

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.3.21](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.3.21)

УДК 519.63, 532.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ТРЕХСЛОЙНОГО СТОКСОВА ТЕЧЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В.В. Пак

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток, Российская Федерация

Проведено аналитическое и численное моделирование эволюции стоковского течения вязкой жидкости в расчетной области, состоящей из толстого вязкого слоя, покрытого тонким двухслойным вязким пластом. Получено аналитическое решение для исследования эволюции поля скоростей и границ слоев на малых и больших временах. Линейный анализ малых возмущений показал многостадийность эволюции многослойного течения. Каждая стадия характеризуется своим масштабом времени. В процессе эволюции происходит инверсия формы границ раздела слоев и преобразование поля скоростей от одноярусной структуры к трехъярусной. Найдены количественные оценки масштабов времени в зависимости от геометрических и физических параметров слоев. Для численного исследования эволюции поля скоростей и границ раздела слоев на малых и больших временах использовалась двумерная комплексная модель, соединяющая в себе уравнения Стокса для описания течения в слое с уравнениями Рейнольдса для течения в пласте. Модель учитывает более подробно структуру пласта, а также поверхностные процессы эрозии и осадконакопления и включает дополнительное асимптотическое граничное условие, которое связывает разнородные уравнения гидродинамики без каких-либо процедур итерационного уточнения. Благодаря этому условию значительно сокращаются вычислительные затраты по сравнению с большинством ранее разработанных комплексных моделей. Численные эксперименты для случая больших возмущений границ слоев в основном подтвердили справедливость выводов, полученных на основе линейного анализа. Модельные результаты могут найти приложение в тектонике и геофизике, например, при изучении процесса утонения литосферы крупномасштабных тектонических прогибов.

Ключевые слова: комплексная модель, уравнения Стокса, уравнения Рейнольдса, метод малого параметра, метод конечных элементов, метод проекции градиента, утонение литосферы

MODELING THE EVOLUTION OF THREE-LAYERED STOKES FLOW AND SOME GEOPHYSICAL APPLICATIONS

V.V. Park

Il'ichev Pacific Oceanological Institute FEB RAS, Vladivostok, Russian Federation

Analytical investigation and numerical modeling have been fulfilled to study the evolution of Stokes flow in a computational domain that consists of thick viscous layer overlaid by a thin multi-layered viscous sheet. We obtain an analytical solution and explore the short- and long-time evolution of the velocity field and layer boundaries. Linear analysis of small perturbations reveals the evolution of the flow to be multistage. It consists of several stages with typical time scales. During the evolution the inversion of layer boundary relief and transformation of the velocity field from one-layered to three-layered structure happen. These time scales are evaluated with respect to geometrical and physical parameters of layers. We fulfill numerical modeling of the evolution of the velocity field and layer boundaries. For this purpose we apply the two-dimensional coupled model that consists of the Stokes equations describing the flow in the layer and the Reynolds equations describing the flow in the sheet. We take into account the layer structure of the sheet and surface processes of erosion and sedimentation as well. The model includes an additional asymptotic boundary condition that couples different-type hydrodynamic equations without any iterative improvements. This condition reduces significantly computational costs in comparison with the available coupled models. Numerical calculations for large perturbations of layer boundaries validate the results of analytical study. Some possible applications in tectonics and geophysics of these model results are outlined. They can be applied to investigate lithosphere thinning beneath large-scale tectonic depressions.

Key words: coupled model, Stokes equations, Reynolds equations, small parameter method, finite element method, lithosphere thinning

1. Введение

Исследование эволюции многослойных течений вязкой жидкости и образования в них деформационных структур является одной из важных проблем гидродинамики [1]. Характерной особенностью рассматриваемого процесса является наличие нескольких режимов: быстрые изменения на начальной стадии (на так называемом временном пограничном слое) и медленное квазистационарное (близкое к стационарному) течение на больших временах [2].

Численное моделирование таких течений сопряжено с существенными ограничениями, прежде всего, на дискретизацию по времени, так как попытки уменьшить вычислительные время на медленной фазе путем увеличения шага интегрирования приводят к резкому росту погрешности и потере устойчивости счета. Таким образом, возникает проблема разработки численных методов, которые возможно точнее воспроизводили бы поведение решения, как в «пограничном слое», так и на участке интегрирования за его пределами [3]. В некоторых приложениях (например, в тектонике и геофизике) моделирование усложняется еще и тем, что толщины слоев могут различаться на порядок и более, что не дает возможности описать течение во всей расчетной области одной системой уравнений [4].

Для этой цели в работе [5] построена комплексная численная модель, в которой расчетная область, состоящая из относительно толстого вязкого слоя, покрытого тонким многослойным вязким пластом, представляется разными уравнениями: в толстом слое — уравнениями Стокса, а в тонком многослойном пласте — уравнениями Рейнольдса. Методом асимптотических разложений получено уравнение, связывающее смещения границ слоев многослойного пласта со скоростями на его нижней границе. Результаты моделирования для варианта с однослойным пластом показали, что использование этого уравнения в качестве дополнительного условия позволяет достигнуть численного решения с хорошей точностью, устойчивого к возмущениям границ слоев, а также допускает счет с более крупным шагом по времени, что в значительной степени сокращает вычислительные затраты.

Если в варианте с однослойным пластом на квазистационарной стадии существенных изменений в структуре течения не происходит, то в случае двух и более слоев имеет место сложная эволюция на больших временах, состоящая из нескольких стадий, каждая из которых характеризуется своим масштабом времени. Подобные процессы можно встретить во многих приложениях, однако их детальное изучение находится еще на начальной стадии.

В настоящей работе проведено моделирование стоксова течения в расчетной области, состоящей из относительно толстого вязкого слоя, покрытого тонким двухслойным вязким пластом. Построено аналитическое решение и исследуется эволюция и структурные особенности течения на малых и больших временах. Проведено численное моделирование течения при больших деформациях границ слоев, а также сравнение численных и аналитических решений. Показаны возможные приложения модельных расчетов в тектонике и геофизике. Особый научный и практический интерес могут представлять количественные характеристики эволюционных переходов в многослойных течениях, встречающихся в тех областях, где процесс развивается во времени в несколько стадий, отделенных друг от друга квазистационарными состояниями. Такая многостадийность предполагается, например, при образовании крупномасштабных тектонических впадин. Приводятся результаты аналитического и численного моделирования эволюции глубинных движений в литосфере и астеносфере с учетом поверхностных факторов (эрозии, осадконакопления).

2. Система уравнений и краевые условия

Пусть расчетная область представляет собой тонкий многослойный пласт, состоящий из N вязких слоев (подобласть D_1), расположенный на поверхности относительно толстого слоя однородной вязкой несжимаемой жидкости (подобласть D_2). Обозначим через $Z_i, i = \overline{1, N+1}$ границы пласта. Зададим скорость движения жидкости на нижней границе расчетной области (см. Рис. 1).

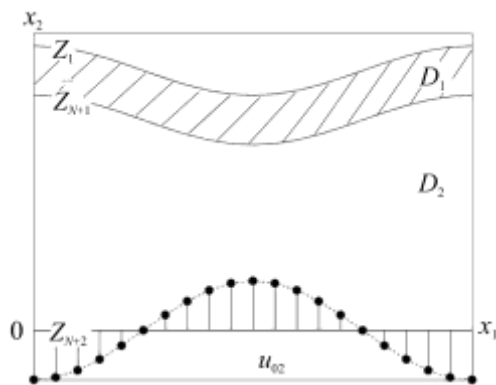


Рис. 1. Общая схема расчетной области: сплошными линиями показаны границы многослойного пласта, отрезками с маркерами — эпюра скорости на нижней границе толстого слоя

Упрощенные уравнения движения вязкой жидкости в подобласти D_1 получим при следующих предположениях: характерный горизонтальный масштаб возмущений много больше вертикального; плотность не убывает с глубиной; негидростатические напряжения существенно меньше гидростатического давления:

$$\begin{aligned} p_{,1} &= \mu_i u_{1,2,2}, \\ p_{,2} &= -\rho_i \quad (i = \overline{1, N}), \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ_i и μ_i — плотности и вязкости слоев (постоянные внутри слоев); u_k — компоненты скорости; p — давление; g — ускорение силы тяжести; нижний индекс « k » обозначает частную производную функции по координате x_k . Поле скоростей из (1) должно

удовлетворять уравнению неразрывности:

$$u_{1,1} + u_{2,2} = 0 \quad (2)$$

и следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} p &= 0, \quad \mu_1 u_{1,2} = 0, \quad z = Z_1, \\ [u_1]_+^+ &= 0, \quad [p]_-^+ = 0, \quad [\mu_1 u_{1,2}]_-^+ = 0, \quad z = Z_i \quad (i = \overline{1, N}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $[\cdot]_{-}^{+}$ означает скачок функции на границе раздела слоев.

Зададим начальное положение границ слоев подобласти D_1 :

$$Z_i(x_1, 0) = Z_{i0} \quad (i = \overline{1, N+1}). \quad (4)$$

Кроме этого, на подвижных границах многослойного пласта должно выполняться кинематическое условие непроницаемости:

$$u_2(x_1, Z_i, t) - Z_{i,1} u_1(x_1, Z_i, t) - Z_{i,t} = 0 \quad (i = \overline{1, N+1}), \quad (5)$$

где нижний индекс « \cdot, t » обозначает частную производную функции по времени.

Решив уравнения (1), (2) с учетом условий (3), (4), определим значения u_1 , u_2 и p на границах слоев. После подстановки их в (5) и некоторых преобразований получим уравнения относительно границ слоев Z_i :

$$Z_{i,t} = \left(\left(A_{i1} Z_{1,1} + \sum_{k=2}^{N+1} A_{ik} (\rho_k - \rho_{k-1}) Z_{k,1} \right) - u_1(x_1, Z_{N+2})(Z_i - Z_{N+2}) \right)_{,1} + u_2(x_1, Z_{N+2}) \quad (i = \overline{1, N}), \quad (6)$$

где $A_{ji} = A_{ij} = f \sum_{l=i}^{N+1} h_l \sum_{m=j}^{N+1} h_m \sum_{k=j}^{N+1} \frac{1}{\mu_k} \frac{h_k}{1 + \delta_{ik} + \delta_{ij}} \quad (i \leq j, \quad i, j = \overline{1, N}), \quad h_i = Z_i - Z_{i+1} \quad (i = \overline{1, N}); \delta_{ij}$ — символ

Кронекера.

На боковых границах подобласти D_1 поставим еще условия непроницаемости: $Z_{i,1} = 0$.

Для описания течения в подобласти D_2 воспользуемся уравнениями Стокса:

$$\begin{aligned} -p_{,1} + \mu_{N+1}(u_{1,11} + u_{1,22}) &= 0, \\ -p_{,2} + \mu_{N+1}(u_{2,11} + u_{2,22}) - \rho_{N+1}g &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Поле скоростей из (7) удовлетворяет также уравнению неразрывности (2).

Боковые границы расчетной области будем считать неподвижными стенками с проскальзыванием

$$u_1 = 0, \quad \mu_{N+1}(u_{1,2} + u_{2,1}) = 0, \quad (8)$$

а на нижней границе зададим скорости:

$$u_1|_{Z_{N+2}} = u_{01}, \quad u_2|_{Z_{N+2}} = u_{02}. \quad (9)$$

Согласно (3) условия сопряжения на границе $x_2 = Z_{N+1}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_{N+1}(u_{1,2} + u_{2,1})|_{Z_{N+1}} &= - \sum_{i=1}^N \left(\rho_i Z_{i,1} + \sum_{k=2}^i (\rho_k - \rho_{k-1}) Z_{k,1} \right) (Z_i - Z_{i+1}), \\ -p + 2\mu_{N+1}u_{2,2}|_{Z_{N+1}} &= - \sum_{i=1}^N \rho_i (Z_i - Z_{i+1}). \end{aligned} \quad (10)$$

3. Численная модель

Численное решение совместной системы уравнений находилось следующим образом. По положению поверхности и границ слоев в начальный момент времени вычислялось поле скоростей в подобласти D_2 . Для решения краевой задачи (7)–(10) применялся модифицированный метод конечных элементов в сочетании с методом проекции градиента. Затем по известным значениям скоростей на границе сопряжения подобластей Z_{N+1} находилось поле скоростей в подобласти D_1 . После этого путем решения системы параболических уравнений (6) устанавливались положения границ слоев на следующем временном слое. Далее процедура повторялась (ее подробное описание приведено в работе [5]).

При построении численной модели основной проблемой является сопряжение разнородных уравнений, используемых для описания течения в подобластях. В [5] показано, что при постановке естественных условий непрерывности поля скоростей и напряжений на границе Z_{N+1} поле скоростей на больших временах определяется с большой погрешностью даже при задании малого шага дискретизации по времени. Чтобы обойти указанные затруднения, проведено асимптотическое исследование уравнений Рейнольдса в подобласти D_1 . Получено уравнение, связывающее на больших временах профили границ слоев со скоростями на Z_{N+1} и не зависящее от начального положения границ Z_i :

$$\left(\rho_1 A_{i1} Z_{1,1} + \sum_{k=2}^N A_{ik} \rho_k Z_{k,1} \right) + u_1 Z_{N+1,1} + u_2 = 0. \quad (11)$$

Асимптотическое уравнение (11) использовалось в качестве дополнительного условия при решении системы разнородных уравнений (1)–(10). Этот прием, как показали результаты численного решения тестовых задач в [5], позволяет существенно сократить вычислительные затраты.

4. Исследование эволюции течения при малых смещениях границ слоев

При малых смещениях границ слоев появляется возможность применения аналитических методов, с помощью которых можно выявить основные особенности эволюции течения как на малых, так и на больших временах.

Рассмотрим более общий вариант, когда течение жидкости во всей расчетной области описывается уравнениями Стокса (7). Получим аналитическое решение в предположении малости смещений границ слоев [6]:

$$Z_i(x_1, t) = Z_{i0} + \Delta Z_i(x_1, t), \quad |\Delta Z_i(x_1, t)| \ll |Z_{40}| \quad (i = \overline{1, 3}).$$

Зададим начальные возмущения границ слоев: $\Delta Z_i(x_1, 0) = h_{i0} \cos kx_1$, горизонтальную скорость на нижней границе: $u_1|_{x_2=Z_4} = v_0 \sin kx_1$, и вертикальную скорость: $u_2|_{x_2=Z_4} = w_0 \cos kx_1$, где h_{i0} , v_0 и w_0 — амплитуды возмущений, а k — волновое число. Решение, например u_2 , будем искать в виде:

$$u_2(x_1, x_2, t) = U_2(x_2) \exp(\lambda t) \cos(kx_1).$$

Задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка относительно x_2

$$U_{2,2222} - 2k^2 U_{2,22} + k^4 = 0 \quad (12)$$

со следующими краевыми условиями:

– на границе Z_4

$$U_2 = \frac{w_0}{p}, \quad U_{2,2} = -ik \frac{v_0}{p}; \quad (13)$$

– на границах раздела $Z_i, i = \overline{2, 3}$

$$\begin{aligned} [U_2]_{-}^{+} &= 0, \quad [U_{2,2}]_{-}^{+} = 0, \\ \left[\mu (U_{2,22} + k^2 U_2) \right]_{-}^{+} &= 0, \quad \left[-\mu (U_{2,2222} - 3k^2 U_{2,22}) + \frac{\rho g k^2}{p} U_2 \right]_{-}^{+} = -\frac{[\rho]_{-}^{+} g k^2}{p} h_i; \end{aligned} \quad (14)$$

– на границе Z_1

$$\mu (U_{2,22} + k^2 U_2) = 0, \quad -\mu (U_{2,2222} - 3k^2 U_{2,22}) + \frac{\rho g k^2}{p} U_2 = -\frac{\rho g k^2}{p} h_1. \quad (15)$$

Общее решение краевой задачи (12)–(15) в каждом слое можно представить в виде линейной комбинации гиперболических функций:

$$U_2 = C_{1i} \operatorname{ch} kx_2 + C_{2i} \operatorname{sh} kx_2 + C_{3i} x_2 \operatorname{ch} kx_2 + C_{4i} x_2 \operatorname{sh} kx_2 \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (16)$$

Подставив (16) в (13)–(15), получим систему линейных уравнений относительно неопределенных коэффициентов C_{ji} . Если обозначить через M матрицу этой системы, то искомое решение для скоростей будет иметь вид:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{ \sum_{j=1}^3 \left((B_{1i}^j + B_{3i}^j z) \operatorname{ch} kz + (B_{2i}^j + B_{4i}^j z) \operatorname{sh} kz \right) \exp(\lambda_j t) + (B_{1i}^4 + B_{3i}^4 z) \operatorname{ch} kz + (B_{2i}^4 + B_{4i}^4 z) \operatorname{sh} kz \right\} \sin kx_1, \\ U_2 &= \left\{ \sum_{j=1}^3 \left((D_{1i}^j + D_{3i}^j z) \operatorname{ch} kz + (D_{2i}^j + D_{4i}^j z) \operatorname{sh} kz \right) \exp(\lambda_j t) + (D_{1i}^4 + D_{3i}^4 z) \operatorname{ch} kz + (D_{2i}^4 + D_{4i}^4 z) \operatorname{sh} kz \right\} \cos kx_1, \end{aligned} \quad (17)$$

где коэффициенты B_{li}^j, D_{li}^j вычисляются через значения толщины, вязкости, плотности слоев, а λ_i — корни характеристического уравнения $\det M = 0$. Согласно результатам аналитического исследования гравитационной устойчивости многослойной жидкости, если плотности слоев не убывают с глубиной, то $\lambda_i \leq 0$ [6] (в дальнейшем, без ограничения общности, будем предполагать, что λ_i расположены в порядке убывания их модулей: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$).

Интегрируя по времени вертикальную скорость U_2 из (17), получим смещения границ слоев:

$$\begin{aligned} \Delta Z_i &= \left\{ \sum_{j=1}^3 \left((D_{1i}^j + D_{3i}^j Z_i) \operatorname{ch} kZ_i + (D_{2i}^j + D_{4i}^j Z_i) \operatorname{sh} kZ_i \right) \frac{\exp(\lambda_j t) - 1}{\lambda_j} + \right. \\ &\quad \left. + t \left((D_{1i}^4 + D_{3i}^4 Z_i) \operatorname{ch} kZ_i + (D_{2i}^4 + D_{4i}^4 Z_i) \operatorname{sh} kZ_i \right) \right\} \cos kx_1. \end{aligned} \quad (18)$$

В расчетах использовались следующие значения параметров многослойного пласта и вязкого слоя (см. [7]):

$$\begin{aligned} Z_1 &= 0 \text{ км}, & Z_2 &= -20 \text{ км}, & Z_3 &= -60 \text{ км}, & Z_4 &= -100 \text{ км}, \\ \rho_1 &= 2.7 \text{ г/см}^3, & \rho_2 &= 3 \text{ г/см}^3, & \rho_3 &= 3.1 \text{ г/см}^3, \\ \mu_1 &= 10^{22} \text{ Па} \cdot \text{с}, & \mu_2 &= 10^{23} \text{ Па} \cdot \text{с}, & \mu_3 &= 10^{21} \text{ Па} \cdot \text{с}. \end{aligned}$$

Расчетная область имела следующие пространственные размеры: $L = 160$ км по вертикали, $2\pi L$ — по горизонтали; вычисления проводились для $k = 1/L$.

Для выявления особенностей эволюции течения в слоях проведем анализ характеристического уравнения. Так как плотность слоев $\sim 3 \text{ г/см}^3$, а перепад плотностей между слоями составляет $\sim 0.3 \text{ г/см}^3$, то $(\rho_{i+1} - \rho_i) / \rho_i = \varepsilon r_{i+1}$, где $r_{i+1} \sim 1$ и $\varepsilon \ll 1$. Характеристическое уравнение (в данном случае уравнение третьей степени) можно представить в виде:

$$\det M = \sum_{i=0}^4 a_i p^i = a_0 + (b_1 r_1 + \varepsilon (b_2 r_2 + b_3 r_3)) p^2 + \varepsilon (r_1 (b_{12} r_2 + b_{13} r_3) + \varepsilon b_{23} r_2 r_3) p + \varepsilon^2 b_{123} r_1 r_2 r_3 = 0, \quad (19)$$

где b_i, b_{ij}, b_{ijk} — коэффициенты, зависящие от толщин и вязкостей слоев. Тогда из (19) получим:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} &= - \frac{(b_1 r_1 + \varepsilon (b_2 r_2 + b_3 r_3))}{a_0 \lambda_1} \sim O(1), \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_1} &= \varepsilon \frac{(r_1 (b_{12} r_2 + b_{13} r_3) + \varepsilon b_{23} r_2 r_3)}{a_0 \lambda_1^2} \sim O(\varepsilon), \\ \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_1} &= - \frac{\varepsilon^2 b_{123} r_1 r_2 r_3}{a_0 \lambda_1^3} \sim O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Из (20) следует, что $\lambda_2 / \lambda_1 \sim \varepsilon$, $\lambda_3 / \lambda_1 \sim \varepsilon$, то есть $|\lambda_1| \gg |\lambda_2|$, $|\lambda_1| \gg |\lambda_3|$. Таким образом, в эволюции течения можно выделить, по крайней мере, два различных режима: быструю стадию на малых временах (порядка $1/\lambda_1$), когда существенно меняется только член с экспонентой $\exp(-\lambda_1 t)$, а влияние остальных слагаемых незначительно, и стадию медленного изменения (квазистационарную) (при времени порядка $1/\lambda_2$), когда члены с множителем $\exp(-\lambda_1 t)$ становятся пренебрежимо малыми.

Получены следующие значения собственных чисел: $\lambda_1 \approx -12.14$ (1/млн лет); $\lambda_2 \approx -0.268$ (1/млн лет); $\lambda_3 \approx -0.019$ (1/млн лет). Так как $|\lambda_1| \gg |\lambda_2| \gg |\lambda_3|$, то эволюция течения определяется характерными масштабами времени: $t_1 = 1/|\lambda_1| \sim 0,08$ (млн лет); $t_2 = 1/|\lambda_2| \sim 3,72$ (млн лет); $t_3 = 1/|\lambda_3| \sim 52,27$ (млн лет).

Структуру поля скоростей можно наглядно описать с помощью так называемых нейтральных поверхностей y_k , на которых вертикальная скорость обращается в нуль: $U_2|_{x_2=y_k} = 0$ (в англоязычной литературе — necking level [8]). Так как значения скоростей в аналитическом решении имеют вид функций с разделяющимися переменными, величина y_k не зависит от горизонтальной координаты x_1 .

Оценивалась степень отклонения смещения границ ΔZ_i от изостатической компенсации (гидростатического равновесия). Для этого производился расчет смещения границы ΔZ_{3is} между литосферой и астеносферой при условии выполнения гидростатического равновесия на нижней границе Z_4 :

$$\Delta Z_{3is} = - \frac{\rho_1 \Delta Z_1 + (\rho_2 - \rho_1) \Delta Z_2}{\rho_3 - \rho_2}.$$

Для графического изображения поля скоростей использовалась функция тока. В стационарном течении ее изолинии являются траекториями движения частиц жидкости. Для удобства их распределение выбиралось таким, чтобы структура поля была наиболее наглядной.

Рассмотрено несколько вариантов конвективных течений с различными внешними воздействиями.

4.1. Начальный рельеф верхней границы

В начальный момент времени смещение дневной поверхности задавалось функцией $\Delta Z_1|_{t=0} = \cos kx_1$ (размерностью в км), которая имеет минимум в центральной точке $x_1 = \pi L$, а на остальных границах $\Delta Z_i|_{t=0} = 0$, $i = \overline{2,3}$. На нижней границе Z_4 горизонтальная и вертикальная скорости равнялись нулю. На рисунке 2 показана эволюция границ слоев в точке $x_1 = \pi L$ и нейтральных поверхностей. Чтобы наглядно представить на одном графике эволюцию как на малых, так и на больших временах, используется логарифмическая временная шкала.

Так как $t_1 \ll t_2 \ll t_3$, то эволюция движения границ включает в себя следующие стадии:

– «быструю» эволюцию на временах порядка t_1 . Происходит подъем всех трех подвижных границ в точке $x_1 = \pi L$. Поле скоростей имеет одноярусную двучеистую структуру (Рис. 3а). Максимальное значение модуля скорости в верхнем слое равняется 0,4 см/год, в среднем слое — 0,33 см/год, в нижнем слое — 0,89 см/год;

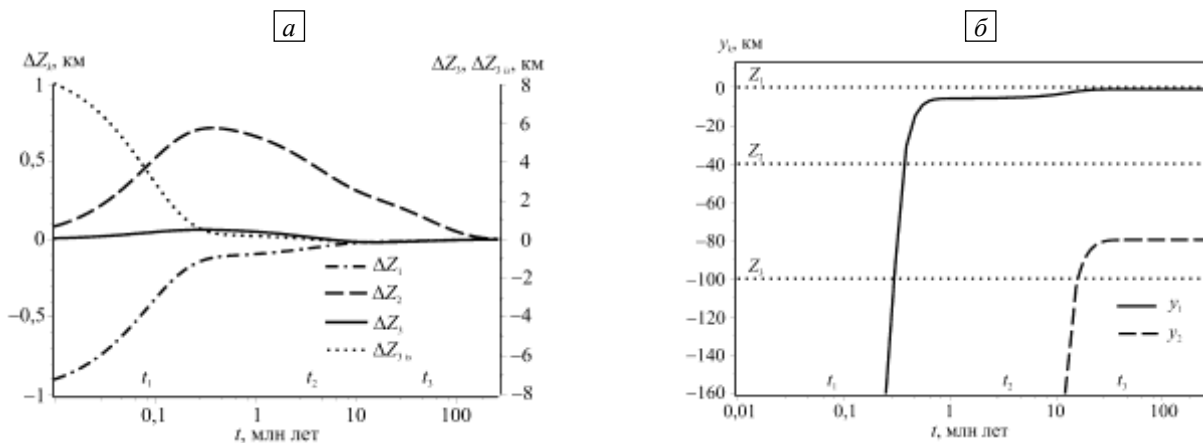


Рис. 2. Эволюция смещений границ слоев (а) и нейтральных поверхностей (б) в точке $x_1 = \pi L$ при известном начальном рельефе верхней границы

– эволюцию на временах порядка t_2 . Продолжается подъем верхней границы Z_1 , а границы Z_2, Z_3 в точке $x_1 = \pi L$ опускаются. Структура поля скоростей становится двухъярусной. Как видно из рисунка 2б, создание нижнего уровня (яруса) ячеек начинается с нижней границы Z_4 . Горизонтальная граница между ячейками, которую обозначим через y_1 , является нейтральной поверхностью, так как на ней вертикальная скорость обращается в нуль. В течение времени порядка t_1 поверхность y_1 поднимается от нижней границы почти до границы Z_1 , в результате чего в поле скоростей образуется приповерхностный пограничный слой толщиной порядка 4 км (Рис. 3б). Максимальное значение модуля скорости в верхнем слое составляет 0,03 см/год, в среднем слое — 0,01 см/год, в нижнем слое — 0,03 см/год;

– эволюцию на временах порядка t_3 . Направление движения границ Z_1 и Z_2 остается неизменным, но начинается подъем Z_3 в точке $x_1 = \pi L$. Двухъярусная структура поля скоростей переходит в трехъярусной (Рис. 3б). Формирование следующего уровня ячеек также начинается с нижней границы Z_4 . Его верхняя граница y_2 поднимается в средний слой. Нейтральная граница y_1 асимптотически приближается к Z_1 , так что толщина пограничного слоя уменьшается до 1 км (Рис. 3в). Максимальное значение модуля скорости в верхнем слое равняется 0,0019 см/год, в среднем слое — 0,0011 см/год, в нижнем слое — 0,0011 см/год;

– эволюцию на временах много больше t_3 . Величины скоростей и смещений границ на этой стадии определяется, главным образом, слагаемыми в (17), (18), не содержащими экспонент. Так как в данном случае они отсутствуют, качественных изменений в структуре поля скоростей не наблюдается. Максимальное значение модуля скорости в верхнем слое составляет 0,000275 см/год, в среднем слое — 0,000019 см/год, и в нижнем слое — 0,000018 см/год.

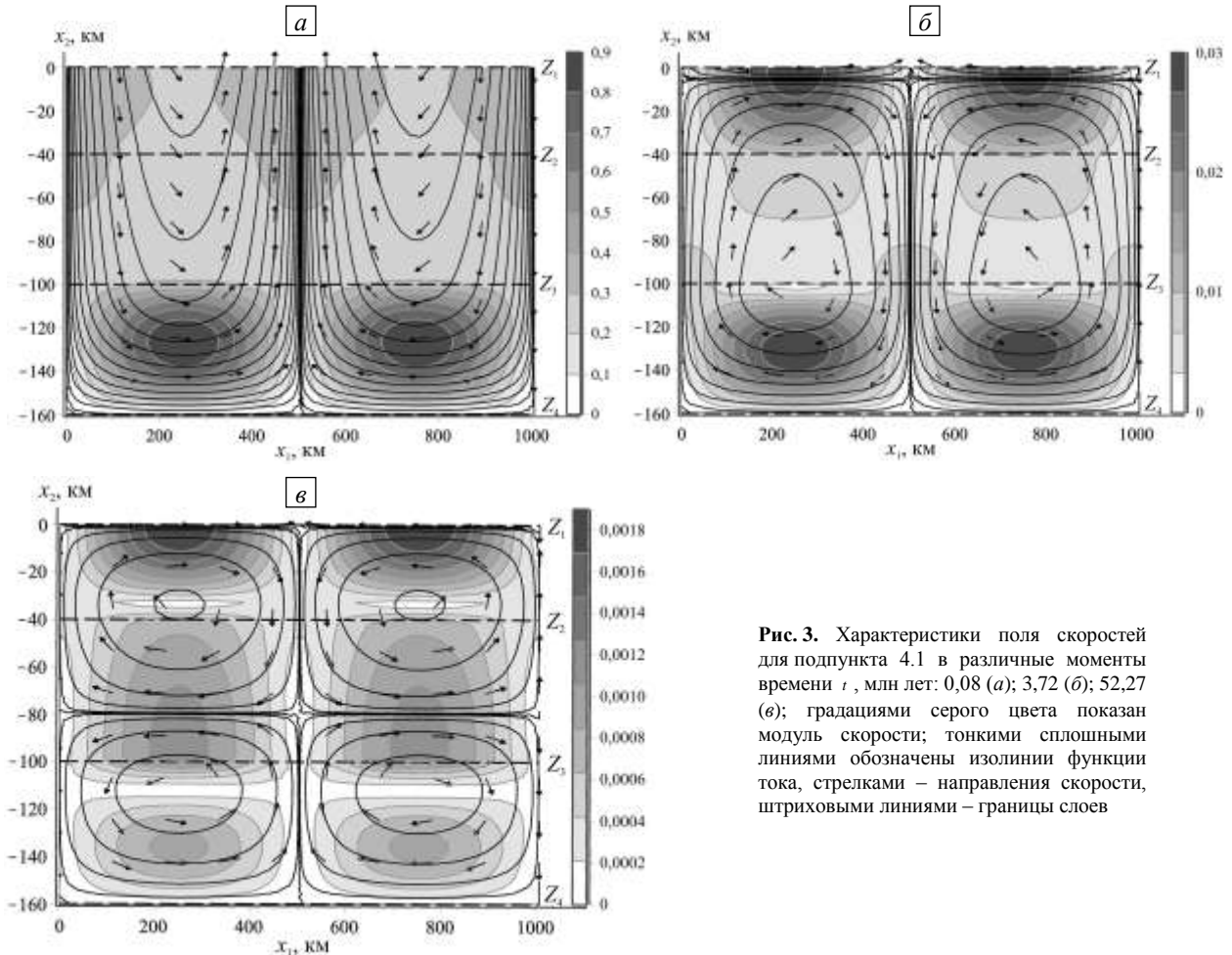


Рис. 3. Характеристики поля скоростей для подпункта 4.1 в различные моменты времени t , млн лет: 0,08 (а); 3,72 (б); 52,27 (в); градациями серого цвета показан модуль скорости; тонкими сплошными линиями обозначены изолинии функции тока, стрелками – направления скорости, штриховыми линиями – границы слоев

4.2. Скорость на нижней границе

В начальный момент все границы слоев плоские: $\Delta Z_i|_{t=0} = 0$, $i = \overline{1,3}$. Скорости на нижней границе расчетной области были следующими (в см/год):

$$u_1|_{x_2=z_4} = 0, \quad u_2|_{x_2=z_4} = -0,1 \cos kx_1.$$

Рисунок 4 иллюстрирует эволюцию границ в центральной точке $x_1 = \pi L$ и нейтральных поверхностей. Как и в предыдущем подпункте, эволюцию границ можно разделить на стадии:

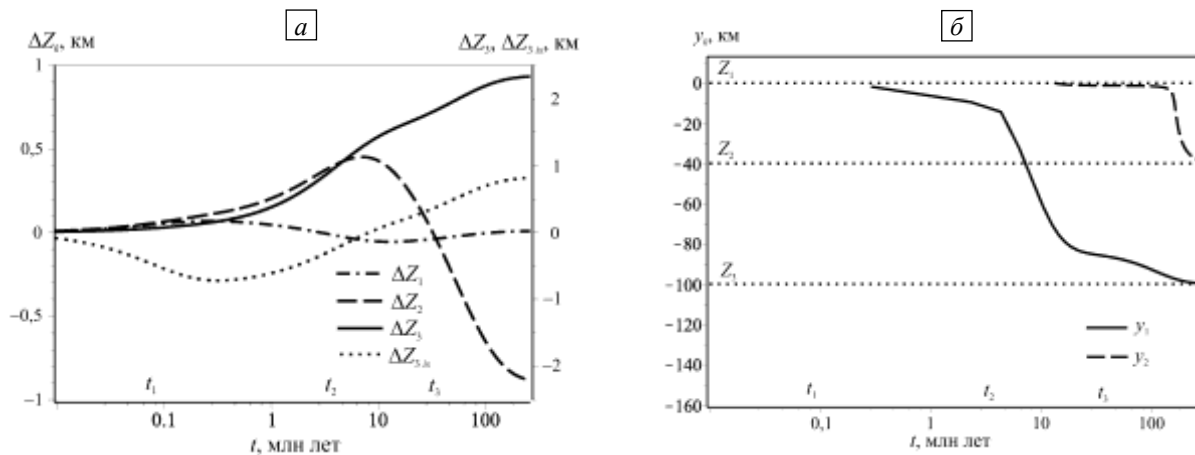


Рис. 4. Эволюция смещений границ слоев (а) и нейтральных поверхностей (б) в точке $x_1 = \pi L$ при известной скорости на нижней границе расчетной области (в обозначениях Рис. 2)

– «быструю» эволюцию на временах порядка t_1 . Происходит подъем всех трех подвижных границ в точке $x_1 = \pi L$. Как и при известном начальном рельефе верхней границы (см. пп. 4.1), поле скоростей имеет одноярусную двучастную структуру. Максимальное значение модуля скорости в верхнем слое равняется 0,07 см/год, в среднем слое — 0,06 см/год, в нижнем слое — 0,33 см/год;

– эволюция на временах порядка t_2 . Продолжается подъем границ Z_2 и Z_3 , но начинается опускание верхней границы Z_1 в точке $x_1 = \pi L$. Структура поля скоростей становится двухъярусной. Как видно из рисунка 2б, в отличие от предыдущего варианта внешнего воздействия, формирование нового яруса начинается с поверхности Z_1 . Граница между уровнями y_1 опускается к Z_2 . Максимальное значение модуля скорости в верхнем слое составляет 0,027 см/год, в среднем слое — 0,031 см/год, в нижнем слое — 0,33 см/год;

– эволюция на временах порядка t_3 . Направление движения границы Z_3 не меняется, но начинается опускание Z_2 и подъем Z_1 в точке $x_1 = \pi L$. Двухъярусная структура поля скоростей преобразуется в трехъярусную (Рис. 5а). Формирование следующего уровня также начинается с поверхности, его нижнюю границу обозначим через y_2 . В приповерхностной области верхнего слоя появляется тонкий пограничный слой толщиной порядка 1,5 км. Граница y_1 опускается в средний слой (Рис. 4б). Максимальное значение модуля скорости в верхнем слое равняется 0,008 см/год, в среднем слое — 0,01 см/год, в нижнем слое — 0,39 см/год;

– эволюция на временах много больше t_3 . Уменьшаются только величины скоростей движения границ слоев, а их направления сохраняются. Структура поля скоростей качественно остается прежней (Рис. 5б). Происходит опускание нейтральных поверхностей: y_1 к Z_3 , а y_2 — к Z_2 (Рис. 4б). Максимальное значение модуля скорости в верхнем слое равняется 0,0022 см/год, в среднем слое — 0,005 см/год, в нижнем слое — 0,4 см/год.

При замене вертикальной скорости на нижней границе расчетной области на горизонтальную (в см/год)

$$u_1|_{x_2=z_4} = 0,1 \sin kx_1, \quad u_2|_{x_2=z_4} = 0$$

существенных изменений не наблюдается. Основное отличие состоит в том, что конвективные ячейки на нижнем ярусе получаются замкнутыми. Максимальное значение модуля скорости в верхнем слое имеет значение 0,00027 см/год, в среднем слое — 0,0006 см/год, в нижнем слое — 0,1 см/год.

Расчеты с различными вариантами параметров слоев показали, что вязкости слоев влияют главным образом на величину масштабов времени t_i , тогда как плотности обуславливают соотношение между t_i . Численное решение с использованием уравнений Рейнольдса для описания течения в верхней подобласти не вносит заметных изменений в результаты аналитического исследования.

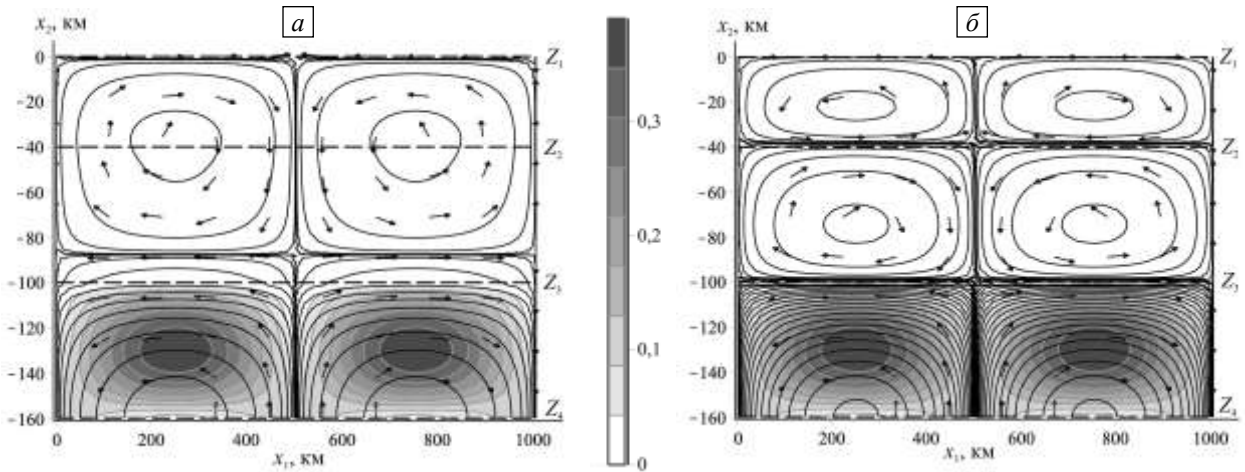


Рис. 5. Характеристики поля скоростей в различные моменты времени t , млн лет: 52,27 (а); 261,35 (б), при известной скорости на нижней границе расчетной области (в обозначениях Рис. 3)

5. Исследование эволюции течения при больших смещениях границ слоев.

В численных экспериментах верхний слой подобласти D_1 (см. Рис. 1) дополнительно разделяется на 3 слоя, что более соответствует реальной структуре земной коры, в состав которой входят: осадочный чехол с плотностью $2,5 \text{ г/см}^3$ и вязкостью $10^{15} \text{ Па} \cdot \text{с}$; гранитный слой с плотностью $2,7 \text{ г/см}^3$ и вязкостью $10^{20} \text{ Па} \cdot \text{с}$; базальтовый слой с плотностью 3 г/см^3 и вязкостью $0,2 \cdot 10^{20} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Пусть z_1 — граница между осадочным и гранитным слоями, а z_2 — граница между гранитным и базальтовым слоями. В этом случае необходимо расширить систему движения границ (б) путем добавления в нее уравнений относительно z_1 и z_2 .

В модели также учитываются поверхностные процессы эрозии/осадконакопления, которые в значительной степени влияют на процессы структурообразования в верхних слоях литосферы [9, 10]. Для этого в правую часть уравнения (б) для поверхности Z_1 вводится дополнительное слагаемое — скорость денудации/осадконакопления: $V_{den} = (\beta z_{1,1})_{,1}$ (где β — коэффициент интенсивности денудации), которая характеризует горизонтальное перераспределение осадочного материала под влиянием рельефа поверхности, ветровых процессов, морских течений и других внешних факторов. Как правило, предполагается, что процесс денудации/осадконакопления близок к диффузионному [9, 10].

Кроме этого, модель включает процесс эрозии на границе между осадочным чехлом и гранитным слоем, который можно рассматривать как фазовый переход материала гранитного слоя в осадочные породы. При моделировании обычно предполагается, что скорость эрозии направлена по нормали к поверхности и экспоненциально зависит от толщины осадочного чехла: чем больше толщина осадков, тем она меньше. Исходя из этих соображений в правую часть уравнения для z_2 расширенной системы (б) добавляется, как дополнительное слагаемое, скорость эрозии, которая определяется следующим образом [9, 10]:

$$V_{e2} = -\alpha \exp\left(-\frac{z_1 - z_2}{H^*}\right) / \cos \varphi = -\alpha \exp\left(-\frac{z_1 - z_2}{H^*}\right) \sqrt{1 + z_{2,1}^2},$$

где α — коэффициент интенсивности процесса эрозии, φ — угол наклона рельефа границы z_2 , H^* — параметр, характеризующий скорость убывания эрозии с глубиной.

Для выполнения закона сохранения массы скорость роста осадочного чехла в этом случае должна быть равной $-\rho_2/\rho_1 V_{e2}$. Поэтому в правую часть уравнения (б) для поверхности z_1 также необходимо ввести дополнительное слагаемое:

$$V_{e1} = -\frac{\rho_2}{\rho_1} V_{e2} + V_{e2} = \alpha \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) \exp\left(-\frac{z_1 - z_2}{H^*}\right) \sqrt{1 + z_{2,1}^2}.$$

Произведен расчет эволюции течения с большими деформациями границ. На нижней границе задавались нулевая горизонтальная скорость и вертикальная скорость с куполообразным профилем:

$$u_2|_{x_2=z_1} = 0,2 \left(\exp(-(x_1 - \pi f)^2) - \frac{1}{2\pi f} \int_0^{2\pi f} \exp(-(x_1 - \pi f)^2) dx_1 \right), \quad f = \overline{1,2}.$$

Далее, на рисунках 6–8, показаны результаты вычислений. Так, на рисунке 6 приводятся графики эволюции границ слоев в точке $x_1 = \pi L$, рисунок 7 содержит картины полей скоростей, а на рисунке 8 демонстрируются профили дневной поверхности и границы между осадочным чехлом и гранитным слоем в момент времени 30 млн лет. Расчеты проводились для двух вариантов горизонтального размера расчетной области — $2\pi Lf$, км: параметру f присваивались значения 1 (Рис. 6а–8а) и 2 (Рис. 6б–8б).

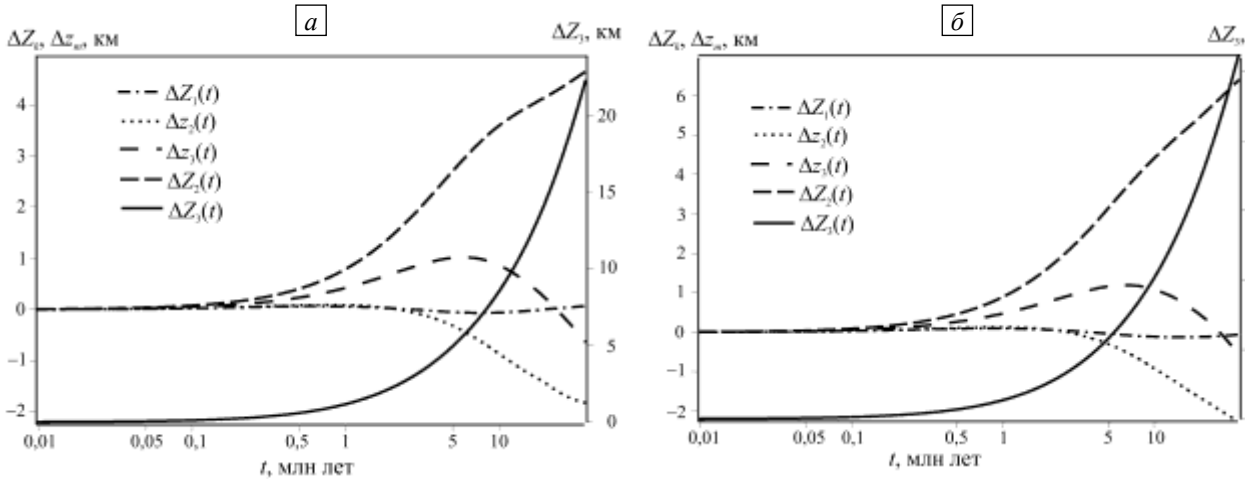


Рис. 6. Численный расчет эволюции смещений границ слоев подобласти D_1 в точке $x_1 = \pi Lf$ при $f = 1$ (а) и $f = 2$ (б); на вертикальной оси слева приводятся значения смещений границ z_1 , z_2 , z_3 и z_4 , а на оси справа – значения смещений границы z_5

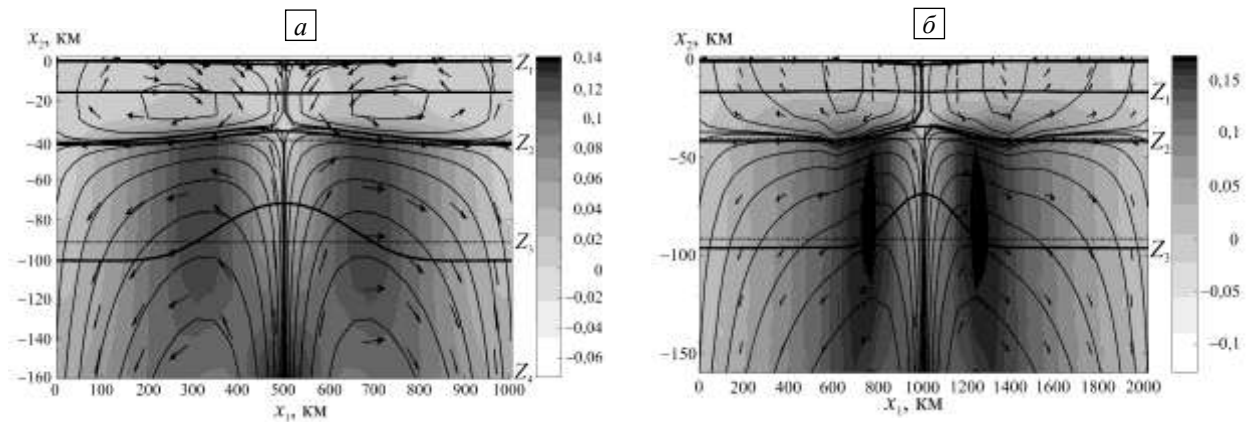


Рис. 7. Численный расчет поля скоростей в момент времени 30 млн лет при $f = 1$ (а) и $f = 2$ (б) (в обозначениях Рис. 3)

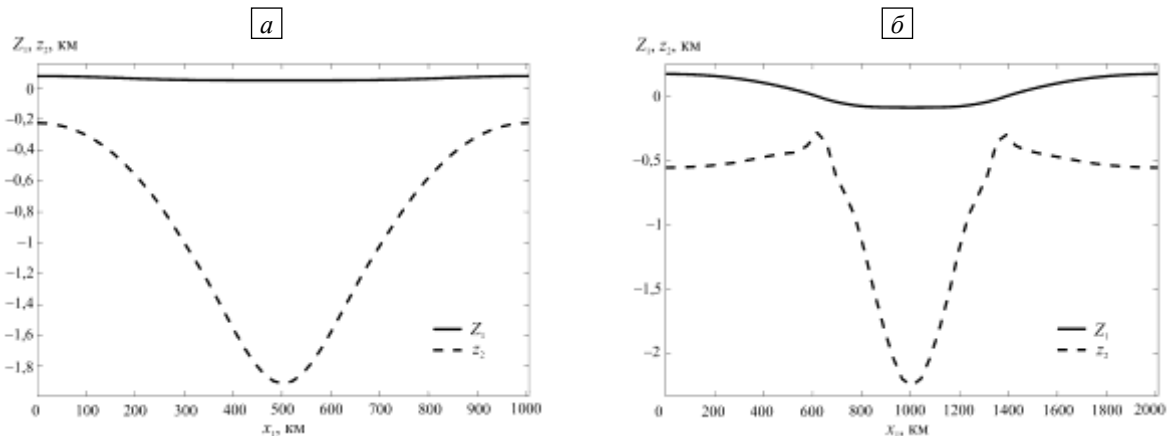


Рис. 8. Профили дневной поверхности Z_1 и границы между осадочным чехлом и гранитным слоем z_2 в момент времени 30 млн лет при $f = 1$ (а) и $f = 2$ (б)

По приведенным результатам видно, что при увеличении горизонтального размера области в 2 раза качественная картина поля скоростей не изменилась. Выросли только горизонтальный размер конвективных ячеек и амплитуда смещения z_1 — границы между осадочным и гранитным слоем.

Сравнительный анализ численных данных, полученных при малых и больших смещениях границ слоев, показал:

- стадий эволюции стало больше, потому что рассматривалась более подробная структура коры и учитывались процессы денудации и осадконакопления, однако качественных изменений в смещении границ Z_1 и Z_2 не наблюдается;
- включение в модель осадочного чехла и учет процессов эрозии/осадконакопления приводит к существенному горизонтальному перераспределению материала в приповерхностной области; вследствие этого увеличилась амплитуда смещения границы между осадочным чехлом и гранитным слоем, тогда как амплитуда дневной поверхности почти не изменилась;
- соотношение максимальных амплитуд подъема подвижных границ Z_i незначительно отклоняется от линейного варианта;
- несмотря на большие смещения границ слоев (особенно границы между литосферой и астеносферой Z_3), нейтральные поверхности y_i деформируются в малой степени.

6. Обсуждение результатов

Аналитическое и численное исследование течения многослойной вязкой жидкости показали многостадийность его эволюции с характерными масштабами времени t_i , которые определяются не внешними факторами, а геометрическими и физическими параметрами моделируемой среды. При всех рассмотренных выше вариантах внешнего воздействия в эволюции течения жидкости можно выделить «быструю» стадию на относительно коротком начальном промежутке времени и «медленную», которая в свою очередь состоит из нескольких этапов.

В процессе эволюции происходит преобразование одноярусной двуярусной структуры поля скоростей на «быстрой» стадии эволюции в трехъярусную структуру на «медленной» стадии. Такая трансформация поля скоростей осуществляется благодаря взаимодействию послойных течений во всей расчетной области. Если, например, исключить из модели нижнюю подобласть D_2 путем замены ее воздействия заданием скорости на нижней границе подобласти D_1 , то на больших временах эволюция качественно не отличается от эволюции на стадии с масштабом времени t_2 , то есть будет иметь место последовательное опускание дневной поверхности Z_1 и, соответственно, подъем границы Z_2 в центральной точке, а также будут отсутствовать рассмотренные выше стадии эволюции на временах порядка t_3 и более. Аналогичная картина эволюции дневной поверхности Z_1 получится и при рассмотрении подобласти D_1 как однородной по вязкости и плотности, не разделенной на отдельные слои.

При неизменных краевых условиях на «быстрой» стадии наблюдается подъем поверхности и границ раздела слоев, а «медленная» стадия характеризуется изменением скорости по величине и по направлению, а также последующей инверсией формы границ.

Для объяснения этого явления рассмотрим уравнение движения границы Z_i в интегральной форме:

$$Z_{i,t} = u_2(x_1, Z_3) - \left(\int_{Z_4}^{Z_i} u_1 dz \right)_1.$$

Первый член в правой части определяет поперечный изгиб слоев, заключенных между границами Z_i и Z_4 , а второй — суммарный эффект растяжения/сжатия этих слоев за счет горизонтального перераспределения материала. На «быстрой» стадии, когда смещения границ невелики и горизонтальные движения незначительны, доминирующим является поперечный изгиб. На последующих стадиях, при достаточно больших смещениях границ, горизонтальное перераспределение материала становится более существенным и приводит к изменению величины и направления скорости движения границ.

Как показали аналитические исследования, во всех рассмотренных вариантах на временах порядка t_3 (около 50 млн лет) одна из нейтральных поверхностей располагается в непосредственной близости от дневной поверхности, а другая находится на значительном удалении от границы Z_3 .

Только при внешнем воздействии на нижней границе расчетной области на временах, много больших t_3 (порядка 250–300 млн лет), одна из нейтральных поверхностей y_j асимптотически приближается к границе Z_3 , так что границы конвективных ячеек почти совпадают с границами раздела слоев.

При численном моделировании течения с большими смещениями границ слоев воспроизводятся все основные стадии эволюции этих границ и структуры поля скоростей, полученные аналитически. При этом выявлена слабая зависимость эволюции течения от скорости, задаваемой на нижней границе z_4 : переход от синусоидального профиля скорости к куполообразному не приводит к качественным изменениям в эволюции течения. Имеет место лишь заметное расхождение с аналитическими результатами в уровнях горизонтальной границы между ячейками в среднем слое.

Сопоставление эволюции границ z_3 и z_{3is} показывает значительные отклонения от гидростатического равновесия на нижней границе z_4 во всех рассмотренных вариантах. На больших временах при заданных скоростях на нижней границе z_4 соотношение их амплитуд получается около 4, а в варианте с начальным рельефом возможна только частичная компенсация: отклонение амплитуд составляет порядка 15%.

Согласно геолого-геофизическим данным характерной особенностью эволюции дневной поверхности и границ литосферных слоев является последовательность сменяющих друг друга стадий их поднятия и опускания. Например, утонение земной коры и литосферы, наблюдаемое под крупными прогибами, сопровождается разнообразными тектоническими проявлениями на дневной поверхности: формируются поднятия, переходящие в прогибы с возникновением рифтов (узких глубоких впадин), а далее образуются крупные впадины (dome – rift – basin structures [11]). В большинстве работ утонение коры и литосферы пытаются объяснить каким-то одним основным фактором — растяжением, подкоровой эрозией, диапиризмом и другим. [12] Однако всесторонний анализ моделей и экспериментальных данных доказывает, что в рамках такого подхода можно воспроизвести лишь отдельные этапы процесса эволюции.

Тектонический процесс, как правило, сопровождается активной гидротермальной и вулканической деятельностью, которые служат внешними проявлениями процессов теплопереноса в земной коре и литосфере [11]. При моделировании тепловых процессов обычно предполагают, что тепловая конвекция происходит только в нижней мантии, а в самой литосфере теплоперенос осуществляется кондуктивным путем. Однако известно, что из-за низкой теплопроводности горных пород при таком способе передачи тепла для достижения существенного утонения литосферы тепловой поток должен быть в 8–10 раз мощнее наблюдаемого [11, 13]. Возможность тепловой конвекции в самой литосфере рассматривалась в некоторых работах (см. например, [14]). Однако в этих исследованиях вычисляются лишь значения критических параметров — параметров, при которых возникает конвекция, а численные характеристики самого конвективного течения не приводятся, так что нет возможности оценить и сравнить результаты моделирования. Настоящая работа ограничивается изучением только механических движений в системе «литосфера–астеносфера», ни в коей мере не отрицая наличия процессов теплопереноса. Для определения масштаба скорости на нижней границе расчетной области использовались количественные характеристики конвекции в нижней мантии.

В заключение следует сказать, что в эволюции многослойного течения воспроизводятся все указанные выше стадии: подъем дневной поверхности на «быстрой» стадии, а затем опускание и образование впадины. При численном подходе учет более подробной — слоистой — структуры земной коры и процессов денудации/осадконакопления приводит к значительному увеличению амплитуды прогибов. Многостадийность эволюции течения вызывается не изменениями внешних воздействий (нагрузки на дневной поверхности или скорости на нижней границе расчетной области), а взаимодействием послойных течений внутри рассматриваемой геосферы, которое обеспечивается подвижными границами разделов слоев.

7. Заключение

Проведено аналитическое и численное моделирование эволюции медленного вязкого течения в расчетной области, включающей в себя относительно толстый слой вязкой жидкости и многослойный вязкий пласт на его поверхности.

Аналитическое исследование медленного многослойного течения вязкой жидкости показало, что эволюция границ слоев и поля скоростей состоит из нескольких стадий с характерными для каждой из них масштабами времени, которые определяются геометрическими и физическими параметрами моделируемой геосферы.

С помощью комплексной численной модели, включающей в себя уравнения Рейнольдса и уравнения Стокса, осуществлены модельные расчеты больших смещений границ слоев при произвольном профиле скорости на нижней границе расчетной области с учетом более подробной структуры многослойного пласта и дополнительных процессов (денудации и осадконакопления). Численное исследование подтвердило основные особенности эволюции, которые были выявлены аналитическим путем.

Приводится пример возможного приложения результатов исследования в геофизике. Модельные расчеты многослойного течения вязкой жидкости на больших временах могут быть использованы для объяснения многостадийности эволюции ряда тектонических процессов, например, утонения литосферы под крупномасштабными тектоническими прогибами.

Работа выполнена по госбюджетной тематике ТОИ ДВО РАН «Математическое моделирование и анализ динамических процессов в океане» (№117030110034-7).

Литература

1. Craster R.V., Matar O.K. Dynamics and stability of thin liquid films // *Rev. Mod. Phys.* 2009. Vol. 81, no. 3. P. 1131-1198. [DOI](#)
2. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
3. Kushnir D., Rokhlin V. A highly accurate solver for stiff ordinary differential equations // *SIAM J. Sci. Comput.* 2012. Vol. 34, no. 3. P. A1296–A1315. [DOI](#)
4. Tan E., Choi E., Thoutireddy P., Gurnis M., Aivazis M. GeoFramework: Coupling multiple models of mantle convection within a computational framework // *Geochem. Geophys. Geosyst.* 2006. Vol. 7, no. 6. Q06001. [DOI](#)
5. Пак В.В. Численное исследование эволюции медленного течения неоднородной жидкости на больших временах // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2016. Т. 9, № 2. С. 207-217. [DOI](#)
6. Наймарк Б.М., Яновская Т.Б. Гравитационная устойчивость вертикально-неоднородной несжимаемой вязкой жидкости I // *Исследование сейсмичности и моделей Земли (Вычислительная сейсмология, вып. 9)*. М.: Наука, 1976. С. 149-159.
7. Schubert G., Turcotte D.L., Olsen P. *Mantle convection in the earth and planets*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 956 p. [DOI](#)
8. Ranalli G., Merphy D.C. Rheological stratification of the lithosphere // *Tectonophysics*. 1987. Vol. 132, no. 4. P. 281-295. [DOI](#)
9. Бронгулеев В.В. Взаимодействие эндогенных и экзогенных процессов при росте локальных морфоструктур // *Геоморфология*. 2013. № 1. С. 3-11. [DOI](#)
10. Chen A., Darbon J., Morel J.-M. Landscape evolution models: A review of their fundamental equations // *Geomorphology*. 2014. Vol. 219. P. 68-86. [DOI](#)
11. Neugebauer H.J. Models of lithospheric thinning // *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* 1987. Vol. 15. P. 421-443. [DOI](#)
12. Артюшков Е.В. *Физическая тектоника*. М.: Наука, 1993. 455 с.
13. Spohn, T, Schubert G. Convective thinning of the lithosphere: A mechanism for the initiation of continental rifting // *J. Geophys. Res. Solid Earth*. 1982. Vol. 87, no. B6. P. 4669-4681. [DOI](#)
14. Биргер Б.И. Возбуждение мелкомасштабной конвекции в континентальной литосфере возмущениями рельефа земной поверхности // *Физика Земли*. 2010. № 7. С. 78-86.

References

1. Craster R.V., Matar O.K. Dynamics and stability of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.*, 2009, vol. 81, no. 3, pp. 1131-1198. [DOI](#)
2. Paskonov V.M., Polezhayev V.I., Chudov L.A. Chislennoye modelirovaniye protsessov teplo- i massoobmena [Numerical modeling of heat- mass transfer]. М.: Nauka, 1984. 288 p.
3. Kushnir D., Rokhlin V. A highly accurate solver for stiff ordinary differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2012, vol. 34, no. 3, pp. A1296–A1315. [DOI](#)
4. Tan E., Choi E., Thoutireddy P., Gurnis M., Aivazis M. GeoFramework: Coupling multiple models of mantle convection within a computational framework. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 2006, vol. 7, no. 6, Q06001. [DOI](#)
5. Pak.V.V. Numerical study of the long-time evolution for inhomogeneous creeping flow. *Vycisl. meh. splos. sred-Computational Continuum Mechanics*. 2016, vol. 9, no. 2, pp. 207-217. [DOI](#)
6. Naymark B.M., Yanovskaya T.B. Gravitatsionnaya ustoychivost' vertikal'no-neodnorodnoy neshhimayemoy vyzkoy zhidkosti I [Gravitational stability of a vertically inhomogeneous incompressible viscous fluid I] // *Issledovaniye seysmichnosti i modeley Zemli (Vychislitel'naya seysmologiya, vyp. 9)* [Investigation of seismicity and Earth models (Computational seismology, issue 9)]. М., Nauka. 1976. pp. 149-159.
7. Schubert G., Turcotte D.L., Olsen P. *Mantle convection in the earth and planets*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 956 p. [DOI](#)
8. Ranalli G., Merphy D.C. Rheological stratification of the lithosphere. *Tectonophysics*, 1987, vol. 132, no. 4, pp. 281-295. [DOI](#)
9. Bronguleyev V.V. Interaction of endogenous and exogenous processes in the course of local morphostructures growth. *Geomorphology RAS*. 2013, no. 1, pp. 3–11. [DOI](#)
10. Chen A., Darbon J., Morel J.-M. Landscape evolution models: A review of their fundamental equations. *Geomorphology*, 2014, vol. 219, pp. 68-86. [DOI](#)
11. Neugebauer H.J. Models of lithospheric thinning. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 1987, vol. 15, pp. 421-443. [DOI](#)
12. Artyushkov E.V. *Fizicheskaya tektonika* [The physical tectonics]. Moscow, Nauka, 1993. 455 p.
13. Spohn, T, Schubert G. Convective thinning of the lithosphere: A mechanism for the initiation of continental rifting. *J. Geophys. Res. Solid Earth*, 1982, vol. 87, no. B6, pp. 4669-4681. [DOI](#)
14. Birger B.I. Excitation of small-scale convection in the continental lithosphere by disturbances in the topography of the Earth's surface. *Izvestiya Phys. Solid Earth*, 2010. vol. 46, no. 7, pp. 627-635. [DOI](#)

Поступила в редакцию 23.07.2018; опубликована в электронном виде 22.10.2018

Сведения об авторе

Пак Владимир Васильевич, кфмн, внс, Тихоокеанский океанологический институт им. В.И.Ильичева ДВО РАН (ТОИ ДВО РАН), 690041, Владивосток, ул. Балтийская, д. 43; e-mail: pakvv@poi.dvo.ru