

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.3.24](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.3.24)

УДК 539.388.1; 539.431

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ СПЛАВА АМГ2.5 В РЕЖИМЕ МНОГО- И ГИГАЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ

Д.А. Билалов, Ю.В. Баяндин, О.Б. Наймарк

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

Прогнозирование предела выносливости в много- и гигацикловом диапазоне нагружения (10^2 – 10^{10}) является актуальной проблемой в таких областях, как авиационное моторостроение, скоростной железнодорожный транспорт, и предполагает разработку моделей и их экспериментальную верификацию с учётом стадийности развития повреждённости и развития усталостных трещин в повреждённой среде. Предложена модель развития повреждённости, учитывающая кинетику дефектов и эффекты микропластичности, которая применена для исследования процесса усталостного разрушения конструкционного сплава АМг2.5. Параметры модели идентифицированы и верифицированы с использованием экспериментальных данных по статическому, динамическому и усталостному нагружению, а также испытаний при различных температурах. На основе численно полученных данных построена кривая Вёлера, которая хорошо согласуется с экспериментальной в области многоциклового усталости. Описан эффект дуальности S–N диаграммы. Вычислительный эксперимент по исследованию влияния динамического нагружения на усталостную прочность показал слабую зависимость величины предела усталости от предварительного динамического деформирования, что подтверждается экспериментальными данными. Проведено сравнение различных математических пакетов и численных методов для решения построенной системы дифференциальных уравнений. Показано, что метод Адамса и его модификации оптимальны для численного интегрирования уравнений рассматриваемой задачи, а предпочтительным программным комплексом является Wolfram Mathematica. Исследован вопрос сходимости численного решения.

Ключевые слова: численное моделирование, гигацикловая усталость, дуальность кривой Вёлера, циклическое нагружение, усталостное разрушение, предел выносливости

MATHEMATICAL MODELING OF FAILURE PROCESS OF ALMG2.5 ALLOY DURING HIGH- AND VERY HIGH CYCLE FATIGUE

D.A. Bilalov, Yu.V. Bayandin and O.B. Naimark

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

Forecasting the limit of endurance in the high- and very high cycle loading range (10^2 – 10^{10}) is an actual problem of aircraft engine construction and high-speed rail transport. It involves the development of models and their experimental verification, taking into account the stages of development of damage and the development of fatigue cracks in a damaged medium. The proposed model of the damage evolution, taking into account the kinetics of defects and effects of microplasticity, was used to study the process of fatigue failure of a structural alloy AlMg2.5. The model parameters were identified and verified using experimental data on static, dynamic and fatigue loading, as well as tests at various temperatures. The Weller curve is numerically constructed. It agrees well with experiment in the range of high cycle fatigue. The duality effect of the S–N diagram is described. A computational experiment on the effect of dynamic loading on fatigue strength showed a weak dependence of the fatigue limit on preliminary dynamic strain. It is confirmed by experimental data. Comparison of various mathematical packages and numerical methods for solving the constructed system of differential equations carried out. The optimality of the Adams method and its modifications for numerical integration of the problem under consideration is shown. Wolfram Mathematica is the preferred software package for numerical solution. The problem of convergence of the numerical solution has been investigated.

Key words: numerical simulation, very high cycle fatigue, duality of the Weller curve, cyclic loading, fatigue failure, endurance limit

1. Введение

Элементы конструкций и детали машин в процессе эксплуатации испытывают циклические нагрузки с различными амплитудами напряжений. В зависимости от величины приложенной нагрузки материал способен выдержать разное количество циклов до разрушения. Выделяют три типа усталостного разрушения. Первый тип — малоцикловая усталость (10^1 – 10^3 циклов), характеризуется амплитудами напряжений, превышающими предел текучести, реализацией макроскопических пластических деформаций и разрушением с образованием множественных трещин на поверхности эксплуатируемой детали. При многоциклового усталости (10^4 – 10^7 циклов) — втором типе, амплитуды напряжений ниже или близки к пределу текучести, разрушение происходит за счёт инициирования единичной критической трещины на поверхности элемента конструкции. Третий тип — гигацикловая усталость (10^8 – 10^{10} циклов), наблюдается при напряжениях, существенно меньших предела текучести, и является следствием развития микропластических деформаций, локализованных в некоторых областях материала. Распространены случаи зарождения трещины под поверхностью, что делает данный тип разрушения наиболее опасным и проблемным для диагностики. Анализу закономерностей много- и гигациклового разрушения посвящён ряд работ [1–10]. Прикладная значимость и высокая стоимость оценки усталостного ресурса конструкций

послужили причинами создания лабораторных установок и методик для исследования механизмов разрушения в области сверхмногоцикловых режимов. Исследования проводятся, как правило, с использованием небольших образцов с концентраторами напряжений на высокочастотных (100 Гц) [8] и ультразвуковых (20 000 Гц) [10] машинах.

Цель лабораторного эксперимента заключается в обосновании моделей, описывающих стадийность развития поврежденности, инициирование и распространение трещин в поврежденной среде, что отражает специфику оценки ресурса в области сверхмногоцикловых нагружений по сравнению с традиционными подходами при мало- и многоциклового усталости [11–17]. В [9–13] предложены обобщения моделей кинетики роста усталостных трещин (закона Пэриса) с учётом структурных факторов развития поврежденности. В то же время численное моделирование показало ограниченность существующих аналитических подходов и их адекватность лишь в определённом диапазоне напряжений [12–14]. Тем не менее, прямое численное моделирование разрушения в режиме гигацикловой усталости, а именно — решение краевой задачи даже для лабораторного образца, не говоря уже про реальную конструкцию, не представляется возможным из-за потребности в огромных вычислительных и временных ресурсах. Такое реализуемо лишь для малоциклового усталости [15, 16]. Попытки решить краевую задачу при гигацикловых режимах сводятся к моделированию ситуации с уже образованной трещиной под поверхностью [12, 13]. При этом для процесса зарождения трещины используются аналитические оценки с помощью обобщённого закона Пэриса. Применимы также численно-аналитические подходы, согласно которым решается задача определения напряжённо-деформированного состояния при одном цикле, затем по найденным максимальным напряжениям аналитически рассчитывается число циклов до разрушения и прогнозируется разрушение деталей конструкций в режиме многоциклового усталости [17]. Другой подход заключается в сведении пространственной постановки к обыкновенным дифференциальным уравнениям для представительных объёмов вблизи и вдали от свободной границы [14]. В последнем случае записываются определяющие соотношения для режимов много- и гигацикловой усталости с различными константами, что лишает модель универсальности.

Таким образом, актуальной задачей является обоснование модели, при помощи которой единичными уравнениями можно представить поведение материала при усталостном разрушении в широком диапазоне циклов нагружения (10^2 – 10^9). Цель настоящей работы состоит в построении определяющих соотношений для адекватного моделирования процесса циклического нагружения в широком диапазоне амплитуд напряжений. Задача рассмотрена для алюминиевого сплава АМг2.5 — материала, широко используемого в машиностроении.

2. Математическая модель

Широкодиапазонные определяющие соотношения, связывающие кинетику поврежденности, обусловленную дефектами, с релаксационными свойствами материалов [18, 19] — суть математической модели, способной описывать деформационное поведение металлов и сплавов при циклическом нагружении.

Для учёта эволюции структуры материала вводятся два параметра: тензор-значный s и скалярнозначный δ :

$$s = s(lb + bl)/2, \quad \delta = (R/r_0)^3.$$

Здесь: s — тензор микросдвигов; s — интенсивность сдвига; l — единичный вектор нормали к плоскости сдвига; b — единичный вектор в направлении сдвига; δ — масштабно-инвариантный структурный параметр; R — расстояние между дефектами; r_0 — характерный размер зародышей дефектов.

Усреднение s по элементарному объёму даёт тензор плотности микросдвигов:

$$p = \int s W(s, l, b) dV,$$

где V — объём, $W(s, l, b)$ — функция распределения ориентации и интенсивности сдвигов. По своему физическому смыслу p является деформацией, обусловленной дефектами.

Полная деформация скорости (D) состоит из трёх составляющих: пластической (D^{pl}), упругой (D^e) и обусловленной дефектами (D^p):

$$D = D^e + D^{pl} + D^p.$$

В случае малых деформаций $D^e = \dot{\varepsilon}^e$, $D^{pl} = \dot{\varepsilon}^p$, $D^p = \dot{p}$, где $\dot{\varepsilon}^e$, $\dot{\varepsilon}^p$, \dot{p} — упругая, пластическая и дефектная составляющие скорости деформации $\dot{\varepsilon}$. Так как для рассматриваемых материалов (металлов и

сплавов) параметр p всегда мал, то в дальнейшем вместо D^p будет использовано обозначение \dot{p} .

Из второго закона термодинамики следует, что диссипация энергии может быть представлена в виде:

$$T\dot{S} = \sigma : D^{pl} - \frac{\partial F}{\partial p} : D^p - \frac{\partial F}{\partial \delta} \dot{\delta} \geq 0, \quad (1)$$

где T — температура, \dot{S} — скорость изменения энтропии, σ — тензор напряжений, F — неравновесная свободная энергия.

Согласно принципу Онзагера из (1) вытекают следующие соотношения:

$$\sigma = l_1 D^{pl} - l_2 D^p, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial p} = -l_2 D^{pl} + l_3 D^p, \quad (3)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial \delta} = l_4 \dot{\delta}, \quad (4)$$

где l_1, l_2, l_3, l_4 , — положительные кинетические коэффициенты, в общем случае зависящие от параметров состояния и удовлетворяющие ограничению: $l_1 l_3 - l_2^2 > 0$.

Соотношения (2)–(4) можно переписать в виде:

$$D^{pl} = \Gamma_1 \sigma_d - \Gamma_2 \frac{\partial F}{\partial p}, \quad (5)$$

$$\dot{p} = \Gamma_2 \sigma_d - \Gamma_3 \frac{\partial F}{\partial p}, \quad (6)$$

$$\dot{\delta} = -\Gamma_4 \frac{\partial F}{\partial \delta}, \quad (7)$$

$$\sigma_d = \sigma - \sigma_s, \quad \sigma_s = \frac{1}{3}(\sigma : E) E,$$

где $\Gamma_1 = \frac{l_3}{l_1 l_3 - l_2^2}$, $\Gamma_2 = \frac{l_2}{l_1 l_3 - l_2^2}$, $\Gamma_3 = \frac{l_1}{l_1 l_3 - l_2^2}$, $\Gamma_4 = \frac{1}{l_4}$, E — единичный тензор, σ_d и σ_s — девиаторная и шаровая части тензора напряжений.

В уравнениях (5)–(7) используется следующее выражение для неравновесной свободной энергии:

$$\frac{F}{F_m} = \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{2\delta} + c_1 p + c_2 \ln(c_3 + c_4 p + p^2) - \frac{\sigma_d : p}{2G}, \quad (8)$$

где F_m, c_1, \dots, c_4 — константы потенциала (их значения приводятся в работе [18]), G — модуль сдвига, $p = \sqrt{p : p}$. Напряжения определяются согласно изотропному закону Гука в скоростной формулировке:

$$\sigma^R = \frac{\lambda}{3}(D : E) E + 2G(D - D^{pl} - \dot{p}), \quad (9)$$

где $(\cdot)^R$ — производная Грина–Нагди [20, 21], λ — первый параметр Ламе.

В случае необходимости учёта процессов диссипации энергии при неупругом деформировании система определяющих соотношений (5)–(9) дополняется уравнением теплопроводности:

$$\rho c \dot{T} = \alpha \Delta T + \sigma : D^{pl} - \frac{\partial F}{\partial p} : \dot{p} - \frac{\partial F}{\partial \delta} \dot{\delta}, \quad (10)$$

где ρ — массовая плотность, c — удельная теплоёмкость, α — коэффициент теплопроводности, $\Delta(\cdot)$ — оператор Лапласа.

Кинетические коэффициенты Γ_i в общем случае зависят от параметров состояния и записываются как $\Gamma_i = 1/(G\tau_i)$. Входящие сюда характерные времена релаксации τ_i можно представить в виде зависимостей [22]:

$$\tau_i = \tau_i^0 \exp \left\{ - \frac{U_i(\sigma, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \varepsilon^p, \dot{\varepsilon}^p, \dot{p}, \dot{p}, \delta, T)}{kT} \right\},$$

где k — постоянная Больцмана, $U_i(\cdot)$ — характерная энергия активации.

В работе принимается гипотеза о том, что для исследуемых процессов времена релаксации выражаются так:

$$\tau_i = \tau_i^0 \exp \left(- \frac{U_i \dot{\varepsilon}_0^{n_i} + U(T) - U_0}{kT} \right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (11)$$

$$\tau_4 = \tau_4^0 \exp \left(- \frac{U_4 \dot{p}_0^{n_s} - U_0}{kT} \right), \quad (12)$$

$$U(T) = \frac{k}{T_c^m} T^{m+1}. \quad (13)$$

Смысл данной гипотезы состоит в том, что физико-механические характеристики материала зависят от скорости деформации и температуры, а эволюция поврежденности при циклическом нагружении с малыми амплитудами напряжений обуславливается только параметром \dot{p} , который в данном случае может интерпретироваться как скорость роста усталостной трещины, отнесенная к характерному масштабу задачи. В формулах (11)–(13) приняты обозначения: $\dot{\varepsilon}_0 = \sqrt{(2/3)} \dot{\varepsilon} : \dot{\varepsilon} / \dot{\varepsilon}_c$, где $\dot{\varepsilon}_c = 1 \text{ с}^{-1}$ — обезразмеривающий множитель; $U_0 = kT$, U_i ($i = 1, \dots, 3$) — константы, имеющие смысл характерных энергий преодоления барьеров, после которых активируются новые механизмы релаксации; $\dot{p}_0 = \sqrt{\dot{p} : \dot{p}} / \dot{\varepsilon}_c$; T_c, m — параметры, отвечающие за изменение механических характеристик в зависимости от температуры; n_1, n_2, n_3, n_s — константы, характеризующие скоростную чувствительность материала.

Выражение (11) можно представить в виде:

$$\tau_i = \tau_i^0 \frac{\exp(-U(T)/(kT))}{\exp((U_i \dot{\varepsilon}_0^{n_i} - U_0)/(kT))}.$$

В предположении слабой скоростной чувствительности времён релаксации знаменатель дроби представим как разложение экспоненты в ряд в окрестности нуля с точностью до второго члена:

$$\exp \left(\frac{U_i \dot{\varepsilon}_0^{n_i} - U_0}{kT} \right) \approx 1 + \frac{U_i \dot{\varepsilon}_0^{n_i} - U_0}{kT} = 1 + \frac{U_i \dot{\varepsilon}_0^{n_i}}{kT} - \frac{U_0}{kT} = \frac{U_i \dot{\varepsilon}_0^{n_i}}{kT},$$

в результате получим:

$$\tau_i = \tau_i^0 \frac{\exp(-U(T)/(kT))}{(U_i \dot{\varepsilon}_0^{n_i} / (kT))} = \frac{\tau_i^0 kT}{U_i \dot{\varepsilon}_0^{n_i}} \exp \left(- \frac{U(T)}{kT} \right) = \frac{\tau_i^U}{\dot{\varepsilon}_0^{n_i}} \exp \left(- \frac{U(T)}{kT} \right).$$

Аналогично поступим для выражения (12):

$$\tau_4 = \tau_4^0 \exp \left(- \frac{U_4 \dot{p}_0^{n_s} - U_0}{kT} \right) = \tau_4^0 \exp \left(\frac{U_4 \dot{p}_0^{n_s} - U_0}{kT} \right) \approx \tau_4^0 \left(1 + \frac{U_4 \dot{p}_0^{n_s} - U_0}{kT} \right) = \frac{\tau_4^0 kT}{U_4 \dot{p}_0^{n_s}} = \frac{\tau_4^U}{\dot{p}_0^{n_s}}.$$

Тогда кинетические коэффициенты примут следующий вид:

$$\Gamma_i = \frac{\dot{\varepsilon}_0^{n_i}}{G \tau_i^U \exp\left(-\frac{U(T)}{kT}\right)} \quad (i = 1, \dots, 3), \quad \Gamma_4 = \frac{\dot{p}_0^{n_s}}{G \tau_4^U}.$$

Введём обозначения, которые в дальнейшем позволят упростить запись уравнений:

$$\Gamma_1 = \Gamma_\sigma \dot{\varepsilon}_0^{n_1} \exp\left(\frac{U(T)}{kT}\right), \quad \Gamma_2 = \Gamma_{p\sigma} \dot{\varepsilon}_0^{n_2} \exp\left(\frac{U(T)}{kT}\right), \quad \Gamma_3 = \Gamma_p \dot{\varepsilon}_0^{n_3} \exp\left(\frac{U(T)}{kT}\right), \quad \Gamma_4 = \Gamma_\delta \dot{p}_0^{n_s},$$

$$n_s = n_1 + n_2, \quad n_p = n_2 + n_3.$$

Для замыкания системы определяющих уравнений необходимо ввести критерий разрушения. В рамках предложенной модели можно сформулировать несколько критериев, простейший из них

$$\sqrt{p : p} \geq p_c, \tag{14}$$

который хорошо зарекомендовал себя в задачах статического нагружения, а также в некоторых динамических задачах, когда не происходит смены нелинейной реакции материала на приложенную нагрузку ($\delta = \text{const}$). Другой вариант — температурный критерий разрушения:

$$T \geq T_{DRX} + (T_{пз} - T_{DRX}) \frac{\dot{\varepsilon}_{DRX}}{\dot{\varepsilon}_{DRX} + \dot{\varepsilon}_0}, \tag{15}$$

согласно которому разрушение наступает после достижения температурой критического значения, которое тем меньше, чем больше скорость деформации. В (15) T_{DRX} — температура, при которой происходит существенное термическое разупрочнение материала, например — температура рекристаллизации; $T_{пз}$ — температура плавления; $\dot{\varepsilon}_{DRX}$ — характерная скорость деформации (обезразмеренная), после достижения которой начинаются процессы рекристаллизации при температурах ниже значения T_{DRX} . Данный критерий применим при динамическом нагружении в качестве основного (или как дополняющего (14)) при интенсивной локализации пластической деформации, приводящей к существенному разогреву.

Также можно ввести критерий на основе параметра структурного скейлинга:

$$\delta \rightarrow 0. \tag{16}$$

Его смысл заключается в том, что объём, занимаемый в материале дефектами, стремится к 100%. Это может быть достигнуто за счёт уменьшения расстояния между дефектами или увеличения размера дефектов до бесконечности. Второй вариант невозможен, а первый имеет реальный физический смысл. В расчёте условие (16) не реализуемо из-за вычислительной неустойчивости, поэтому его можно заменить на следующее:

$$\delta \leq \delta_f, \tag{17}$$

где $\delta_f \approx 0,4$ — критическое значение, после которого начинается лавинообразный рост дефектов и материал считается разрушенным. Естественно, значению $\delta = \delta_f$ соответствует некоторое значение p_c , поэтому можно считать критерии (17) и (14) эквивалентными. Однако (17) имеет ряд преимуществ: во-первых, обладает физическим смыслом, а во-вторых — большей универсальностью. Эволюция повреждённости в терминах δ определяется физико-механическими свойствами материала, а критическое значение δ_f одинаково для всех представителей конкретного класса, в то время как константу p_c необходимо определять для каждого материала. Кроме того, в терминах δ адекватнее учитывается эволюция повреждённости при длительных циклических нагрузках, особенно с амплитудами напряжений, меньшими предела текучести.

3. Идентификация параметров модели

Идентификация параметров построенной модели (5)–(10) проводилась для представительного объёма материала:

$$\dot{\sigma} = \frac{\lambda}{3} D + 2G (D - D^{pl} - \dot{p}), \quad (18)$$

$$D^{pl} = \dot{\varepsilon}_0^{n_c} \exp\left(\frac{U(T)}{kT}\right) \left(\Gamma_{\sigma} \sigma - \Gamma_{p\sigma} \frac{\partial F}{\partial p} \right), \quad (19)$$

$$\dot{p} = \dot{\varepsilon}_0^{n_p} \exp\left(\frac{U(T)}{kT}\right) \left(\Gamma_{p\sigma} \sigma - \Gamma_p \frac{\partial F}{\partial p} \right), \quad (20)$$

$$\dot{\delta} = -\dot{p}_0^{n_\delta} \Gamma_\delta \frac{\partial F}{\partial \delta}, \quad (21)$$

$$\frac{F}{F_m} = \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{2\delta} + c_1 p + c_2 \ln(c_3 + c_4 p + p^2) - \frac{\sigma p}{2G}, \quad (22)$$

где D , σ , D^{pl} , p — соответствующие компоненты тензоров D , σ , D^{pl} , p . На первом этапе идентификации решалась задача минимизации невязки между экспериментальной и расчётной диаграммами деформирования. При этом определялись параметры Γ_σ , $\Gamma_{p\sigma}$, Γ_p при фиксированных

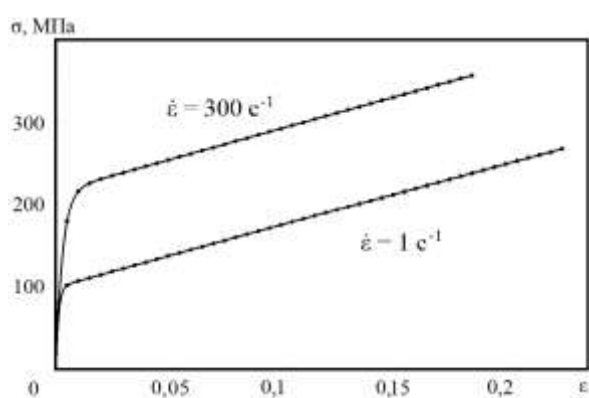


Рис. 1. Диаграммы деформирования при различных скоростях деформации: сплошная линия – расчёт, точки – эксперимент [8]

безразмерной скорости деформации $\dot{\varepsilon}_0 = 1$ (статическое нагружение), $\delta = \text{const} = 1,15$ и $T = 0^\circ\text{C}$. На втором этапе при известных значениях Γ_σ , $\Gamma_{p\sigma}$, Γ_p минимизировалась невязка между экспериментальной и расчётной диаграммами деформирования при характерной скорости деформации 300 с^{-1} . Устанавливались параметры n_c и n_p при $\delta = \text{const} = 1,15$ и $T = 0^\circ\text{C}$. На этапах использовались экспериментальные данные из статьи [8], в которой получены лишь пределы текучести, прочности и относительное удлинение при двух различных скоростях деформирования. Для построения аналитических зависимостей по этим механическим характеристикам авторы

применяли методику, предложенную в [23]. Иллюстрация решения задач оптимизации представлена на рисунке 1, где ε — логарифмическая мера деформации, $\varepsilon = \ln(1 + \int D dt)$.

Для определения параметров T_c и m в общем случае необходимы диаграммы деформирования при фиксированной скорости деформации и различных температурах. Но такие данные не найдены в литературе, поэтому константы T_c и m идентифицировались путём минимизации разницы между статическими пределами прочности при температурах, равных 20, 100, 200 и 300°C . При этом фиксированными принимались скорость деформации $\dot{\varepsilon}_0 = 1$ и $\delta = \text{const} = 1,15$. Результаты приведены в таблице 1, где под пределом прочности в расчёте понимается напряжение, соответствующее критической деформации.

Таблица 1. Предел прочности в эксперименте и расчёте при различных температурах

Температура, $^\circ\text{C}$	Предел прочности в эксперименте [24], МПа	Предел прочности в расчёте, МПа
20	280	282
100	265	263
200	191	193
300	103	103

Завершающий этап идентификации параметров модели заключался в определении значений Γ_σ и n_σ , которые находились с использованием экспериментальных данных циклического нагружения [8] — двух характерных точек на кривой Вёлера: 37 500 циклов, 170 МПа и 1 850 000 циклов, 114 МПа. Параметры Γ_σ и n_σ выбирались таким образом, чтобы при амплитуде нагружения 170 МПа материал выдерживал 37 500 циклов до разрушения, а при 114 МПа — 1 850 000 циклов соответственно. Частота нагружения при этом равнялась 100 Гц, как и в эксперименте.

Таким образом, полный набор констант для сплава АМг2.5 был следующим:
 – константы, известные из литературы [24]: $\rho = 2670 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 41 \text{ ГПа}$, $G = 27 \text{ ГПа}$, $c = 900 \text{ Дж/К}$;
 – установленные константы: $\Gamma_\sigma = 1170 \text{ (Па}\cdot\text{с)}^{-1}$, $\Gamma_{p\sigma} = 80 \text{ (Па}\cdot\text{с)}^{-1}$, $\Gamma_p = 5,60 \text{ (Па}\cdot\text{с)}^{-1}$, $\Gamma_\delta = 4,89 \text{ (Па}\cdot\text{с)}^{-1}$,
 $n_\epsilon = n_p = 0,84$, $n_\delta = 0,75$, $T_c = 226 \text{ }^\circ\text{C}$, $m = 2$.

4. Результаты численного моделирования

Численное исследование поведения реальной конструкции и даже лабораторного образца в режиме гигацикловой усталости не представляется возможным в связи с потребностью в огромных вычислительных и временных ресурсах. Поэтому вместо решения краевой задачи рассматривалась задача нагружения представительного объёма материала:

$$\dot{p} = \dot{\epsilon}_0^{n_p} \left(\Gamma_{p\sigma} \sigma(t) - \Gamma_p \frac{\partial F}{\partial p} \right), \quad (23)$$

$$\dot{\delta} = -\dot{p}_0^{n_\delta} \Gamma_\delta \frac{\partial F}{\partial \delta}, \quad (24)$$

$$\frac{F}{F_m} = \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{2\delta} + c_1 p + c_2 \ln(c_3 + c_4 p + p^2) - \frac{\sigma(t) p}{2G}, \quad (25)$$

с условиями нагружения в виде приложенных циклических напряжений

$$\sigma(t) = \sigma_A \sin(2\pi\nu t) \quad (26)$$

с амплитудой σ_A и частотой ν , а также с начальными условиями

$$p|_{t=0} = 0, \quad \delta|_{t=0} = \delta_0 = 1,15. \quad (27)$$

Уравнение (19) не принималось во внимание по причине того, что в режиме гигацикловой усталости макропластические деформации отсутствуют, и достаточно отслеживать эволюцию повреждённости. Температура испытаний, в соответствии с экспериментально реализованными режимами, предполагалась постоянной.

Условия нагружения (26) можно записать в терминах деформаций:

$$\epsilon(t) = \epsilon(\sigma_A) \sin(2\pi\nu t), \quad (28)$$

где $\epsilon(\sigma)$ — функция, переводящая напряжения в деформации, согласно нелинейной зависимости, полученной в ходе решения задачи (18)–(22). После дифференцирования (28) по времени получилось:

$$\dot{\epsilon}(t) = \epsilon(\sigma_A) 2\pi\nu \sin(2\pi\nu t). \quad (29)$$

Тогда для оценки скорости деформации как функции амплитуды и частоты нагружения стало возможным следующее выражение:

$$\dot{\epsilon}(t) = \epsilon(\sigma_A) 2\pi\nu \sin(2\pi\nu t) \leq \epsilon(\sigma_A) 2\pi\nu = \dot{\epsilon}_0 \dot{\epsilon}_c. \quad (30)$$

Аналогично выглядела формула для оценки \dot{p}_0 :

$$\dot{p}(t) = p(\sigma_A) 2\pi\nu \sin(2\pi\nu t) \leq p(\sigma_A) 2\pi\nu = \dot{p}_0 \dot{\epsilon}_c. \quad (31)$$

Результаты расчётов количества циклов до разрушения N_c в зависимости от амплитуды нагружения представлены на рисунке 2а. При построении S–N диаграммы (кривой Вёлера) (Рис. 2) использовался критерий разрушения (17). Моделирование в области многоциклового усталости (10^4 – 10^7 циклов) проводилось с частотой $\nu = 100 \text{ Гц}$ подобно испытаниям в соответствующем эксперименте [8]. Расчёт в диапазоне гигацикловой усталости (10^8 – 10^{10} циклов) осуществлялся с частотой $\nu = 20000 \text{ Гц}$, что

отвечало режиму нагружения на ультразвуковых испытательных машинах [10]. При высоких амплитудах напряжений (180–280 МПа) частота выбиралась таким образом, чтобы выполнялось условие $N_c / \nu \sim 10^3$. Теоретическая $S-N$ диаграмма хорошо согласуется с экспериментальным данным [8]. Эксперименты для сплава АМг2.5 в области мало- и гигацикловой усталости в литературе не найдены, однако сходимость к пределу прочности при $N_c \rightarrow 0$ свидетельствует об адекватности участка 10^2 – 10^4 циклов.

Результаты моделирования позволили описать эффект дуальности кривой Вёлера, который заключается в изменении поведения материала при переходе от много- к гигацикловой усталости: на $S-N$ диаграмме это выражается в изменении угла наклона кривой в логарифмических координатах (Рис. 2а). Напряжение, при котором происходит качественное изменение характера $S-N$ кривой, близко к статическому пределу текучести. Однако, в силу скоростной чувствительности сплава АМг2.5, предел текучести при скоростях деформации, реализуемых в режиме гигацикловой усталости ($\sim 10^2 \text{ с}^{-1}$), выше чем 95 МПа. Поэтому трансформация кривой связана, по-видимому, с преодолением амплитудой нагружения предела пропорциональности.

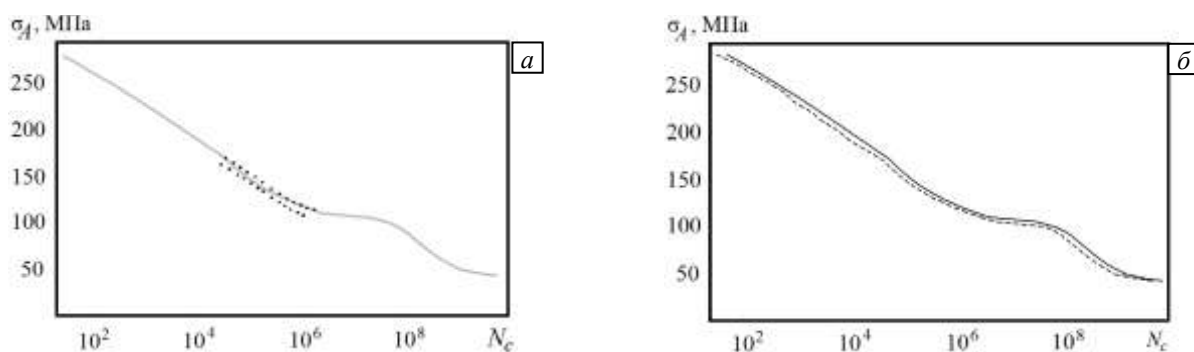


Рис. 2. Расчётная кривая Вёлера (сплошная линия) (а, б), а также границы статистического разброса экспериментальных данных (точки) [8] (а) и $S-N$ диаграмма после предварительного нагружения (пунктирная линия) (б)

Характерная эволюция повреждённости для режимов много- и гигацикловой усталости изображена на рисунке 3. Для наглядности сопоставления результатов представлен последний миллион циклов (Рис. 3б). Видно, что переход к разрушению при больших амплитудах напряжений происходит более плавно, в то время как при малых амплитудах интенсивный лавинообразный рост трещины реализуется в кратчайшие сроки, что подтверждается данными других исследований [1–7, 10].

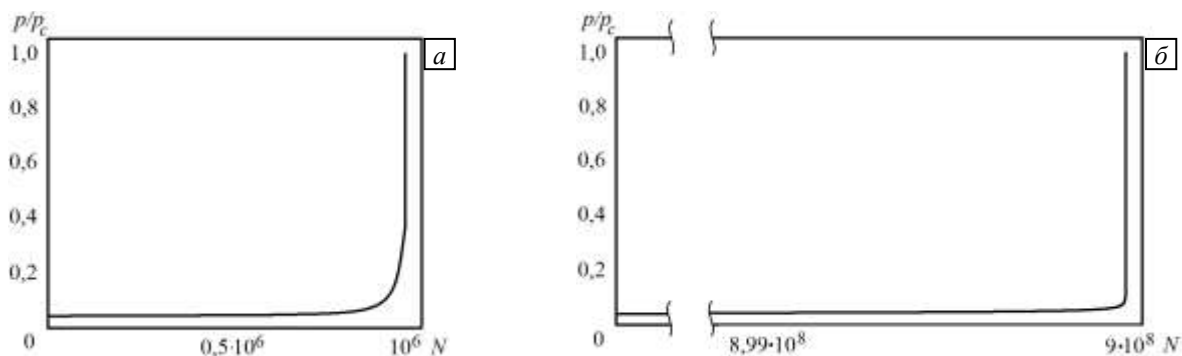


Рис. 3. Эволюция повреждённости в процессе усталостного нагружения при амплитуде напряжений 118 МПа и частоте 100 Гц (а), амплитуде напряжений 52 МПа и частоте 20 000 Гц (б)

Проведено моделирование комбинированного (динамического и циклического) нагружения, распространенного в авиационных приложениях. Изменение структуры материала после предварительного динамического пластического деформирования учитывалось в задаче (23)–(27) заданием параметра δ_0 , характеризующего текущую «восприимчивость» материала к развитию дефектов. Для определения δ_0 решалась задача динамического нагружения (18)–(22). Зависимость δ от величины предварительной деформации при различных скоростях деформации изображена на рисунке 4. Рассмотрен вариант предварительного нагружения при $\dot{\epsilon} = 1000 \text{ с}^{-1}$, $\epsilon = 0,1$. Сравнение $S-N$ кривых до и после предварительного нагружения можно видеть на рисунке 2б. Численный расчёт показал, что сплав АМг2.5 слабо чувствителен к предварительному динамическому нагружению при умеренных пластических деформациях и скоростях деформации $\sim 10^3 \text{ с}^{-1}$, что подтверждается экспериментальными результатами [8].

Проведено сравнение предложенной модели с аналитической моделью разрушения Коффина–Мэнсона (К–М-модель) [25], используемой в прикладных инженерных расчётах [17], которая имеет следующий вид:

$$\epsilon_A = \frac{\epsilon_c - \epsilon_{-1}}{N_c^\alpha} + \frac{\epsilon_{-1}}{N_c^\beta} \tag{36}$$

Здесь: ϵ_A — амплитуда приложенных деформаций; $\epsilon_c - \epsilon_{-1}$ — деформация, при которой материал будет разрушен за один цикл нагружения; ϵ_{-1} — деформация, соответствующая напряжению σ_{-1} , которое является пределом выносливости на определённой базе циклов (в случае многоциклового усталости — это 10^6 , гигацикловой — 10^9); α и β — подгоночные параметры. В случае, когда предел выносливости ниже или равен пределу пропорциональности, отвечающая ему деформация может быть вычислена как $\epsilon_{-1} = \sigma_{-1}/E$, где E — модуль Юнга. Для сплава АМг2.5 параметры К–М-модели были следующими: $\epsilon_c = 0,22$, $\epsilon_{-1} = 0,0014$, $\alpha = 0,39$, $\beta = 0,09$. Результаты для сравнения изображены на рисунке 5.

К–М-модель определяет предел выносливости при $\beta = 0$ (в противном случае он отсутствует (Рис. 5)), хорошо описывает участок малоциклового усталости, а также многоцикловую усталость материалов, имеющих предел выносливости, например, некоторых сталей. Однако она не отображает эффект дуальности кривой Вёлера, а также не учитывает эффекты скоростной чувствительности материала. Естественно, К–М-модель можно обобщить и учесть перечисленные эффекты, но это приведёт к существенному увеличению количества констант, которые уже не будут иметь явного физического смысла.

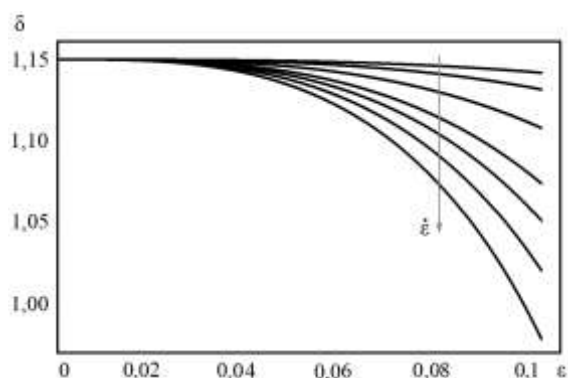


Рис. 4. Зависимость параметра δ от предварительной деформации при скоростях деформации $\dot{\epsilon}$, с⁻¹: 1, 100, 200, 500, 1000, 2000, 4000

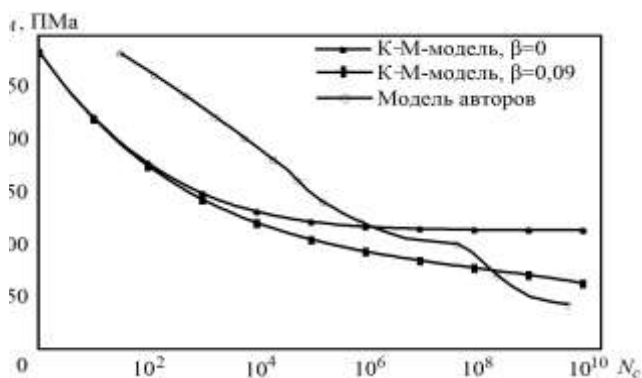


Рис. 5. К сравнению авторских результатов с расчётами по модели Коффина–Мэнсона

5. Сравнение различных численных методов и математических пакетов для решения задачи. Сходимость численного решения

В настоящей работе для численного решения поставленной задачи применены два математических пакета: Wolfram Mathematica (WM) и MatLab (ML). Проведено их сравнение на примере постановки при частоте 100 Гц и амплитуде напряжений 115 МПа. В Пакете WM использовалась функция «NDSolve» с заданной абсолютной точностью 10^{-6} и различными опциями «Method» В ML при тех же условиях нагружения с той же точностью прибегали к различным решателям (Табл. 2). В таблице показаны данные не всех возможных методов и решателей, а лишь тех, которые показали наиболее адекватные результаты. Другие методы и решатели либо демонстрировали неспособность разрешить рассматриваемую систему дифференциальных уравнений, либо имели время работы, на порядки большее приведённых в таблице (для всех пакетов и методов время счёта осреднено по десяти реализациям).

Из таблицы 2 видно, что WM даёт существенный выигрыш во времени. Однако это может быть связано с тем, что в данных пакетах по-разному определяется «абсолютная точность» численного решения. Но изменение в пакете ML точности на два порядка вверх/вниз не приводит к существенному изменению

Таблица 2. Время счёта в пакетах WM и ML для частоты 100 Гц, амплитуды напряжений 115 МПа с абсолютной точностью 10^{-6} при использовании различных численных методов решения и стандартных решателей

	Метод Wolfram Mathematica			Решатель MatLab		
	Adams	BDF	Implicit Runge-Kutta	Адамса–Башворта–Мултона (ode113)	Рунге-Кутты 2-го и 4-го порядков (ode23)	Рунге-Кутты 5-го порядка (ode45)
N_c	1456029	1455403	1457252	1453548	1458232	1463215
Время счёта, с	43,2	157,4	421,9	247	456	257

ни продолжительности вычислений, ни числа циклов до разрушения. Поэтому очевиден вывод о предпочтительности использования WM для решения рассматриваемой задачи. Также можно заключить, что наиболее предпочтительным методом численного интегрирования является метод Адамса и его модификации, что подтверждается расчётными данными (см. Табл. 2).

В таблице 3 приведены данные о сходимости численного решения. При частоте нагружения 100 Гц последние три цифры в значении N_c не достоверны как в эксперименте, так и в расчёте, поэтому точность выше 10^{-7} не требуется. При амплитуде нагружения 115 МПа за 10 000 циклов значение параметра p изменяется на величину, имеющую порядок $\sim 10^{-6}$, вследствие этого точность ниже 10^{-6} недопустима. При сравнении результатов расчётов, найденных с точностью 10^{-7} и 10^{-6} , относительная погрешность составляет всего 0,1%, а время счёта отличается на 17%. Точность 10^{-6} является оптимальной с точки зрения соотношения точность/скорость расчёта. Именно с таким уровнем точности получены результаты в области 10^6 – 10^{10} циклов. При значении $N_c < 10^6$ точность вычислений зависела от частоты нагружения и имела порядок 10^{-7} – 10^{-9} .

Таблица 3. Сходимость численного решения, полученного методом Адамса, в пакете WM на примере нагружения при частоте 100 Гц и амплитуде напряжений 115 МПа

Точность	N_c	Время счёта, с	Относительная погрешность, %
10^{-4}	1448446	25,7	–
10^{-5}	1455934	40,4	0,514
10^{-6}	1456029	46,1	0,007
10^{-7}	1457651	55,5	0,111
10^{-8}	1457313	74,4	0,023
10^{-9}	1457266	84,5	0,003
10^{-10}	1457251	104,2	0,001
10^{-11}	1457252	144,4	0,00007

6. Выводы

1. Предложена математическая модель, учитывающая кинетику дефектов в процессе циклического нагружения с малыми амплитудами напряжений, способная адекватно предсказывать разрушение материалов в режиме много- и гигацикловой усталости.

2. Описан эффект дуальности кривой Вёлера. Качественная смена поведения S–N диаграммы при переходе от много- к гигацикловой усталости связывается с преодолением амплитудой напряжений предела пропорциональности.

3. Результаты моделирования подтверждают незначительное изменение предела усталости материала AMg2.5 после предварительного динамического нагружения.

4. Сравнение предложенной модели с аналитической моделью Коффина–Мэнсона показывает ограниченность последней применительно к описанию эффекта дуальности кривой Вёлера и учёту изменения предела выносливости в зависимости от частоты нагружения. Критерий разрушения Коффина–Мэнсона может быть успешно применен для прогнозирования усталостной долговечности материалов в режимах мало- и многоциклового усталости, а также в режиме гигацикловой усталости для материалов либо имеющих предел усталости на базе 106 циклов, либо не проявляющих эффект дуальности S–N кривой. При этом материал не должен обнаруживать скоростную чувствительность.

5. Показано, что для численного интегрирования предложенной системы дифференциальных уравнений оптимален для использования метод Адамса и его модификации. Из математических пакетов Wolfram Mathematica и MatLab предпочтительным является первый, при этом оптимальная точность расчётов составляет 10^{-6} .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-48-590534-р_а, № 16-41-590892-р_а, № 17-01-00867-а) и Программы фундаментальных научных исследований УрО РАН (проект № 18-11-1-7).

Литература

1. Coffin L.F. A study of the effect of cyclic thermal stresses on a ductile metal // Trans. ASME. 1954. No. 76. P. 931-950.
2. Bathias C. There is no infinite fatigue life in metallic materials // Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct. 1999. Vol. 22. No. 22. P. 559-65. DOI
3. Murakami Y., Nomoto T., Ueda T. Factors influencing the mechanism of superlong fatigue failure in steels // Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct. 1999. Vol. 22. No. 22. P. 581-90. DOI
4. Терентьев В.Ф. Усталостная прочность металлов и сплавов. М.: Интермет Инжиниринг, 2002. 288 с.

5. *Ботвина Л.Р.* Гигацикловая усталость – новая проблема физики и механики разрушения // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2004. Т. 70, № 4. С. 41-51.
6. *Mughrabi H.* Specific features and mechanisms of fatigue in the ultrahigh-cycle regime // *Int. J. Fatig.* 2006. Vol. 28. No. 11. P.1501-1508. [DOI](#)
7. *Pang H.T., Reed P.A.S.* Microstructure effects on high temperature fatigue crack initiation and short crack growth in turbine nickel-base superalloy Udimet720Li // *Mater. Sci. Eng.* 2007. Vol. 448. No. 1-2. P. 67-69. [DOI](#)
8. *Froustey C., Lataillade J.L.* Influence of the microstructure of aluminium alloys on their residual impact properties after a fatigue loading program // *Mater. Sci. Eng.* 2009. Vol. 500. No. 1-2. P. 155-163. [DOI](#)
9. *Palin-Luc T., Perez-Mora R., Bathias C., Dominguez G., Paris P.C., Arana J.L.* Fatigue crack initiation and growth on a steel in the very high cycle regime with sea water corrosion // *Eng. Fract. Mech.* 2010. Vol. 77. No. 11. P. 1953-1962. [DOI](#)
10. *Оборин В.А., Банников М.В., Наймарк О.Б., Palin-Luc T.* Масштабная инвариантность роста усталостной трещины при гигацикловом режиме нагружения // ПЖТФ. 2010. Т. 36, № 22. С. 76-82. (English version [DOI](#))
11. *Шаянвский А.А.* Моделирование усталостных разрушений металлов. Синергетика в авиации. Уфа: ООО «Монография», 2007. 500 с.
12. *Huang Z.Y., Wagner D., Wang Q.Y., Bathias C.* Effect of carburizing treatment on the “fish eye” crack growth for a low alloyed chromium steel in very high cycle fatigue // *Mater. Sci. Eng.* 2013. Vol. 559. P. 790-797. [DOI](#)
13. *Nguyen H.Q., Gallimard L., Bathias C.* Numerical simulation of fish-eye fatigue crack growth in very high cycle fatigue // *Eng. Frac. Mech.* 2015. Vol. 135. P. 81-93. [DOI](#)
14. *Наймарк О.Б., Плехов О.А., Бетехтин В.И., Кадомцев А.Г., Нарыкова М.В.* Кинетика накопления дефектов и дуальность кривой Вёллера при гигацикловой усталости металлов // ЖТФ. 2014. Т. 84, № 3. С. 89-93. (English version [DOI](#))
15. *Волков И.А., Коротких Ю.Г., Панов В.А., Шишулин Д.Н.* Моделирование процессов накопления усталостных повреждений в конструкционных сталях при блочном малоцикловом нагружении // Вычисл. мех. сплош. сред. 2014. Т. 7, № 1. С. 15-22. [DOI](#)
16. *Волков И.А., Изумнов Л.А., Тарасов И.С.* Оценка усталостной долговечности материалов и конструкций при малоцикловом нагружении // Вычисл. мех. сплош. сред. 2017. Т. 10, № 1. С. 17-30. [DOI](#)
17. *Гучинский Р.В., Петинев С.В.* Численное моделирование распространения полуэллиптической трещины усталости на основании оценки накопления повреждений // Вычисл. мех. сплош. сред. 2015. Т. 8, № 4. С. 376-385. [DOI](#)
18. *Билалов Д.А., Сокоиков М.А., Чудинов В.В., Оборин В.А., Баяндин Ю.В., Терёхина А.И., Наймарк О.Б.* Исследование локализации пластического сдвига в алюминиевых сплавах при динамическом нагружении // Вычисл. мех. сплош. сред. 2015. Т. 8, № 3. С. 319-328. [DOI](#)
19. *Билалов Д.А., Сокоиков М.А., Чудинов В.В., Оборин В.А., Баяндин Ю.В., Терёхина А.И., Наймарк О.Б.* Численное моделирование и экспериментальное исследование локализации пластической деформации при динамическом нагружении образцов в условиях близких к чистому сдвигу // Вычисл. мех. сплош. сред. 2017. Т. 10, № 1. С. 103-112. [DOI](#)
20. *Аннин Б.Д., Коробейников С.Н.* Допустимые формы упругих законов деформирования в определяющих соотношениях упруго-пластичности // Сиб. журн. индустр. матем. 1998. Т. 1, № 1. С. 21-34.
21. *Новокианов Р.С., Розовой А.А.* О построении эволюционных определяющих уравнений // Вестник ПНИПУ. Механика. 2001. № 9. С. 103-109.
22. *Годунов С.К., Демчук А.Ф., Козин Н.С., Мали В.И.* Интерполяционные формулы зависимости максвелловской вязкости некоторых металлов от интенсивности касательных напряжений и температур // ПМТФ. 1974. № 4. С. 114-118.
23. *Банкина О.С., Дзюба А.С., Хватан А.М.* Метод построения диаграмм деформирования σ - ϵ по справочным механическим характеристикам материала // Труды ЦАГИ. 2000. № 2639. С. 36-38.
24. *Машиностроение. Энциклопедия / под ред. К.В. Фролова.* М.: Машиностроение, 2001. Т. II-3: Цветные металлы и сплавы. Композиционные металлические материалы. 880 с.
25. *Махутов Н.А.* Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. М.: Машиностроение, 1981. 272 с.

References

1. Coffin L.F. A study of the effect of cyclic thermal stresses on a ductile metal. *Trans ASME*, 1954, no. 76, pp. 931-950.
2. Bathias C. There is no infinite fatigue life in metallic materials. *Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct.*, 1999, vol. 22, no. 22, pp. 559-65. [DOI](#)
3. *Murakami Y., Nomoto T., Ueda T.* Factors influencing the mechanism of superlong fatigue failure in steels. *Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct.*, 1999, vol. 22, no. 22, pp. 581-90. [DOI](#)
4. Terent'yev V.F. *Ustaloynaya prochnost' metallov i splavov* [Fatigue strength of metals and alloys]. M.: Internet Inzhiniring, 2002. 288 p.
5. Botvina L.R. Gigatsiklovaya ustalost' – novaya problema fiziki i mekhaniki razrusheniya [Very high cycle fatigue is a new problem in fracture mechanics and physics]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov – Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials*, 2004, vol. 70, no. 4, pp. 41-51.
6. Mughrabi H. Specific features and mechanisms of fatigue in the ultrahigh-cycle regime. *Int. J. Fatig.*, 2006, vol. 28, no. 11, pp. 1501-1508. [DOI](#)
7. Pang H.T., Reed P.A.S. Microstructure effects on high temperature fatigue crack initiation and short crack growth in turbine nickel-base superalloy Udimet720Li. *Mater. Sci. Eng.*, 2007, vol. 448, no. 1-2. P. 67-69. [DOI](#)
8. Froustey C., Lataillade J.L. Influence of the microstructure of aluminium alloys on their residual impact properties after a fatigue loading program. *Mater. Sci. Eng.*, 2009, vol. 500, no. 1-2, pp. 155-163. [DOI](#)

9. Palin-Luc T., Perez-Mora R., Bathias C., Dominguez G., Paris P.C., Arana J.L. Fatigue crack initiation and growth on a steel in the very high cycle regime with sea water corrosion. *Eng. Fract. Mech.*, 2010, vol. 77, no. 11, pp. 1953-1962. [DOI](#)
10. Oborin V., Bannikov M., Naimark O., Palin-Luc T. Scaling invariance of fatigue crack growth in gigacycle loading regime. *Tech. Phys. Lett.*, 2010, vol. 36, no. 11, pp. 1061-1063. [DOI](#)
11. Shanyavskiy A.A. *Modelirovaniye ustalostnykh razrusheniy metallov. Sinergetika v aviatsii* [Modeling of fatigue fractures of metals. Synergetics in aviation]. Ufa: Monografiya, 2007. 500 p.
12. Huang Z.Y., Wagner D., Wang Q.Y., Bathias C. Effect of carburizing treatment on the “fish eye” crack growth for a low alloyed chromium steel in very high cycle fatigue. *Mater. Sci. Eng.*, 2013, vol. 559, pp. 790-797. [DOI](#)
13. Nguyen H.Q., Gallimard L., Bathias C. Numerical simulation of fish-eye fatigue crack growth in very high cycle fatigue. *Eng. Fract. Mech.*, 2015, vol. 135, pp. 81-93. [DOI](#)
14. Naimark O.B., Plekhov O.A., Betekhtin V.I., Kadomtsev A.G., Narykova M.V. Kinetics of defect accumulation and duality of the weller curve in gigacycle fatigue of metals. *Tech. Phys.*, 2014, vol. 59, no. 3, pp. 398-401. [DOI](#)
15. Volkov I.A., Korotkih Yu.G., Panov V.A., Shishulin D.N. Modeling of fatigue damage accumulation in structural steels under low-cycle block loading. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 15-22. [DOI](#)
16. Volkov I.A., Igumnov L.A., Tarasov I.S. Evaluating fatigue life of materials and structures under low-cycle loading. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 1, pp. 17-30. [DOI](#)
17. Guchinskij R.V., Petinov S.V. Numerical modeling of the semi-elliptical fatigue crack growth using damage accumulation approach. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 367-385. [DOI](#)
18. Bilalov D.A., Sokovikov M.A., Chudinov V.V., Oborin V.A., Bayandin Yu.V., Terekhina A.I., Naimark O.B. Study of plastic shear localization in aluminum alloys under dynamic loading. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no. 3, pp. 319-328. [DOI](#)
19. Bilalov D.A., Sokovikov M.A., Chudinov V.V., Oborin V.A., Bayandin Yu.V., Terekhina A.I., Naimark O.B. Numerical modeling and experimental study of plastic strain localization at dynamic loading of samples under conditions close to pure shear. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 1, pp. 103-112. [DOI](#)
20. Annin B.D., Korobeynikov S.N. Dopustimyye formy uprugikh zakonov deformirovaniya v opredelyayushchikh sootnosheniyakh uprugo-plastichnosti [Admissible forms of elastic laws of deformation in the constitutive relations of elastoplasticity]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 1998, vol. 1, no. 1, pp. 21-34.
21. Novokshanov R.S., Rogovoy A.A. O postroyeniі evolyutsionnykh opredelyayushchikh uravneniy [On the construction of evolutionary defining equations]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika – Bulletin of the PNRPU. Mechanics*, 2001, no. 9, pp. 103-109.
22. Godunov S.K., Demchuk A.F., Kozin N.S., Mali V.I. Interpolation formulas for maxwell viscosity of certain metals as a function of shear-strain intensity and temperature. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1974, vol. 15, no. 4, pp. 526-529. [DOI](#)
23. Bankina O.S., Dzyuba A.S., Khvatan A.M. Metod postroyeniya diagramm deformirovaniya σ - ϵ po spravochnym mekhanicheskim kharakteristikam materiala [The method of constructing the deformation diagrams σ - ϵ by the reference mechanical characteristics of the material]. *Trudy TsAGI – TsAGI Science Journal*, 2000, no. 2639, pp. 36-38.
24. Frolov K.V. (ed.) *Mashinostroyeniye. Entsiklopediya* [Mechanical Engineering. Encyclopedia]. M.: Mashinostroyeniye, 2001. Vol. II-3: Tsvetnyye metally i splavy. Kompozitsionnyye metallicheskiye materialy [Non-ferrous metals and alloys. Composite metal materials]. 880 p.
25. Makhutov N.A. *Deformatsionnyye kriterii razrusheniya i raschet elementov konstruktsiy na prochnost'* [The deformation fracture criteria and strength calculation of the structural elements]. M.: Mashinostroyeniye, 1981. 272 p.

Поступила в редакцию 13.09.2018; опубликована в электронном виде 22.10.2018

Сведения об авторах

Билалов Дмитрий Альфредович, б/с, вед. спец., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: ledon@icmm.ru

Баяндин Юрий Витальевич, кфмн., снс, ИМСС УрО РАН; e-mail: buv@icmm.ru

Наймарк Олег Борисович, дфмн., проф, зав.лаб., ИМСС УрО РАН; e-mail: naimark@icmm.ru