегрирования уравнений рассматриваемой задачи применим метод шагов по времени [8, 12, 17, 20, 21], определяя значения искомых функций в дискретные моменты времени как  $t_{n+1} = t_n + \tau$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\tau = \text{const} > 0$  — шаг по времени.

Предполагаем, что в моменты времени  $t_s$  уже известны значения функций

$$w^s(\mathbf{x}) \equiv w(t_s, \mathbf{x}), \quad u_i^{(l)s}(\mathbf{x}) \equiv u_i^{(l)}(t_s, \mathbf{x}), \quad \sigma_{j3}^{(\pm)s}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{j3}^{(\pm)}(t_s, \mathbf{x}), \quad \dot{\sigma}_{j3}^{(\pm)s}(\mathbf{x}) \equiv \dot{\sigma}_{j3}^{(\pm)}(t_s, \mathbf{x}),$$

$$\sigma_{ij}^s(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_s, \mathbf{r}), \quad \sigma_{ij}^{(k)s}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_s, \mathbf{r}), \quad X_j^s(\mathbf{r}) \equiv X_j(t_s, \mathbf{r}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(\pm)s}(\mathbf{x}) \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(\pm)}(t_s, \mathbf{x}) \quad (32)$$

$$(i = 1, 2, \quad j = 1, 3, \quad s = n-1, n), \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad 0 \leq k \leq K, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h,$$

поэтому на основании (21) в момент времени  $t_n$  можем вычислить все силовые факторы  $M_{ij}^{(l)}$ , входящие в правые части уравнений (20) и в граничные условия (22).

Для получения явной численной схемы производные по времени аппроксимируем центральными конечными разностями [8, 12, 17]. Тогда конечно-разностные аналоги уравнений (20) с учетом (32) примут вид:

$$\frac{2h\rho}{\tau^2} \left( w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{j3}^{(0)n} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)n} \partial_i w^n \right) - \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} M_{ii}^{(0)n} + \sigma_{33}^n - \sigma_{33}^{(+)n} + X_3^{(0)n},$$

$$\frac{\rho}{\tau^2} \left( u_i^{(l)n+1} - 2u_i^{(l)n} + u_i^{(l)n-1} \right) = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{ij}^{(l)n} - M_{j3}^{(l)n} \partial_i w^n \right) + h^l \left[ \sigma_{i3}^{(+n)} - (-1)^l \sigma_{i3}^{(-n)} \right] - h^l \left[ \sigma_{33}^{(+n)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-n)} \right] \partial_i w^n -$$

$$- l M_{i3}^{(l-1)n} + l M_{33}^{(l-1)n} \partial_i w^n + R_i^{-1} M_{i3}^{(l)n} + X_i^{(l)n} \quad (i = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3 \dots), \quad 0 \leq l \leq M+1.$$

Правые части в (33) известны, поэтому, присоединяя к ним граничные условия (22), (23) и обозначения (24), из уравнений (33) определяем  $w$  и  $u_i^{(l)}$  ( $i = 1, 2$ ,  $0 \leq l \leq M+1$ ) в момент времени  $t_{n+1}$ .

Согласно (13) при учете соответствий, аналогичных (7), имеем на лицевых поверхностях полой КМ-оболочки выполнение следующих силовых граничных условий по касательным напряжениям (см. (20)):

$$\sum_{j=1}^3 b_{ij}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{jj}(t, \mathbf{x}, \pm h) + 2b_{i6}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i2}(t, \mathbf{x}, \pm h) + \sum_{j=4}^5 b_{ij}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_j^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \dot{\sigma}_i^{(\pm)}(t, \mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0 \quad (i = 4, 5), \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_4^{(\pm)} \equiv \dot{\sigma}_{23}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}), \quad \dot{\sigma}_5^{(\pm)} \equiv \dot{\sigma}_{13}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}), \quad \dot{\varepsilon}_4^{(\pm)} \equiv 2\dot{\varepsilon}_{23}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}), \quad \dot{\varepsilon}_5^{(\pm)} \equiv 2\dot{\varepsilon}_{13}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}), \quad b_{ij}^{(\pm)} \equiv b_{ij}(t, \mathbf{x}, \pm h) \\ (i = 4, 5, \quad j = \overline{1, 6}), \end{aligned} \quad (35)$$

$b_{ij} \equiv b_{ij}(t, \mathbf{r})$  — элементы матрицы  $\mathbf{b}$  в (13). На основании (32) правые части в (34) при учете (35) в момент времени  $t_n$  установлены.

Используя (19), исключим из (34) производную  $\dot{\varepsilon}_{33}$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{l3ij}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \dot{\varepsilon}_{ij}(t, \mathbf{x}, \pm h) + \sum_{i=1}^2 a_{l3i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \dot{\varepsilon}_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \dot{\sigma}_{l3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) - a_{l333}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0 \quad (l = 1, 2), \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} a_{l3ij}^{(\pm)} \equiv b_{l3ij}^{(\pm)} - (b_{33}^{(\pm)})^{-1} b_{l333}^{(\pm)} b_{33ij}^{(\pm)}, \quad a_{l3i3}^{(\pm)} \equiv b_{l3i3}^{(\pm)} + (b_{33}^{(\pm)})^{-1} b_{l333}^{(\pm)} b_{33i3}^{(\pm)}, \quad a_{l333}^{(\pm)} \equiv (b_{33}^{(\pm)})^{-1} b_{l333}^{(\pm)}, \quad b_{l3ii}^{(\pm)} = b_{5i}^{(\pm)}, \quad b_{l333}^{(\pm)} = b_{53}^{(\pm)}, \\ b_{l313}^{(\pm)} = b_{55}^{(\pm)}, \quad b_{l323}^{(\pm)} = b_{54}^{(\pm)}, \quad b_{l312}^{(\pm)} = a_{56}^{(\pm)}, \quad b_{23ii}^{(\pm)} = b_{4i}^{(\pm)}, \quad b_{2333}^{(\pm)} = b_{43}^{(\pm)}, \quad b_{2313}^{(\pm)} = b_{45}^{(\pm)}, \quad b_{2323}^{(\pm)} = b_{44}^{(\pm)}, \quad b_{2312}^{(\pm)} = a_{46}^{(\pm)}, \\ b_{33ii}^{(\pm)} = b_{3i}^{(\pm)}, \quad b_{3313}^{(\pm)} = b_{35}^{(\pm)}, \quad b_{3323}^{(\pm)} = b_{34}^{(\pm)}, \quad b_{3312}^{(\pm)} = b_{36}^{(\pm)} \quad (i, j, l = 1, 2). \end{aligned} \quad (37)$$

Согласно (32) и (37) правые части в (36) известны при  $t = t_n$ . Аппроксимируем в (36) производные по времени  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  и  $\dot{\varepsilon}_{i3}^{(\pm)}$  центральными конечными разностями, в результате чего в момент времени  $t_n$  будем иметь

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{l3ij}^{(\pm)} \varepsilon_{ij} \Big|_{x_3 = \pm h} + \sum_{i=1}^2 a_{l3i3}^{(\pm)} \varepsilon_{i3}^{(\pm)} = S_{l3}^{(\pm)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G \quad (l = 1, 2), \quad (38)$$

где

$$S_{l3}^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv 2\tau \sigma_{l3}^{(\pm)} - 2\tau a_{l333}^{(\pm)} \sigma_{33}^{(\pm)} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{l3ij}^{(\pm)} \varepsilon_{ij} \Big|_{x_3 = \pm h} + \sum_{i=1}^2 a_{l3i3}^{(\pm)} \varepsilon_{i3}^{(\pm)}, \quad \mathbf{x} \in G \quad (l = 1, 2). \quad (39)$$

В силу соотношений (2), (30), (32), (39) правые части в (38) для момента времени  $t_n$  определены. Подставим в левые части равенств (38) выражения (2) и (30) и окончательно получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{l3ij}^{(\pm)} \left\{ \left[ 2H_{(-)}^{(\pm)} \pm h \left( 1 \mp \frac{1}{2} \right) \right] \left( \partial_i \varepsilon_{j3}^{(\pm)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(\pm)} \right) - \left[ 2H_{(+)}^{(\pm)} \mp h \left( 1 \pm \frac{1}{2} \right) \right] \left( \partial_i \varepsilon_{j3}^{(\pm)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(\pm)} \right) \right\} + \sum_{i=1}^2 a_{l3i3}^{(\pm)} \varepsilon_{i3}^{(\pm)} = \\ = S_{l3}^{(\pm)} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{l3ij}^{(\pm)} \left[ \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M+1} (\bar{c}_{1,m+1}^{(\pm)} + 2\bar{c}_{m+1}^{(\pm)}) \left( \partial_i u_j^{(l)} + \partial_j u_i^{(l)} \right) + (\bar{w}_1 \mp h + \bar{w}^{(\pm)}) \partial_i \partial_j w + \delta_{ij} R_j^{-1} w + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w \right], \\ \mathbf{x} \in G \quad (l = 1, 2), \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} H_{(-)}^{(\pm)} \equiv \sum_{m=-1}^{M+1} h_m^{(\pm)} \bar{e}_{m+2}^{(-)} \quad ((-) \rightarrow (+)), \quad \bar{C}_{l+1}^{(\pm)} \equiv \sum_{m=0}^{M+1} h_m^{(\pm)} \bar{c}_{m+2,l+1}^{(\pm)}, \quad \bar{w}^{(\pm)} \equiv \sum_{m=0}^{M+1} h_m^{(\pm)} \bar{w}_{m+2}^{(\pm)}, \\ h_{-1}^{(\pm)} \equiv \frac{1}{2}, \quad h_m^{(\pm)} \equiv (\pm h)^{m+1} \left( \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3} \right), \quad 0 \leq m \leq M, \end{aligned} \quad (41)$$

$\bar{c}_{ij}$  и  $\bar{w}_i$ ,  $\bar{e}_i^{(\pm)}$  — элементы матрицы  $\mathbf{C}^{-1}$  и вектор-столбцов  $\bar{\mathbf{w}}$ ,  $\bar{\mathbf{e}}^{(\pm)}$  (см. (30), (31)).

Так как значения функций  $w$  и  $u_i^{(l)}$  ( $i = 1, 2, 0 \leq l \leq M+1$ ) уже установлены из уравнений (33), то правые части в (40) при учете (39), (41) также известны при  $t = t_n$ . При выборе верхних и нижних знаков « $\pm$ », « $\mp$ » и задании  $i = 1, 2$  четыре равенства (40) представляют собой систему дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, замкнутую относительно функций  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}(\mathbf{x})$ . Исследование вопросов, связанных с корректной постановкой краевой задачи с этой системой уравнений,

выходит за рамки данной работы. Лишь отметим, что в тех случаях нагружения пологой КМ-оболочки, когда возникает необходимость решать краевую задачу для системы уравнений (40), построить явную численную схему пошагового интегрирования не удастся.

В связи с этим назовем частные случаи пространственного армирования и нагружения пологой КМ-оболочки, при которых можно построить явную численную схему типа «крест». А именно, предполагаем: структура пространственного армирования КМ-конструкции такова, что при укладке волокон некоторого  $k$ -го семейства наклонно, то есть  $0 < \theta_k < \pi/2$ ,  $1 \leq k \leq K$  (см. Рис. 2), обязательно найдется  $n$ -е семейство наклонной арматуры с параметрами укладки  $\theta_n = \pi - \theta_k$ ,  $\varphi_n = \varphi_k$ ,  $\omega_n = \omega_k$  ( $1 \leq n \leq K$ ,  $n \neq k$ ). Такие структуры пространственного армирования часто встречаются на практике [1–4]; в частности, к ним относятся структуры, изображенные на рисунке 1б, в, а также структуры с плоско-перекрестным армированием (при этом формально  $\omega_n = \omega_k = 0$ ). Если структура армирования обладает указанной особенностью и на лицевых поверхностях КМ-оболочки отсутствуют касательные силы ( $\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$ ), то, повторив рассуждения из [8], можно показать, что для структурной модели КМ-среды, предложенной в настоящем исследовании (см. (5)–(17)), получим  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$ ,  $i = 1, 2$ . Поэтому далее будем рассматривать только эти случаи армирования и нагружения пологих КМ-оболочек (в частности, нагрузки могут быть взрывного типа).

Таким образом, используя (30), по известным из (33) (при  $\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$ ) значениям  $w^{n+1}$ ,  $u_i^{(l)}$  и  $\varepsilon_{i3}^{n+1}$  ( $0 \leq l \leq M+1$ ) вычисляем  $u_i^{n+1}$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2$ ,  $0 \leq m \leq M$ ), а затем по формулам (2) — деформации  $\varepsilon_{ij}^{n+1}$ . Так как при  $t = t_{n-1}$  деформации  $\varepsilon_{ij}^{n-1}$  также найдены (см. (2) с учетом (32)), то с помощью формул численного дифференцирования и (19), определяем скорости осредненных деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$ . Далее по формулам (16), (17) рассчитываем скорости деформаций компонентов композиции  $\dot{\varepsilon}_k^n$ , а по (5) — скорости напряжений в компонентах композиции  $\dot{\sigma}_k^n$  ( $0 \leq k \leq K$ ). После этого решение задачи строим совершенно так же, как и в [8, 17].

Если область  $G$  прямоугольная, то, заменяя в (22), (33) производные  $\partial_i(\cdot)$  конечно-разностными аналогами, строим явную схему типа «крест» [8, 17]. В случае неканонической области  $G$  дискретизацию соотношений (22), (33) можно осуществить на основе вариационно-разностного подхода [12]. Необходимые условия устойчивости схемы типа «крест» получаются из условия Куранта [12] и для рассматриваемой КМ-конструкции представляются неравенствами (60) из [8].

#### 4. Обсуждение результатов расчетов

В качестве конкретных примеров рассмотрим динамическое поведение цилиндрических панелей толщиной  $2h = 2$  см, имеющих в плане прямоугольную форму ( $G: |x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq b$ ,  $a = 3b$ ). Панели искривлены в направлении  $Ox_2$  ( $1/R_1 = 0$ ,  $R_2 \equiv R = \text{const}$ ). Пологие оболочки характеризуются стрелой подъема  $f$  над продольными кромками  $|x_2| = b$ , причем из геометрических соображений

$$R = (b^2 + f^2)/(2f), \quad 0 \leq f \leq 2b/5. \quad (42)$$

По всему контуру  $\Gamma = \Gamma_u$  конструкции жестко закреплены (см. (23), (24) при  $U_{,i} \equiv 0$ ) и в начальный момент времени  $t = t_0 = 0$  покоятся (см. (25), (26) при  $U_{0i} \equiv 0$ ,  $V_{0i} \equiv 0$ ). Объемные нагрузки не учитываем (см. (20), (21) при  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 3$ )), считаем, что панели нагружаются давлением, вызванным воздушной взрывной волной [21]:

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (43)$$

где

$$\alpha = -\ln(0,01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}. \quad (44)$$

Давление прикладывается к верхней ( $x_3 = h$ ) или нижней ( $x_3 = -h$ ) лицевой поверхности оболочки (см. (18), (20), (32), (33)), причем

$$\sigma_{33}^{(-)}(t) = \begin{cases} -p(t), & p_{\max} > 0, \\ 0, & p_{\max} < 0, \end{cases} \quad \sigma_{33}^{(+)}(t) = \begin{cases} 0, & p_{\max} > 0, \\ p(t), & p_{\max} < 0. \end{cases} \quad (45)$$

Здесь:  $t_{\max}$  — момент времени, в который давление  $p(t)$  достигает максимального значения по модулю  $|p_{\max}|$ ;  $t_{\min}$  — момент времени, при превышении которого  $p(t)$  можно считать по модулю пренебрежимо малым по сравнению с  $|p_{\max}|$  (выражению (44) соответствует  $p(t_{\min}) = 0,01 p_{\max}$ ).

Согласно экспериментальным данным [21] принимаем  $t_{\max} = 0,1$  мс и  $t_{\min} = 2$  мс. На основании (45) учитываем, что при  $p_{\max} > 0$  давление (43) действует на нижнюю (вогнутую) лицевую поверхность, а при  $p_{\max} < 0$  — на верхнюю (выпуклую) поверхность.

Считаем, что панели выполнены или из низкопрочного алюминиевого сплава АДМ (высокопрочного титанового сплава ИМЗ18А) и армированы высокопрочной стальной проволокой У8А [22] (металлокомпозиции), или из эпоксидной смолы и усилены стекловолокнами марки S-994 [22, 23] (стеклопластик). Упругопластическое деформирование материалов компонентов композиции на стадии активного нагружения характеризуется диаграммой с линейным упрочнением:

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)} \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_y^{(k)} = \sigma_y^{(k)} / E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_y^{(k)} + E_y^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_y^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_y^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases} \quad (46)$$

где  $\sigma, \varepsilon$  — осевые напряжение и деформация;  $E_y^{(k)}$  — модуль линейного упрочнения материала  $k$ -го компонента композиции;  $\sigma_y^{(k)}, \varepsilon_y^{(k)}$  — предел текучести и соответствующая ему деформация того же материала. Физико-механические характеристики материалов компонентов изучаемых композиций приведены в таблице, где  $\varepsilon_{*y}^{(k)} = \frac{2}{3}(1 + \nu^{(k)}) \varepsilon_y^{(k)}$  — значение интенсивности деформаций, при котором в материале  $k$ -го компонента впервые достигается пластическое состояние.

Физико-механические характеристики компонентов композиций материалов панелей [22, 23]

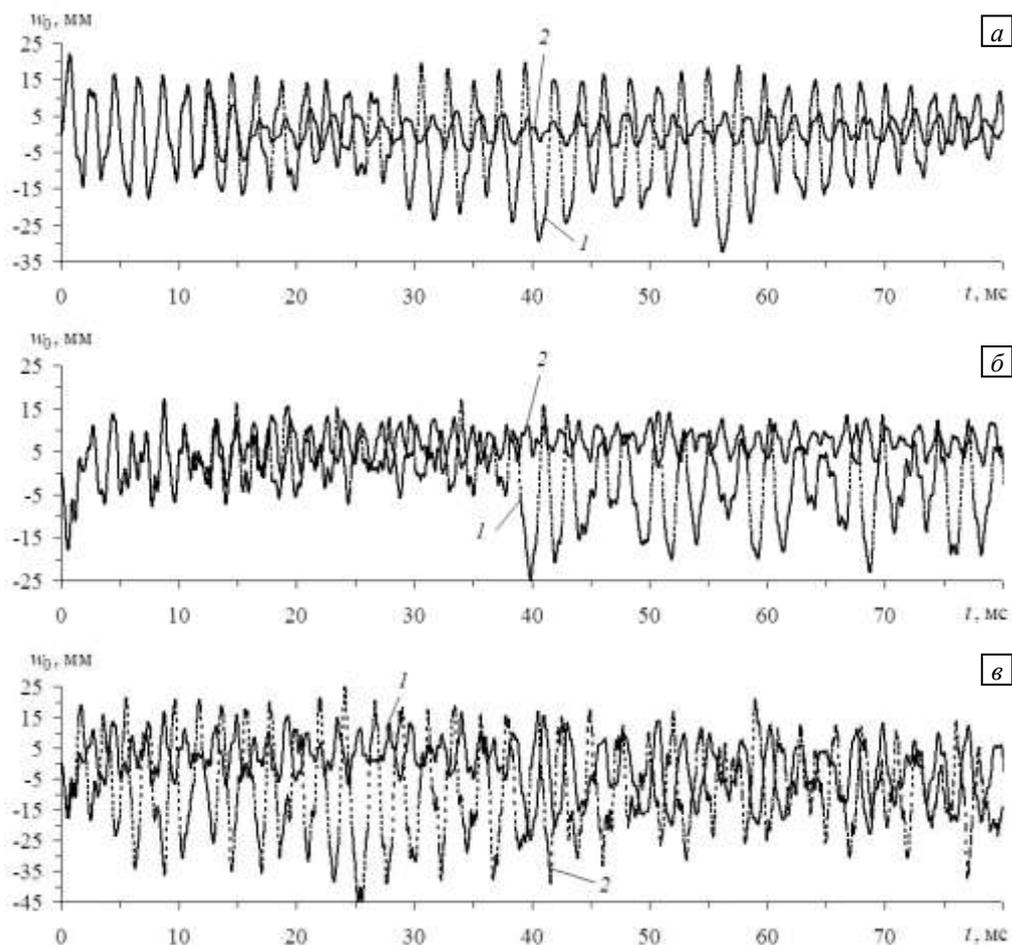
Материал	$\rho, \text{ кг / м}^3$	$\nu$	$\sigma_y, \text{ МПа}$	$E, \text{ ГПа}$	$E_y, \text{ ГПа}$	$\varepsilon_{*y}, \%$
Эпоксидная смола	1210	0,33	20	2,8	1,114	0,6333
Стекловолокно S-994	2520	0,25	4500	86,8	6,230	4,3203
Алюминиевый сплав АДМ (Al)	2710	0,30	30	71,0	0,143	0,0366
Стальная проволока У8А	7800	0,31	3968	210,0	6,973	1,6202
Титановый сплав ИМЗ18А (Ti)	4500	0,31	1095	119,0	1,238	0,8036

Структуры армирования однородны:  $\theta_k = \text{const}, \varphi_k = \text{const}, \omega_k = \text{const}, 1 \leq k \leq K$  (см. (1), (9)). Рассмотрим следующие структуры: 1) «плоское» ортогональное 2D-армирование (Рис. 1а), когда два семейства волокон ( $K = 2$ ) уложены в направлениях  $Ox_1$  и  $Ox_2$  с плотностями армирования  $\omega_1 = 0,266$  и  $\omega_2 = 0,324$  соответственно; 2) пространственное ортогональное 3D-армирование (Рис. 1б), когда три семейства волокон ( $K = 3$ ) уложены по направлениям  $Ox_1, Ox_2$  и  $Ox_3$  с плотностями армирования  $\omega_1 = 0,235, \omega_2 = 0,324$  и  $\omega_3 = 0,031$  [24]; 3) неортогональное пространственное 4D-армирование (Рис. 1в), когда первые два семейства уложены по направлениям  $Ox_1$  и  $Ox_2$ , а третье и четвертое семейства — наклонно, по направлениям, задаваемым углами (см. (9)):  $\theta_3 = \pi/4, \theta_4 = 3\pi/4, \varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$  (то есть на рисунке 1в  $\theta = \pi/4$ ). В последнем случае плотности армирования имеют значения:  $\omega_1 = 0,126, \omega_2 = 0,324$  и  $\omega_3 = \omega_4 = 0,07$ . Во всех структурах армирования расход волокон одинаков, а суммарная плотность армирования составляет  $\omega_* = \sum_{k=1}^K \omega_k = 0,59$ , что близко к предельно допустимому значению плотности армирования, которое на практике равно примерно 0,7.

На рисунке 3 изображены поперечные осцилляции центральной точки металлокомпозитной АІ–У8А-панели с 3D-структурой армирования ( $w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$ ) и размерами  $b = 50$  см,  $f = 12$  см (см. (42)). Кривые 1 на рисунках 3а, б получены по уточненной теории при  $m = 7$  (см. (2)), а линии 2 — по теории Редди ( $m = 0$ ). Все кривые на рисунке 3в рассчитаны по уточненной теории. Зависимости  $w_0(t)$  на рисунке 3а определены при  $p_{\max} = 30$  МПа, а на рис. 3б и 3в — при  $p_{\max} = -30$  МПа (см. (43), (45)). Сравнение кривых 1 и 2 на рисунках 3а и 3б показывает, что при  $t > 10$  мс решение, полученное по теории Редди, существенно отличается от уточненного.

Кривая 1 на рисунке 3в совпадает с линией 1 на рисунке 3б, кривая 2 на 3в приведена для сравнения и соответствует чисто упругому деформированию материалов компонентов АІ–У8А-композиции, когда в (46) формально  $\sigma_y^{(k)} \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq k \leq K = 3$ . На рисунке 4 изображены вычисленные для этого же случая осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций  $\varepsilon_*^{(k)}$  ( $\varepsilon_m^{(k)}(t) = \max_r \varepsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r})$ ,  $|x_1| \leq a/2$ ,  $|x_2| \leq b/2$  и  $|x_3| \leq h$ ) в связующем материале ( $k = 0$ ) и в арматуре второго семейства ( $k = 2$ ), уложенной в направлении  $Ox_2$  и испытывающей наибольшее деформирование. Кривые 1 и 2 на рисунке 4 установлены при тех же условиях, что и линии на рисунке 3в, а кривые 3 рисунка 4 соответствуют максимальным значениям интенсивности пластических деформаций в рассматриваемых компонентах композиции.

Сравнение зависимостей  $w_0(t)$  (см. Рис. 3в) показывает, что после прекращения действия динамической нагрузки (при  $t > 2$  мс) кривые 1 и 2 существенно различаются, причем размах осцилляций на кривой 1 (упругопластическое решение) значительно меньше размаха осцилляций на кривой 2 (чисто упругое деформирование). Это свидетельствует о значительной механической диссипации энергии за счет пластического деформирования компонентов АІ–У8А-композиции, которое происходит в основном вблизи

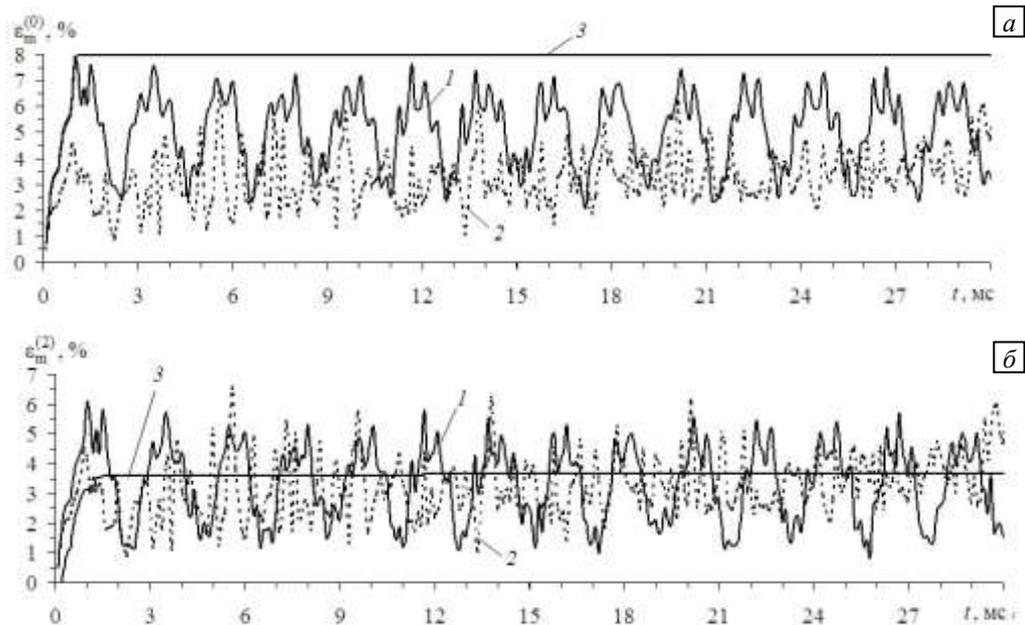


**Рис. 3.** Осцилляции центральной точки относительно тонкой 3D-армированной металлокомпозитной АІ–У8А-панели, рассчитанные по разным теориям (на этом и последующих рисунках соответствующие тексту графики обозначены цифрами) при нагружении со стороны лицевой поверхности: вогнутой (а); выпуклой (б); выпуклой как (б), но в сравнении с чисто упругим решением (в)

начального момента времени, когда активно действует внешняя нагрузка (см. особенности поведения линий 3 на рисунке 4). Наибольшие же значения величины  $\varepsilon_m^{(0)}$ , полученной при чисто упругом решении (см. кривую 2, Рис. 4а), как правило, существенно меньше аналогичных значений, рассчитанных при упругопластическом деформировании компонентов композиции (см. кривую 1, Рис. 4а). Отношение ординат точек на кривых 3 (Рис. 4) к значениям  $\varepsilon_{*y}^{(k)}$ , приведенным для соответствующих материалов в таблице, позволяет оценить, во сколько раз максимальные значения пластических деформаций в отдельном компоненте композиции больше предельных упругих деформаций, при которых в нем впервые достигается предел текучести  $\sigma_y^{(k)}$  ( $k = 0, 2$ ).

Традиционно принято считать, что при интенсивном кратковременном нагружении конструкции она пластически деформируется в интервале времени, когда действует нагрузка; после же снятия нагрузки конструкция совершает свободные колебания относительно нового положения, определяемого остаточными деформациями (остаточными прогибами) [12]. Поведение кривых 3 на рисунке 4, как уже отмечалось, показывает, что наибольшие пластические деформации в компонентах А1–У8А-композиции действительно достигаются на начальном интервале времени, когда действует внешняя динамическая нагрузка взрывного типа. Однако поведение кривой 1 на рисунке 3в свидетельствует о том, что свободные колебания искривленной панели при  $t > 2$  мс происходят практически относительно значения  $w_0 = 0$ , то есть заметные остаточные прогибы не наблюдаются.

Объясняется это следующими фактами. Согласно допущениям 2, 3 и первому соотношению из (12) связующее и волокна вдоль траектории армирования деформируются одинаково. Ординаты же точек на горизонтальных участках линий 3 рисунка 4 свидетельствуют о том, что пластические деформации в связующем материале более чем вдвое превосходят аналогичные величины в арматуре. Следовательно, при разгрузке элемента композиции арматура стремится поджать пластически деформированное связующее и приводит к приспособлению материалов компонент композиции к периодически сменяющимся процессам нагружения и разгрузки элемента композиции. Так как рассматривается модель упруго-вязкопластического деформирования компонент композиции с изотропным упрочнением, то после каждого пластического деформирования компонентов композиции область их упругого деформирования расширяется. Следовательно, после такого деформационного упрочнения материалов компонентов композиции они деформируются в основном упруго (об этом свидетельствует тот факт, что линии 3 на рисунке 4 при  $t > 1$  мс имеют горизонтальные участки на всем рассматриваемом полуотрезке времени  $1 < t \leq 80$  мс). Кроме того, согласно данным, приведенным в таблице, предел текучести для стальной проволоки марки У8А на два порядка больше аналогичной величины для алюминиевого сплава АДМ. Это означает, что при сопоставимом содержании арматуры и связующего в представительном элементе композиции ( $\omega_* = 0,59$  и  $\omega_0 = 0,41$ ) энергия упругих деформаций, запасенная в арматуре, на два порядка больше работы внутренних сил на деформациях (в том числе и пластических) связующего

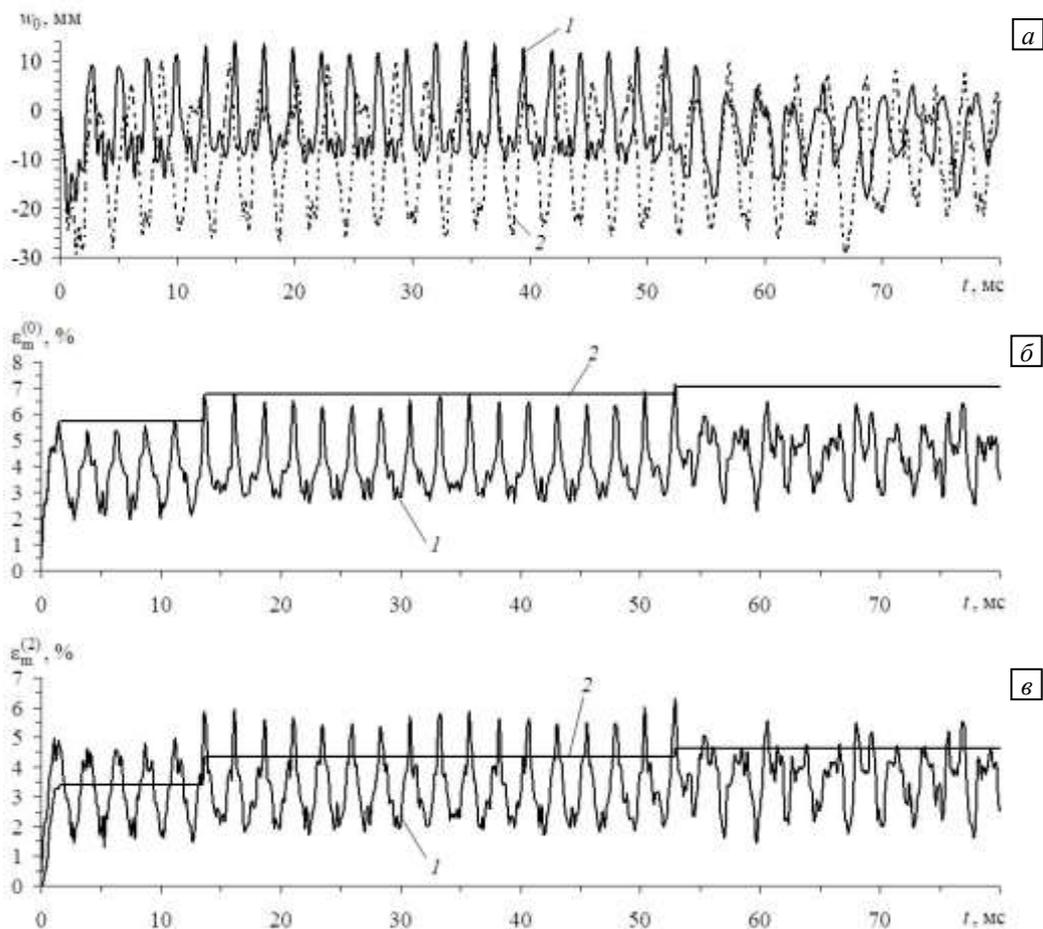


**Рис. 4.** Зависимость от времени максимальной интенсивности деформаций в компонентах композиции относительно тонкой 3D-армированной А1–У8А-панели, нагруженной со стороны выпуклой лицевой поверхности: в связующем (а); в арматуре второго семейства (б)

материала. Эта запасенная арматурой в большом количестве упругая энергия и стремится вернуть КМ-панель в исходное состояние, несмотря на наличие значительных пластических деформаций в компонентах композиции. Именно поэтому кривая 1 на рисунке 3в осциллирует около нулевой отметки ( $w_0 = 0$ ).

Очевидно, что с уменьшением относительного объемного содержания арматуры (при  $\omega_k \rightarrow 0$ ) происходит гомогенизация материала полой оболочки, и ее поведение при динамическом упругопластическом деформировании должно приближаться к традиционно наблюдаемому (см. выше). Для подтверждения этого факта на рисунке 5 изображены зависимости  $w_0(t)$ ,  $\varepsilon_m^{(0)}(t)$  и  $\varepsilon_m^{(2)}(t)$ , рассчитанные при  $p_{\max} = -15$  МПа (см. (43), (45)) для той же металлокомпозитной панели, но при плотностях армирования, уменьшенных в десять раз (за исключением кривой 2, Рис. 5а):  $\bar{\omega}_k = \omega_k / 10$ , где  $\omega_k$  — значения, приведенные ранее для структуры 3D-армирования. Кривые 1 имеют тот же смысл, что и кривые 1 на рисунках 3в и 4, а «ступенчатые» линии 2 рисунков 5б, в аналогичны линиям 3 на рисунке 4. Поведение «ступенчатых» линий 2 на рисунках 5б, в свидетельствует о том, что в моменты времени  $t \approx 13$  мс и  $t \approx 53$  мс (то есть значительно позже времени прекращения действия нагрузки) происходит увеличение максимальных значений интенсивностей пластических деформаций в компонентах композиции. Поведение же кривой 1 рисунка 5а показывает, что и в этом случае (когда суммарная плотность армирования материала КМ-панели составляет менее 6%) зависимость  $w_0(t)$  по-прежнему осциллирует вблизи нулевого значения. Однако при  $t > 53$  мс амплитуда колебаний резко уменьшается. Согласно поведению кривой 1 на рисунке 5а наибольший по модулю прогиб в этом случае действительно наблюдается на первой осцилляции, когда активно действует динамическая нагрузка.

Пунктирная кривая 2 на рисунке 5а приведена для сравнения и отвечает зависимости  $w_0(t)$ , рассчитанной при  $p_{\max} = -15$  МПа и  $\bar{\omega}_k = \omega_k / 100$ ,  $1 \leq k \leq K = 3$ . Заметим, что суммарная плотность армирования материала такой оболочки имеет значение менее 0,6%. На практике плотности армирования



**Рис. 5.** Зависимость от времени (при малых плотностях армирования) прогиба центральной точки относительно тонкой Al-U8A-панели с 3D-структурой, нагруженной со стороны выпуклой лицевой поверхности (а) и максимальной интенсивности деформаций в связующем (б); то же, что и на (б), но в арматуре второго семейства (в)

такого порядка встречаются только в железобетонных конструкциях. Поведение этой кривой свидетельствует о том, что соответствующая зависимость  $w_0(t)$  осциллирует уже не около нулевой отметки, а вблизи значения  $w_0 \approx -10$  мм, то есть в этом случае отчетливо виден остаточный прогиб. Важно, что расчетные значения остаточных прогибов КМ-конструкций, деформируемых пластически и нагруженных динамически, можно будет получить только после того, как будет построена соответствующая модель вязкоупруго-вязкопластического деформирования армированных сред. На данный момент времени такая модель не существует.

Согласно поведению кривой 2 (см. Рис. 5а) максимальный по модулю прогиб и в этом случае достигается в интервале времени, когда действует внешняя нагрузка ( $t \approx 2$  мс). Однако почти такое же значение прогиба по модулю имеет место и при  $t \approx 67$  мс, то есть значительно позже прекращения действия внешней динамической нагрузки. Более того, поведение кривых 1 на рисунке 3 и кривой 2 на рисунке 3в свидетельствует о том, что максимальные по модулю прогибы появляются в 3D-армированных гибких КМ-панелях значительно позже времени прекращения действия нагрузки взрывного типа, когда конструкция колеблется свободно и практически упруго (как было показано выше). Тот факт, что максимальный по модулю прогиб гибкая тонкостенная КМ-конструкция может получить после прекращения действия динамической нагрузки, продемонстрирован в [9] для упруго деформируемых гибких цилиндрических КМ-оболочек на основе аналитического решения. Так как рассмотренные выше армированные конструкции являются пологими цилиндрическими оболочками, то поведение кривых 1 на рисунке 3 не является аномальным и чем-то невозможным. Следует отметить, что традиционное поведение зависимости  $w_0(t)$ , когда максимальный прогиб достигается на первой осцилляции (в интервале времени действия внешней нагрузки), наблюдается только у неискривленных тонкостенных элементов КМ-конструкций типа прямолинейных балок и армированных пластин [25].

Выше обсуждалось динамическое поведение металлокомпозитных А1-У8А-панелей с низкопрочным связующим. На рисунке 6 приведены зависимости  $w_0(t)$ ,  $\varepsilon_m^{(0)}(t)$  и  $\varepsilon_m^{(2)}(t)$ , рассчитанные при  $p_{\max} = -40$  МПа для 3D-армированной (при исходных значениях плотностей армирования  $\omega_k$ )

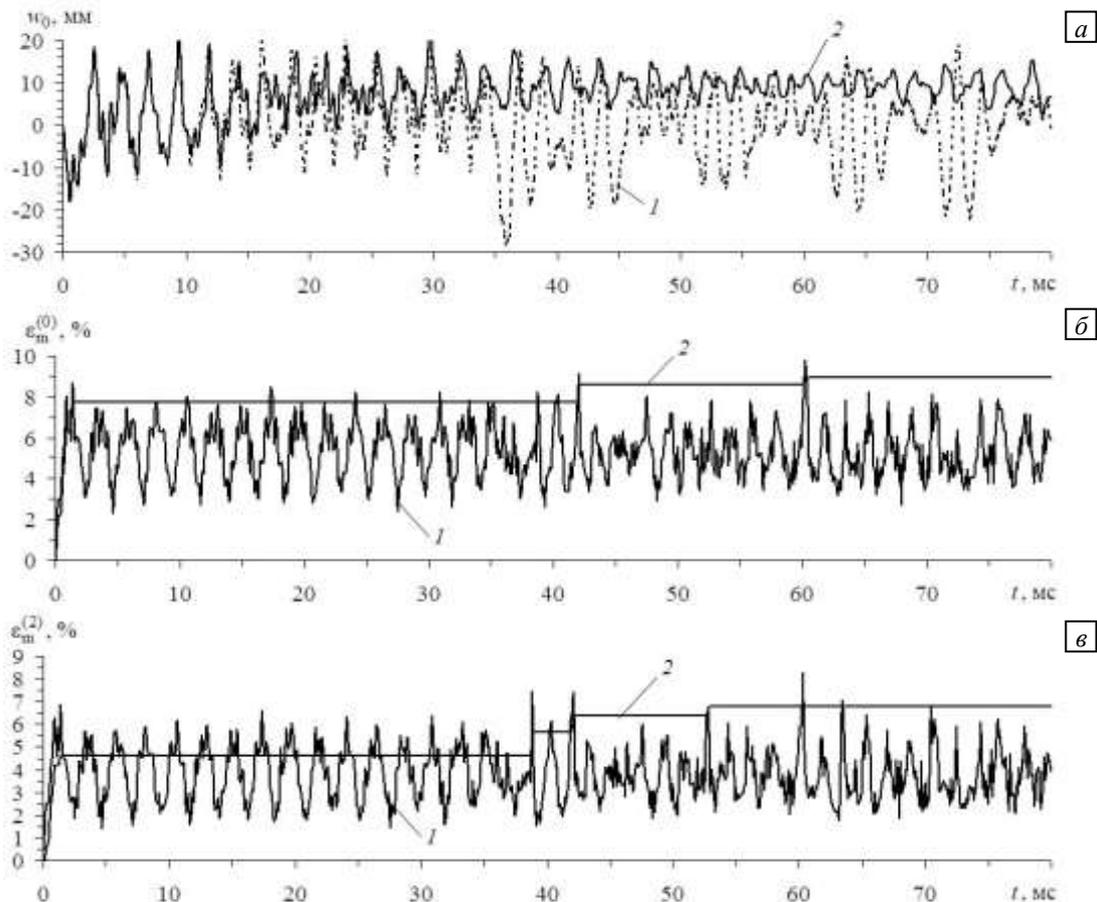
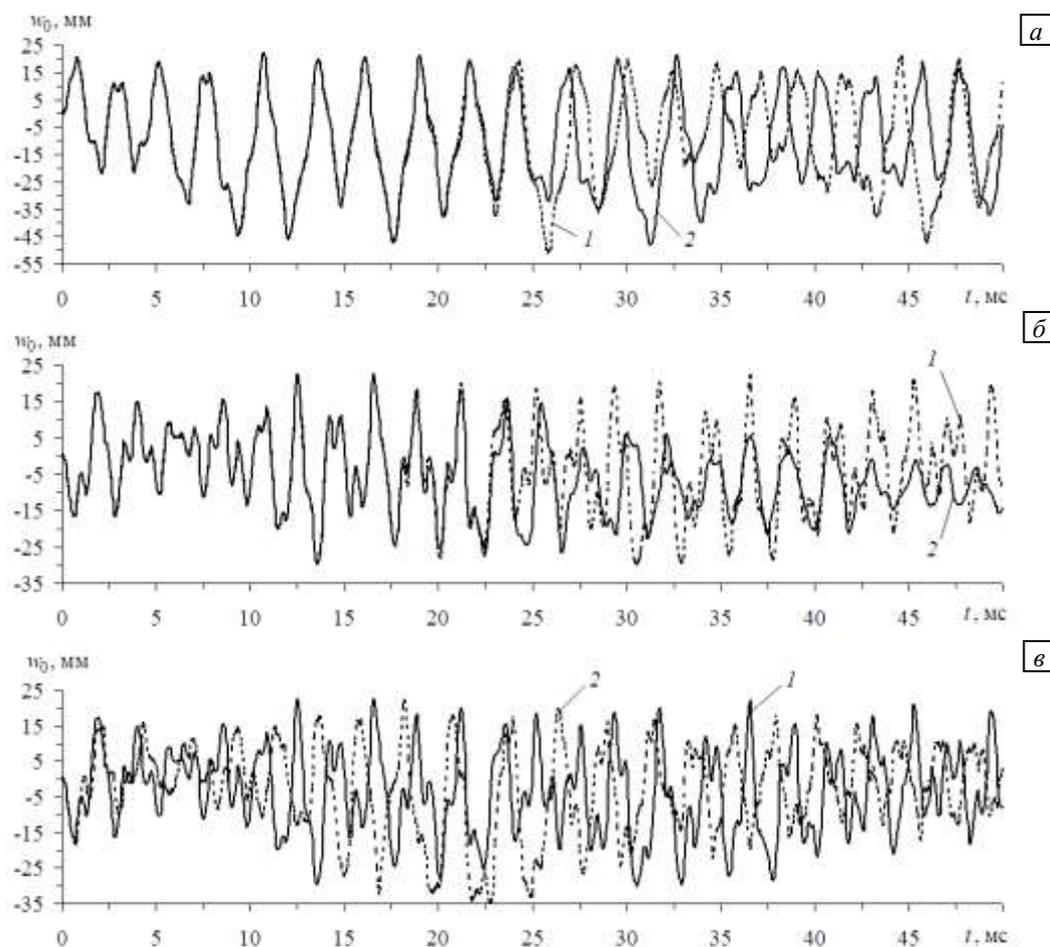


Рис. 6. Зависимость от времени (при исходных плотностях армирования) прогиба центральной точки относительно тонкой Тi-У8А-панели с 3D-структурой, нагруженной со стороны выпуклой лицевой поверхности (а); максимальной интенсивности деформаций в связующем материале (б); то же, что и на (б), но в арматуре второго семейства (в)

металлокомпозитной Ti–У8А-панели с высокопрочным связующим, когда предел текучести арматуры всего в 3,6 раза больше аналогичной величины для основного материала. Кривые (за исключением линии 2 на рисунке 6а) имеют тот же смысл, что и на рисунке 5, и их поведение качественно подобно. Однако, согласно характеру пунктирной кривой 1 на рисунке 6а, и в этом случае наибольший по модулю прогиб имеет место при  $t \approx 36$  мс, опять-таки значительно позже прекращения действия нагрузки взрывного типа. Сплошная кривая 2 рисунка 6а приведена для сравнения и вычислена при тех же условиях, что и линия 1, но по теории Редди ( $m = 0$ ). Сравнение кривых на рисунке 6а показывает, что и для пологой Ti–У8А-оболочки при  $t > 10$  мс зависимость  $w_0(t)$ , определенная по широко применяемой теории Редди, существенно отличается от результатов уточненного расчета (см. кривую 1).

Рассмотренные выше металлокомпозиции имеют слабо выраженную анизотропию, так как для Al–У8А-композиции характерно отношение  $E^{(k)}/E^{(0)} \approx 3$ , а для Ti–У8А-композиции —  $E^{(k)}/E^{(0)} \approx 1,76$ ,  $1 \leq k \leq 3$  (см. таблицу). Традиционно принято считать, что при расчетах упругого деформирования тонкостенных КМ-конструкций со слабо выраженной анизотропией материала вполне достаточна классическая теория [10]. Как показывают кривые, изображенные на рисунках 3а, б и 6а, в случаях упругопластического динамического деформирования 3D-армированных цилиндрических панелей со слабо выраженной анизотропией материала даже неклассическая теория Редди не гарантирует получения адекватных результатов расчетов. Необходимо прибегать к более точным теориям.



**Рис. 7.** Осцилляции центральной точки относительно тонкой 4D-армированной стеклопластиковой панели, рассчитанные по разным теориям при нагружении со стороны лицевой поверхности: вогнутой (а); выпуклой (б); выпуклой как на (б), но в сравнении с «плоским» 2D-армированием (в)

На рисунке 7 изображены зависимости  $w_0(t)$ , рассчитанные для стеклопластиковой 4D-армированной цилиндрической панели прежних размеров. Обозначения кривых на рисунках 7а, б такие же, как и на рисунках 3а, б. Кривые на рисунке 7а получены при  $p_{\max} = 9$  МПа, а на 7б — при  $p_{\max} = -9$  МПа. Анизотропия композиции при этом является сильно выраженной ( $E^{(k)}/E^{(0)} = 31$ ,  $1 \leq k \leq 4$ ). Сопоставление кривых 1 и 2 на рисунках 7а и 7б показывает, что в случае 4D-армирования тонкостенной панели (Рис. 1в) зависимости

$w_0(t)$ , определенные по теории Редди (кривые 2), при  $t > 2$  мс также значительно отличаются от  $w_0(t)$ , полученных по уточненной теории (кривые 1). Рисунок 7в содержит результаты уточненного расчета стеклопластиковой панели при  $p_{\max} = -9$  МПа, имеющей пространственную 4D-структуру армирования (кривая 1) и «плоскую» 2D-структуру (кривая 2). Сравнение кривых (см. Рис. 7в) свидетельствует о том, что замена «плоской» структуры армирования на пространственную 4D-структуру с одинаковым расходом волокон приводит к уменьшению максимального по модулю прогиба примерно на 20%.

Выше рассматривались относительно тонкие гибкие цилиндрические панели ( $h/b = 1/50$ ). На рисунке 8 приведены зависимости  $w_0(t)$ , определенные по уточненной теории ( $M = 7$ ) для относительно толстых стеклопластиковых панелей с размерами  $b = 10$  см,  $f = 2$  см ( $h/b = 1/10$ ). Расчеты проводились при  $p_{\max} = 20$  МПа (Рис. 8а) и  $p_{\max} = -20$  МПа (Рис. 8б). Сплошные кривые 1 отвечают панели с 4D-армированием, а пунктирные линии 2 — с «плоским» 2D-армированием. Сравнение сплошных и пунктирных кривых на рисунке 8 свидетельствует, что и в случае относительно толстых КМ-панелей замена «плоской» структуры армирования на пространственную 4D-структуру приводит к уменьшению максимального по модулю прогиба примерно на 20%.

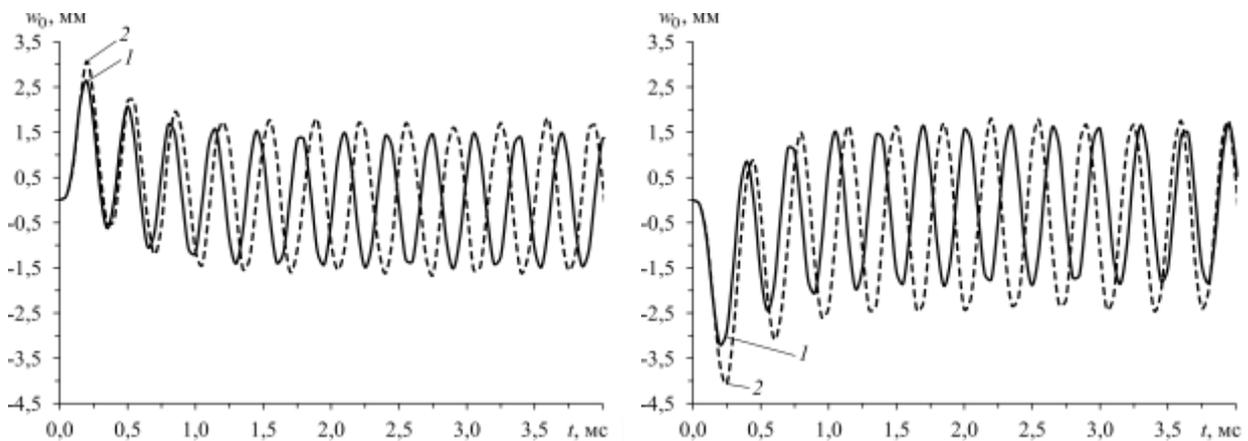


Рис. 8. Осцилляции центральных точек (уточненный расчет) относительно толстых 2D- и 4D-армированных стеклопластиковых панелей, нагруженных со стороны лицевой поверхности: вогнутой (а); выпуклой (б)

Следует отметить, что все кривые на рисунке 8 осциллируют в полном соответствии с традиционным представлением о том, как должны колебаться тонкостенные конструкции при их упругопластическом деформировании под действием интенсивной кратковременной нагрузки. Действительно, на всех кривых максимальный по модулю прогиб достигается на первой осцилляции; после же прекращения действия внешней нагрузки ( $t > 2$  мс) конструкции колеблются свободно относительно новых положений равновесия, которые определяются величиной остаточного прогиба  $w_*$ . Так, для кривой 2 на рисунке 8а прогиб составляет  $w_* \approx 0,1$  мм, а для кривой 2 на рисунке — 8б  $w_* \approx -0,33$  мм. Объясняется это тем, что в рассматриваемом случае прогибы являются малыми по сравнению с толщиной КМ-панели, и геометрическая нелинейность задачи практически не проявляется.

В настоящей работе расчеты по уточненной теории проводились при  $M = 7$  (см. (2)). При  $M \geq 8$  наблюдается неустойчивость численного решения, которая имеет ту же причину, что и в [17].

## 5. Заключение

Проведенный анализ упругопластического изгибного динамического поведения пологих КМ-оболочек с пространственными и «плоскими» структурами армирования показал, что замена «плоской» перекрестной структуры армирования (с сильно выраженной анизотропией) на пространственную структуру с сохранением общего расхода волокон позволяет уменьшить податливость искривленной панели в поперечном направлении на несколько десятков процентов, причем как для относительно толстых, так и относительно тонких конструкций.

Осуществленные в данном исследовании и в [17] расчеты показали, что при изучении упругопластического динамического деформирования гибких пологих КМ-оболочек как с «плоскими», так и с пространственными структурами армирования использование традиционной неклассической теории Редди может привести к значительному отличию от результатов, полученных на базе уточненной теории изгиба, даже для относительно тонких искривленных КМ-панелей, в том числе и в случаях слабо выраженной анизотропии композиции (в металлокомпозитах). При увеличении расчетных интервалов времени это различие существенно возрастает. Для получения адекватных результатов расчетов

динамического упругопластического изгибного поведения пологих КМ-оболочек необходимо применять уточненные (по сравнению с теорией Редди) модели, например предложенные в настоящей работе.

Исследования показали, что в силу геометрической и физической нелинейности рассматриваемых задач максимальный по модулю прогиб относительно тонких КМ-оболочек может возникнуть после нескольких десятков их колебаний в поперечном направлении, то есть значительно позже момента прекращения действия кратковременной, но интенсивной динамической нагрузки. В случае относительно толстых искривленных КМ-панелей максимальный по модулю прогиб достигается на первой осцилляции, так как геометрическая нелинейность при этом практически не проявляется.

## Литература

1. *Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А.* Пространственно-армированные композиционные материалы. Справочник. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
2. *Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R.* A new generation of 3D woven fabric performs and composites // *SAMPE J.* 2001. Vol. 37. No. 3. P. 3-17.
3. *Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M.* Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // *Mech. Compos. Mater.* 2009. Vol. 45. P. 165-174. [DOI](#)
4. *Тарнопольский Ю.М., Поляков В.А., Жигун И.Г.* Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 1. Расчет упругих характеристик // *Механика полимеров.* 1973. № 5. С. 853-860. (English version [DOI](#))
5. *Крегерс А.Ф., Тетерс Г.А.* Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов // *Механика композитных материалов.* 1982. № 1. С. 14-22. (English version [DOI](#))
6. *Янковский А.П.* Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель // *Механика композитных материалов.* 2010. Т. 46, № 5. С. 663-678. (English version [DOI](#))
7. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрушин В.А.* Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
8. *Янковский А.П.* Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2016. Т. 9, № 3. С. 279-297. [DOI](#)
9. *Богданович А.Е.* Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
10. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
11. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопrotивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 498 с.
12. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
13. *Reddy J.N.* Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis / 2<sup>nd</sup> Ed. Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
14. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры. Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 336 с.
15. *Андреев А.* Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrücken, Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.
16. *Каледин В.О., Аульченко С.М., Миткевич А.Б., Решетникова Е.В., Седова Е.А., Шпакова Ю.В.* Моделирование статике и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов. М.: Физматлит, 2014. 196 с.
17. *Янковский А.П.* Уточненная модель упругопластического изгибного деформирования гибких армированных пологих оболочек, построенная на основе явной схемы типа «крест» // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2017. Т. 10, № 3. С. 276-292. [DOI](#)
18. *Whitney J.M., Sun C.T.* A higher order theory for extensional motion of laminated composites // *J. Sound Vib.* 1973. Vol. 30. No. 1. P. 85-97. [DOI](#)
19. *Белькаид К., Тати А., Бумараф Р.* Простой конечный элемент с пятью степенями свободы в узле, основанный на теории сдвигового деформирования третьего порядка // *Механика композитных материалов.* 2016. Т. 52, № 2. С. 367-384. (English version [DOI](#))
20. *Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д.* Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск: Сиб. ун-в. изд-во, 2002. 352 с.
21. *Houlston R., DesRochers C.G.* Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Comput. Struct.* 1987. Vol. 26. No. 1-2. P. 1-15. [DOI](#)
22. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
23. Справочник по композитным материалам / Под ред. Дж. Любина. М.: Машиностроение, 1988. Кн. 1. 448 с.
24. *Жигун И.Г., Душин М.И., Поляков В.А., Якушин В.А.* Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение // *Механика полимеров.* 1973. № 6. С. 1011-1018. (English version [DOI](#))
25. *Янковский А.П.* Построение уточненной модели упругопластического поведения гибких армированных пластин при динамическом нагружении // *Механика композиционных материалов и конструкций.* 2017. Т. 23, № 2. С. 283-304. [DOI](#)

## References

1. Tarnopol'skiy Yu.M., Zhigun I.G., Polyakov V.A. *Prostranstvenno-armirovannyye kompozitsionnyye materialy. Spravochnik* [Spatially reinforced composite materials: Handbook]. M.: Mashinostroyeniye, 1987. 224 p.
2. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. A new generation of 3D woven fabric performs and composites. *SAMPE J.*, 2001, vol. 37, no. 3, pp. 3-17.
3. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites. *Mech. Compos. Mater.*, 2009, vol. 45, pp. 165-174. [DOI](#)
4. Tarnopol'skii Y.M., Polyakov V.A., Zhigun I.G. Composite materials reinforced with a system of three straight, mutually orthogonal fibers. *Polymer Mechanics*, 1973, vol. 9, pp. 754-759. [DOI](#)
5. Kregers A.F., Teters G.A. Structural model of deformation of anisotropic three-dimensionally reinforced composites. *Mech. Compos. Mater.*, 1982, vol. 18, pp. 10-17. [DOI](#)
6. Yankovskii A.P. Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 1. Structural model. *Mech. Compos. Mater.*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 451-460. [DOI](#)
7. Solomonov Yu.S., Georgiyevskiy V.P., Nedbay A.Ya., Andryushin V.A. *Prikladnyye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]. M.: Fizmatlit, 2014. 408 p.
8. Yankovskii A.P. Applying the explicit time central difference method for numerical simulation of the dynamic behavior of elastoplastic flexible reinforced plates. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2017, vol. 58, no. 7, pp. 1223-1241. [DOI](#)
9. Bogdanovich A.E. *Nelineynyye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]. Riga: Zinatne, 1987. 295 p.
10. Ambartsumyan S.A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* [The general theory of anisotropic shells]. M.: Nauka, 1974. 446 p.
11. Malmeyster A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivleniye zhestkikh polimernykh materialov* [Resistance of rigid polymeric materials]. Riga: Zinatne, 1972. 498 p.
12. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynyye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksiy* [Nonlinear problems of dynamics composites designs]. Nizhniy Novgorod: Nizhniy Novgorod State University, 2002. 400 p.
13. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis / 2<sup>nd</sup> Ed.* Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
14. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey N.A. *Nelineynoye deformirovaniye i ustoychivost' uprugikh obolochek neodnorodnoy struktury. Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi* [Nonlinear deformation and stability of elastic shells of non-uniform structure. Models, methods, algorithms, the insufficiently studied and new problems]. M.: Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2012. 336 p.
15. Andreev A. *Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model' i nekotoryye aspekty chislennogo analiza* [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis.]. Saarbrücken, Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 p.
16. Kaledin V.O., Aul'chenko S.M., Mitkevich A.B., Reshetnikova E.V., Sedova E.A., Shpakova Yu.V. *Modelirovaniye statiki i dinamiki obolocheknykh konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov* [Simulation of statics and dynamics of shell structures made of composite materials]. M.: Fizmatlit, 2014. 196 p.
17. Yankovskii A.P. A refined model of elastic-plastic bending deformation of flexible reinforced shallow shells based on explicit "cross" scheme. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 276-292. [DOI](#)
18. Whitney J.M., Sun C.T. A higher order theory for extensional motion of laminated composites. *J. Sound Vib.*, 1973, vol. 30, no. 1, pp. 85-97. [DOI](#)
19. Belkaid K., Tati A., Boumaraf R. A simple finite element with five degrees of freedom based on Reddy's third-order shear deformation theory. *Mech. Compos. Mater.*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 257-270. [DOI](#)
20. Ivanov G.V., Volchkov Yu.M., Bogul'skiy I.O., Anisimov S.A., Kurguzov V.D. *Chislennoye resheniye dinamicheskikh zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniya tverdyykh tel* [Numerical solution of dynamic problems of elastoplastic deformation of solids]. Novosibirsk: Siberian university, 2002. 352 p.
21. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Comput. Struct.*, 1987, vol. 26, no. 1-2, pp. 1-15. [DOI](#)
22. Karpinos D.M. (ed.) *Kompozitsionnyye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Reference Book]. Kiev: Naukova dumka, 1985. 592 p.
23. Lubin G. (ed.) *Handbook of composites*. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982. 786 p.
24. Zhigun I.G., Dushin M.I., Polyakov V.A., Yakushin V.A. Composites reinforced with a system of three straight mutually orthogonal fibers. *Polymer Mechanics*, 1973, vol. 9, pp. 895-900. [DOI](#)
25. Yankovskii A.P. Construction of refined model of elastic-plastic behavior of flexible reinforced plates under dynamic loading. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy – Mechanics on composite materials and design*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 283-304. [DOI](#)

Поступила в редакцию 23.07.2018; опубликована в электронном виде 22.10.2018

## Сведения об авторе

Янковский Андрей Петрович, дфмн, внс, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (ИТПМ СО РАН), 630090, Новосибирск, ул. Институтская, д. 4/1; E-mail: lab4nemir@rambler.ru