

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.3.18](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.3.18)

УДК 533.1:519.622:544.344

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СИНТЕЗА ГАЗОГИДРАТА ПРИ НАГНЕТАНИИ ГАЗА В СНЕЖНЫЙ МАССИВ, НАСЫЩЕННЫЙ ТЕМ ЖЕ ГАЗОМ

А.С. Чиглинцева

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова, Уфимский федеральный исследовательский центр РАН,
Уфа, Российская Федерация*

Построена математическая модель процесса образования газогидрата в снежном массиве, в исходном состоянии насыщенном газом, при нагнетании этого же газа. Для осесимметричной задачи с протяженной областью фазовых переходов построены автомодельные решения, описывающие поля температур и давлений, а также насыщенностей снега, гидрата и газа в массиве. Показано, что в зависимости от массового расхода газа и исходного состояния системы «снег–газ» в области фильтрации можно выделить три характерных зоны: ближнюю, в которой не происходит образование гидрата и, следовательно, насыщенную газом и снегом; промежуточную, в которой условия соответствуют гидратообразованию, то есть присутствуют одновременно фазы снега, газа и гидрата; дальнюю, заполненную газом и снегом в исходных фазах. Соответственно введены две фронтальных поверхности: первая – между дальней и промежуточной зонами, где начинается переход снега в состав гидрата; вторая – между ближней и промежуточной зонами, на которой заканчивается процесс образования гидрата. Изучено влияние массового расхода нагнетаемого газа, начальной снегонасыщенности и исходной температуры массива на протяженность объемной зоны образования гидрата, а также на величину гидратонасыщенности на границе, разделяющей ближнюю и промежуточную зоны. Установлено, что увеличение массового расхода нагнетаемого газа (текущее давление нагнетания скважины) приводит к росту протяженности объемной зоны фазовых переходов, а с ростом исходной снегонасыщенности протяженности объемной зоны образования гидрата и ближней зоны, где не происходит фазовых переходов, уменьшаются. Понижение начальной температуры снежного массива приводит к увеличению зоны гидратообразования, при этом отмечается рост доли гидрата на ближней границе.

Ключевые слова: нагнетание газа, снежный массив, осесимметричная постановка, автомодельное решение, объемная область, образование гидрата, фазовые переходы

MATHEMATICAL MODELING OF SYNTHESIS OF GAS HYDRATE DURING ITS INJECTION INTO A SNOW MASSIF SATURATED WITH THE SAME GAS

A.S. Chiglintseva

Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa, Russia Federation

A mathematical model of the formation of gas hydrate in a snow massif, in the initial state saturated with gas, at injection of the same gas is proposed. For the axisymmetric problem with the lengthy zone of gas hydrate formation, the self-similar solutions describing temperature and pressure fields, saturation of snow, hydrate and gas in the massif are constructed. It is shown that, depending on the mass flow rate of gas and the initial state of the «snow–gas» system, three characteristic zones can be distinguished in the filtration region: the near zone, where hydrate is not formed, and therefore it is saturated with gas and snow; the intermediate zone, in which the conditions correspond to hydrate formation, i.e. phases of snow, gas and hydrate are concurrently present; the distant zone saturated with gas and snow. Accordingly, two frontal surfaces are introduced: one - between the distant and intermediate zones, where the transition of snow into the hydrate begins, and the other - between the near and intermediate zones, where the hydrate formation process finishes. The influence of the mass flow rate of the injected gas, the initial snow saturation and the initial temperature of the massif on the length of the volume zone of hydrate formation, as well as on the value of hydrate saturation at the boundary separating the near and intermediate zones, is studied. It is established that an increase in the mass flow rate of the injected gas leads to an increase in the length of the volume zone of phase transitions, and with an increase in the initial snow saturation the sizes of the volumetric zone of hydrate formation and the near zone, where phase transitions do not occur, decrease. Lowering the initial temperature of the snow massif leads to an increase in the hydrate formation zone, with an increase in the fraction of hydrate at the near boundary.

Key words: gas injection, snow massif, axisymmetric formulation, self-similar solution, volumetric zone, hydrate formation, phase transitions

1. Введение

На сегодняшний день решением проблем утилизации парниковых газов, а также сокращения объемов хранения газа и беструбной транспортировки углеводородных соединений являются газогидратные технологии [1–4]. Например, 1 м³ газогидрата метана способен вместить 170 м³ газа и 800 л пресной воды при давлении 2,5 МПа [1, 2], в то время как хранение таких объемов в резервуарах при температуре 0°С требует поддержания давления до 15 МПа. Исходя из этого в 2003 году впервые в мире японская компания Mitsui Engineering&Shipbuilding разработала проект по транспортировке и хранению природного газа в виде гидратных гранул, а в 2009 году появилась первая технологическая установка для создания гидрата природного газа производительностью до 5 тонн в сутки [4].

Математические модели процесса образования газогидрата в пористых средах, насыщенных водой (или льдом) и газом, при нагнетании этого же газа описаны в работах [5–15]. Так, в [5, 6] теоретически

исследуется процесс заполнения среды, насыщенной газом и льдом, холодным гидратообразующим газом. Для плоскосимметричной и осесимметричной автомодельной постановок построены принципиально различные типы решений. Показано, что при инъекции холодного газа возможно формирование гидрата как на фронтальной поверхности области из газа и льда, так и внутри этой области в двух протяженных областях газ–лед и газ–вода, а также на другой фронтальной поверхности — поверхности области из газа и воды, которая появляется здесь в результате плавления льда. В работе [7] в плоскоодномерной постановке изучен процесс образования гидрата при инъекции газа в частично насыщенную водой пористую среду. Показано, что в зависимости от интенсивности подачи холодного газа гидратообразование может осуществляться в нескольких режимах с качественно различающейся структурой зон фазовых переходов. Автомодельные решения осесимметричной и плоскоодномерной задачи образования газогидрата при инъекции газа в пористую среду, заполненную газом и водой, описаны в работах [8, 9]. Здесь установлено, что переход фаз воды и газа в состав гидрата может происходить как на фронтальной поверхности, так и в объемной области. Особенности гидратообразования в снежном массиве, насыщенном газом, при нагнетании этого же газа в случае перехода через точку плавления льда рассмотрены в работе [10]. В автомодельной постановке показано, что при инъекции теплого газа под достаточно высоким давлением в области фильтрации можно выделить четыре характерные зоны, а именно: ближнюю, в которой снег полностью перешел в состав гидрата и, следовательно, массив состоит только из газа и гидрата; две промежуточных, в которых газ, снег или вода и гидрат находятся в состоянии фазового равновесия; дальнюю, состоящую из газа и снега. С целью выявления особенностей процесса образования гидрата в равновесном режиме в работе [11] проведено математическое моделирование процесса нагнетания холодного газа в пласт снега, насыщенный газом. Получено условие, согласному которому существует минимальный нагрев системы «газ–снег–гидрат», обеспечивающий полный переход снега в гидратное состояние. В работе [12] построена математическая модель процесса образования газогидрата в замкнутом теплоизолированном объеме, в исходном состоянии состоящем из снега и газа. Для кинетики гидратообразования принята схема, которая предполагает диффузию газа через гидратный слой, возникающий между фазами газа и льда (воды), в направлении границы контакта лед (вода)–гидрат. Установлено, что в зависимости от параметров (температуры, давления и снегонасыщенности), характеризующих начальное состояние системы «газ–снег», можно получить в конечном состоянии различную многофазную смесь, состоящую из гидрата и гидратообразующих компонентов (газа, снега и воды). В частности, в работе [13] построена теоретическая модель и получены численные решения для процесса образования газогидрата метана при нагнетании газа в пористый резервуар, частично наполненный водой. Рассмотрен случай, когда интенсивность гидратообразования лимитируется диффузией газа через гидратный слой, возникающий между водой и газом в ядре порового канала. В рамках такой схемы кинетика гидратообразования определяется одним эмпирическим параметром, имеющим размерность коэффициента диффузии ($\text{м}^2/\text{с}$). В работе [14] представлены теоретические основы течения газа в трубе, сопровождающегося отложением гидрата на ее стенках, отбираемого из купола-сепаратора, предназначенного для аварийного сбора углеводородов на дне Мирового океана.

Целью данной работы, в которой продолжают исследования, описанные в [5, 10, 15], является изучение процесса гидратообразования при нагнетании холодного газа в снежный массив, насыщенный тем же газом, в осесимметричной постановке.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть имеется однородный горизонтальный снежный массив неограниченной протяженности, насыщенный в исходном состоянии газом. Полагаем, что кровля и подошва массива непроницаемы. Через скважину радиуса $r = r_{(w)}$ закачивается холодный газ при температуре $T_{(w)} \leq 0^\circ\text{C}$ с постоянным массовым расходом Q_g , отнесенным к длине скважины (текущее давление нагнетания скважины $p_{(w)}$). Причем для исходного состояния системы «лед–газ» начальная температура T_0 находится ниже точки плавления льда ($T_0 < T^{(0)}$, $T^{(0)} = 0^\circ\text{C}$) и давление p_0 меньше равновесного давления фазовых переходов $p_s(T_0)$ системы «лед–газ–гидрат» [10, 15]:

$$T = T_0, \quad p = p_0, \quad p_0 < p_s(T_0) \quad (t = 0, \quad 0 < r < \infty). \quad (1)$$

В зависимости от интенсивности нагнетания газа, определяемой значением массового расхода Q_g , будем считать, что в области фильтрации газа могут возникать следующие характерные зоны: ближняя, содержащая только газ и снег; промежуточная, в которой газ, снег и гидрат находятся в равновесии; дальняя, которая заполнена газом и снегом. В промежуточной зоне происходит образование гидрата. Введем две фронтальные границы: между дальней и промежуточной зонами, где начинается переход

снега в состав гидрата, и между ближней и промежуточной зонами, на которой заканчивается процесс образования гидрата [15].

На рисунке 1 с помощью диаграммы фазового равновесия проиллюстрирован режим нагнетания газа в массив, насыщенный снегом и газом. Граничное условие при $r = r_{(w)}$ отмечено точкой (w). Точки $s_{(n)}$ и $s_{(d)}$ на линии фазового равновесия системы «газ–снег–гидрат» соответствуют ближней и дальней границам промежуточной области. Участок кривой фазового равновесия между точками $s_{(n)}$ и $s_{(d)}$ отвечает промежуточной области, а участки между (w) и $s_{(n)}$, $s_{(d)}$ и (0) — ближней и дальней областям. Состояние снежного массива, насыщенного газом, описывается термодинамическими условиями существования данных фаз в свободном состоянии, то есть условием (1), и отмечено точкой (0). Стрелками показана

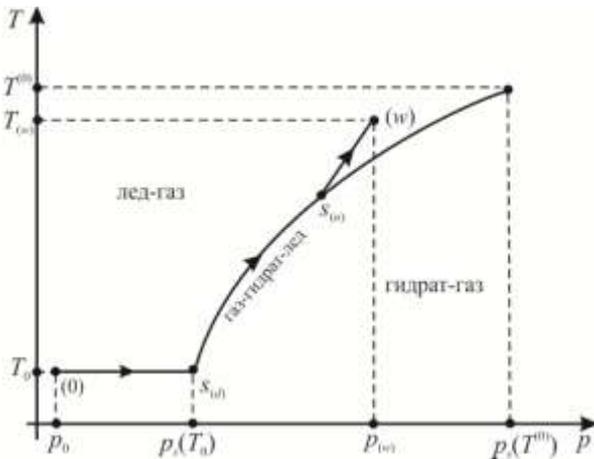


Рис. 1. Характерные зоны на диаграмме фазового равновесия «газ–лед–гидрат» при нагнетании газа в снежный массив

последовательность возникновения зон в области фильтрации газа.

При достижении давлением некоторого значения в массиве $p_s(T_0)$ вследствие нагнетания газа происходит переход снега и газа в гидратное состояние, при этом дальняя зона заканчивается, и образуется промежуточная зона (точка $s_{(d)}$). Здесь имеет место фронтальная граница, на которой начинается процесс образования гидрата. Поскольку газ подается в массив при значениях температуры и давления, при которых образование гидрата отсутствует, то вблизи скважины появляется зона, насыщенная только газом и снегом. Эту зону будем называть ближней; ее начало отмечено точкой $s_{(n)}$.

Снег (ему отвечает индекс i) и гидрат (h) будем считать несжимаемыми, а газ (g) — калорически совершенным:

$$\rho_i, \rho_h = \text{const}, \quad p = \rho_g R_g T. \tag{2}$$

Система основных уравнений, описывающая процессы фильтрации и теплопереноса, сопровождающиеся образованием газогидрата в массиве, включает законы сохранения масс газа, снега и притока тепла, закон Дарси. В осесимметричном представлении они имеют вид [9, 10, 15, 16–18]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_g \rho_g) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r S_g \rho_g v_g) = -\rho_h G \frac{\partial S_h}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_i \rho_i) = -\rho_h (1 - G) \frac{\partial S_h}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) + \rho_g c_g S_g v_g \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \rho_h l_h \frac{\partial S_h}{\partial t}, \tag{3}$$

$$S_g v_g = -\frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial r}, \tag{4}$$

при этом $\rho c = \rho_g S_g c_g + \rho_h S_h c_h + \rho_i S_i c_i$, $\lambda = \lambda_g S_g + \lambda_h S_h + \lambda_i S_i$. Также в (3) обозначено: G — массовая концентрация газа в гидрате; ρ_j и S_j ($j = h, i, g$) — истинные плотности и насыщенности j -й фазы; v_g , k_g , c_g , и μ_g — соответственно скорость, проницаемость, удельная теплоемкость при постоянном объеме и динамическая вязкость газовой фазы; p — давление; T — температура; l_h — удельная теплота образования гидрата, отнесенная к его массе; ρc и λ — удельная теплоемкость в единице объема и коэффициент теплопроводности системы «лед–газ–гидрат».

Фазовые насыщенности должны удовлетворять условию [15]:

$$S_g + S_i + S_h = 1. \tag{4}$$

В зоне, где одновременно находятся снег, газ и гидрат, должно выполняться условие фазового равновесия, то есть температура и текущее значение давления связаны [10, 15, 16, 19, 20]:

$$T_s(p) = T_{(s0)} + T_* \ln(p/p_{(s0)}), \quad (5)$$

где $T_{(s0)}, T_*, p_{(s0)}$ — эмпирические параметры, зависящие как от вида газогидрата, так и от рассматриваемых диапазонов температур и давлений ($T_{(s0)}$ — равновесная температура при $p = p_{(s0)}$) [1].

Как отмечено выше, при нагнетании газа в снежный массив, сопровождаемом гидратообразованием, могут возникнуть три характерных зоны. На границах раздела между этими зонами насыщенности фаз, а также потоки массы и тепла терпят скачки, которые опишем соотношениями, следующими из условий баланса массы и тепла [9, 10, 16–18]:

$$\begin{aligned} [(S_h \rho_h (1 - G) + S_i \rho_i) \dot{r}_{(s)}] &= 0, \\ [\rho_g S_g (v_g - \dot{r}_{(s)}) - \rho_h S_h G \dot{r}_{(s)}] &= 0, \\ \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right] &= [\rho_h l_h S_h \dot{r}_{(s)}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь: $[\psi]$ — скачок параметра ψ на границе $r = r_{(s)}$ между зонами, где $s = n, d$, при этом $s = n$ относится к границе между ближней и промежуточной областями, а $s = d$ — к границе между промежуточной и дальней областями (функции температуры и давления на этих границах будем полагать непрерывными); $\dot{r}_{(s)}$ — скорость движения соответствующей границы.

В результате нагнетания газа вблизи скважины образуется область, насыщенная газом и гидратом. На достаточно больших временах после начала подачи газа, когда размеры этой области значительно превысят радиус скважины ($r_{(s)} \gg r_{(w)}$), можно полагать, что размер области будет оказывать слабое влияние на особенности протекания процесса фильтрации газа. Тогда с учетом уравнения состояния газа (2) и закона Дарси (3₄) условия на границе скважины ($r = r_{(w)}$) примут вид [6, 9]:

$$-\frac{k_g \pi}{\mu_g R_g T_g} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right) = Q_g = \text{const}, \quad T_e = T_{(w)} = \text{const} \quad (r_{(w)} \rightarrow 0, \quad t > 0). \quad (7)$$

3. Решения в ближней, дальней и промежуточной областях

Из уравнений (3₁) и (3₃) с учетом закона Дарси (3₄) и уравнения состояния газа (2), а также равенства насыщенностей газа и снега исходным значениям ($S_g = S_{g0}, S_i = S_{i0}$) получим, соответственно, уравнения пьезопроводности и температуропроводности для ближней зоны ($r_{(w)} < r < r_{(n)}$):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_g}{\mu_g S_{g0}} p \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) = \rho_g c_g \frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{(1)} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (9)$$

В дальней зоне ($r_{(d)} < r < \infty$) происходит фильтрация газа без образования гидрата, и можно полагать процесс изотермическим. В этом случае уравнение фильтрации будет аналогично выражению (8).

Уравнение (3₂) с учетом (4) можно привести к виду

$$\frac{\partial S_g}{\partial t} = \left(\frac{\rho_h (1 - G)}{\rho_i} - 1 \right) \frac{\partial S_h}{\partial t}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в первое уравнение системы (3), используя закон Дарси и уравнение состояния газа (2), приходим к следующему уравнению для изменения гидратонасыщенности в промежуточной области:

$$\frac{\partial S_h}{\partial t} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_g}{\mu_g} \frac{p}{R_g T_s(p)} \frac{\partial p}{\partial r} \right) - S_g \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{R_g T_s(p)} \right) \right) / \tilde{\rho}, \quad (11)$$

где $\tilde{\rho} = \frac{p}{R_g T_s(p)} \left(\frac{\rho_h(1-G)}{\rho_i} - 1 \right) + \rho_h G$.

Из уравнений (3₃), (3₄) и (11) получим:

$$\begin{aligned} \rho c \frac{T_*}{p} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{c_g k_g T_*}{R_g T_s(p) \mu_g} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 &= \frac{\lambda T_*}{r p} \left(\frac{\partial p}{\partial r} + r \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} - \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 \right) \right) + \\ + \frac{\rho_h l_h}{\rho R_g T_s(p)} &\left[\frac{k_g}{\mu_g} r \left(\frac{r(T_s(p) - T_*)}{T_s(p)} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 + p \frac{\partial p}{\partial r} + r p \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right) - S_g \frac{(T_s(p) - T_*)}{T_s(p)} \frac{\partial p}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Отвечающее (12) распределение температуры T связано с давлением p в промежуточной области условием фазового равновесия (5).

Интегрируя (10) и учитывая при этом, что в момент времени $t = 0$ гидрато- и газонасыщенности, соответственно равны $S_h = 0$, $S_g = S_{g0}$, найдем выражение для текущего значения газонасыщенности в промежуточной зоне:

$$S_g = S_{g0} - \left(1 - \frac{\rho_h(1-G)}{\rho_i} \right) S_h.$$

4. Граничные условия между зонами

Согласно условиям (6) на границах между зонами с учетом закона Дарси для ближней границы ($r = r_{(n)}$) имеем:

$$-\frac{k_g}{\mu_g} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{(n)}^- + \frac{k_g}{\mu_g} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{(n)}^+ = \left((S_{g(n)}^- - S_{g(n)}^+) - \frac{\rho_h G}{\rho_{g(n)}} S_{h(n)}^+ \right) \dot{r}_{(n)}. \quad (13)$$

Тогда условие баланса тепла (3₃) запишется для нее как

$$\left(\lambda_{(1)} \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{(n)}^- - \left(\lambda_{(2)} \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{(n)}^+ = -\rho_h l_h S_{h(n)}^+ \dot{r}_{(n)}. \quad (14)$$

Насыщенности фаз при этом связаны соотношениями:

$$S_{g(n)}^- = S_{g0}, \quad S_{g(n)}^+ = 1 - S_{i0} - (1 - \rho_h(1-G)/\rho_i) S_{h(n)}^+. \quad (15)$$

Здесь верхние индексы (-) и (+) соответствуют значению параметров, теряющих разрыв перед границей и после нее.

На дальней границе ($r = r_{(d)}$) полагаем, что гидратонасыщенность не имеет разрыва ($S_{h(d)}^- = S_{h(d)}^+ = 0$), тогда из условий (6) при $r = r_{(d)}$ получим:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{(d)}^- + \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{(d)}^+ = 0. \quad (16)$$

Как отмечено выше, в промежуточной области ($r_{(n)} < r < r_{(d)}$) температура и давление удовлетворяют условию фазового равновесия (5), поэтому производные температуры и давления на границах $r = r_{(n)}$ и $r = r_{(d)}$ должны определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{(n)}^+ &= \frac{T_*}{p_{(n)}} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{(n)}^+, & 1 \\ \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{(d)}^- &= \frac{T_*}{p_{(d)}} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{(d)}^-. & 2 \end{aligned} \quad (17)$$

5. Автомодельные решения

При всех сделанных выше допущениях можно использовать автомодельное решение. Введем автомодельную переменную вида [15, 21]:

$$\xi = r / \left(2\sqrt{\chi_0^{(p)} t}\right), \quad (18)$$

где $\chi_0^{(p)} = k_g p_0 / (s_{g0} \mu_g)$ — коэффициент пьезопроводности. Пренебрегая переменностью температуры в ближней зоне и применяя линеаризацию Лейбензона [5, 10, 15] в уравнениях (8) и (9), в автомодельных переменных их можно привести к виду:

$$\begin{aligned} -\left(\xi + \frac{1}{2\xi}\right) \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} &= \frac{1}{2} \frac{d^2 p_{(1)}^2}{d\xi^2}, & 1 \\ -\xi \frac{dT_{(1)}}{d\xi} &= \frac{Pe_{(1)} \Phi_{(1)}}{p_0^2} \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} \frac{dT_{(1)}}{d\xi} + 2\Phi_{(1)} \left(\frac{1}{\xi} \frac{dT_{(1)}}{d\xi} + \frac{d^2 T_{(1)}}{d\xi^2}\right), & 2 \\ -\left(\xi + \frac{1}{2\xi}\right) \frac{dp_{(3)}^2}{d\xi} &= \frac{1}{2} \frac{d^2 p_{(3)}^2}{d\xi^2}, & 3 \end{aligned} \quad (19)$$

где $\Phi_{(1)} = \chi^{(r)} / 4\chi_0^{(p)}$, $Pe_{(1)} = \rho_{g0} c_g k_g p_0 / (\lambda_{(1)} \mu_g)$ — число Пекле, $\chi^{(r)} = \lambda_{(1)} / (\rho c)$ — коэффициент температуропроводности. Здесь и в дальнейшем нижние индексы (1), (2) и (3) относятся, соответственно, к ближней, промежуточной и дальней зонам.

Запишем выражения для распределений давления и температуры:

– ближняя зона:

$$\begin{aligned} p_{(1)}^2 &= p_{(n)}^2 + \frac{Q_g \mu_g R_g T_g}{k_g \pi} \int_{\xi}^{\xi_{(n)}} \frac{1}{\xi} \exp(-\xi^2) d\xi, \\ T_{(1)} &= T_{(n)} + \frac{(T_g - T_{(n)}) \int_{\xi}^{\xi_{(n)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\Phi_{(1)}} - \frac{Pe_{(1)}}{2p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi}{\int_0^{\xi_{(n)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\Phi_{(1)}} - \frac{Pe_{(1)}}{2p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi} \end{aligned} \quad (20)$$

(решение (20) получается путем интегрирования уравнений (19₁) и (19₂) и учета граничных условий (7));

– дальняя зона

$$p_{(3)}^2 = p_0^2 + \frac{(p_{(d)}^2 - p_0^2) \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp(-\xi^2) d\xi}{\int_{\xi_{(d)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp(-\xi^2) d\xi}, \quad (21)$$

при выводе выражения (21) учтены начальные условия (1);

– промежуточная зона

$$\frac{d^2 p_{(2)}}{d\xi^2} = \frac{B \frac{dp_{(2)}}{d\xi} + C \left(\frac{dp_{(2)}}{d\xi}\right)^2}{A}, \quad (22)$$

$$\frac{dS_{h(2)}}{d\xi} = -\frac{1}{\tilde{\rho}\xi R_g T_s(p_{(2)})} \left[\frac{k_g}{2\mu_g \chi_0^{(p)}} \left(p_{(2)} \frac{d^2 p_{(2)}}{d\xi^2} + \left(1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) \left(\frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right)^2 + \frac{p_{(2)}}{\xi} \frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right) + S_g \xi \left(1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) \left(\frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right) \right], \quad (23)$$

где $A = \frac{1}{\chi_0^{(p)}} \left(\lambda + \frac{\rho_h I_h p_{(2)}^2 k_g}{\tilde{\rho} R_g T_s(p_{(2)}) T_* \mu_g} \right)$, $B = -2\rho c \xi - \frac{\lambda}{\xi \chi_0^{(p)}} - \frac{\rho_h I_h p_{(2)}}{\tilde{\rho} R_g T_s(p_{(2)}) T_*} \left(\frac{k_g p_{(2)}}{\mu_g \xi \chi_0^{(p)}} + \frac{2S_g (T_s(p_{(2)}) - T_*) \xi}{T_s(p_{(2)})} \right)$,

$$C = \frac{1}{\chi_0^{(p)}} \left(\frac{\lambda}{p_{(2)}} - \frac{p_{(2)} k_g c_g}{R_g \mu_g T_s(p_{(2)})} - \frac{\rho_h I_h p_{(2)} k_g (T_s(p_{(2)}) - T_*)}{\tilde{\rho} R_g T_s^2(p_{(2)}) T_* \mu_g} \right).$$

В автомодельных координатах условия (13) и (14) для ближней границы ($\xi = \xi_{(n)}$) примут вид:

$$-\left(\frac{dp}{d\xi} \right)_{(n)}^- + \left(\frac{dp}{d\xi} \right)_{(n)}^+ = \frac{2\chi_0^{(p)} \mu_g}{k_g} \left((S_{g(n)}^- - S_{g(n)}^+) - \frac{\rho_h G}{\rho_{g(n)}} S_{h(n)}^+ \right) \xi_{(n)}, \quad (24)$$

$$\lambda_{(1)} \left(\frac{dT}{d\xi} \right)_{(n)}^- - \lambda_{(2)} \left(\frac{dT}{d\xi} \right)_{(n)}^+ = -2\rho_h I_h \chi_0^{(p)} S_{h(n)}^+ \xi_{(n)}, \quad (25)$$

а первое соотношение из (17) станет следующим:

$$\left(\frac{dT}{d\xi} \right)_{(n)}^+ = \frac{T_*}{p_{(n)}} \left(\frac{dp}{d\xi} \right)_{(n)}^+. \quad (26)$$

Используя аналитические решения (20) и равенство (26), условия (24) и (25) можно привести к виду:

$$\frac{Q_g \mu_g R_g T_g}{2 p_{(n)} k_g \pi \xi_{(n)}} \exp(-\xi_{(n)}^2) + q_{(n)} = \frac{2\chi_0^{(p)} \mu_g \xi_{(n)}}{k_g} \left((S_{g(n)}^- - S_{g(n)}^+) - \frac{\rho_h G}{\rho_{g(n)}} S_{h(n)}^+ \right), \quad (27)$$

$$\frac{\lambda_{(1)} (T_{(n)} - T_g) \frac{1}{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi_{(n)}^2}{4\varphi_{(1)}} - \frac{Pe_{(1)} p_{(n)}^2}{2p_0^2}\right)}{\int_0^{\xi_{(n)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\varphi_{(1)}} - \frac{Pe_{(1)} p_{(1)}^2}{2p_0^2}\right) d\xi} - \lambda_{(2)} \frac{T_* q_{(n)}}{p_{(n)}} = -2\rho_h I_h \chi_0^{(p)} S_{h(n)}^+ \xi_{(n)}, \quad (28)$$

где $q_{(n)} = \left(\frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right)_{\xi_{(n)}}$.

Выражая из условия фазового равновесия (5) температуру $T_{(n)}$ через давление $p_{(n)}$ и подставляя в условие (28), получим на границе $\xi = \xi_{(n)}$ следующие соотношения, связывающие неизвестный параметр $q_{(n)}$, координату этой границы $\xi_{(n)}$ и давление $p_{(n)}$ на ней:

$$\Psi_1(\xi_{(n)}, p_{(n)}, q_{(n)}) = \frac{Q_g \mu_g R_g T_g}{2 p_{(n)} k_g \pi \xi_{(n)}} \exp(-\xi_{(n)}^2) + q_{(n)} - \frac{2\chi_0^{(p)} \mu_g \xi_{(n)}}{k_g} \left((S_{g(n)}^- - S_{g(n)}^+) - \frac{\rho_h G}{\rho_{g(n)}} S_{h(n)}^+ \right), \quad (29)$$

$$\Psi_2(\xi_{(n)}, p_{(n)}, q_{(n)}) = \frac{\lambda_{(1)} (T_{(n)} - T_g) \frac{1}{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi_{(n)}^2}{4\varphi_{(1)}} - \frac{Pe_{(1)} p_{(n)}^2}{2p_0^2}\right)}{\int_0^{\xi_{(n)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\varphi_{(1)}} - \frac{Pe_{(1)} p_{(1)}^2}{2p_0^2}\right) d\xi} - \lambda_{(2)} \frac{T_*}{p_{(n)}} q_{(n)} + 2\rho_h I_h \chi_0^{(p)} S_{h(n)}^+ \xi_{(n)}. \quad (30)$$

На границе $\xi = \xi_{(d)}$ условие (16) запишется в виде:

$$\left(\frac{dp}{d\xi} \right)_{(d)}^- = \left(\frac{dp}{d\xi} \right)_{(d)}^+.$$

Для промежуточной области ($\xi_{(n)} \leq \xi \leq \xi_{(d)}$) уравнения, представляющие собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений (22) и (23), можно записать [15] как

$$\begin{aligned} \frac{dp_{(2)}}{d\xi} &= q, \\ \frac{dq}{d\xi} &= \frac{Bq + Cq^2}{A}, \\ \frac{dS_{h(2)}}{d\xi} &= -\frac{1}{\tilde{\rho}\xi R_g T_s(p_{(2)})} \left[\frac{k_g}{2\mu_g \chi_0^{(p)}} \left(p_{(2)} \frac{dq}{d\xi} + \left(1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) q^2 + \frac{p_{(2)}}{\xi} q \right) + S_g \xi \left(1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) q \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь неизвестными величинами являются функция $q_{(n)} = (dp_{(2)}/d\xi)_{\xi_{(n)}}$, координаты границ $\xi_{(n)}$ и $\xi_{(d)}$, а также давление на этих границах — $p_{(n)}$ и $p_{(d)}$.

Расчет по системе обыкновенных дифференциальных уравнений (31) начинается от правой границы $\xi = \xi_{(d)}$, координата которой выбирается произвольным образом, и направлен в сторону левой границы $\xi = \xi_{(n)}$ (с отрицательным шагом) [10, 15]. За начальные данные (при $\xi = \xi_{(d)}$) принимаются величины:

$$p_{(d)} = p_s(T_0), \quad q_{(d)} = \left(\frac{dp}{d\xi} \right)_{(d)}^+, \quad S_h = 0. \quad (32)$$

При этом значение $q_{(d)}$ определяется исходя из равенства (32) и решения (21) для третьей зоны согласно формуле:

$$q_{(d)} = (p_0^2 - p_{(d)}^2) \frac{\exp(-\xi_{(d)}^2)}{2 p_{(d)} \xi_{(d)} \int_{\xi_{(d)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp(-\xi^2) d\xi}.$$

Численное решение задачи было реализовано методом стрельбы [10, 15]. В процессе вычислений в (27) и (28) вместо $\xi_{(n)}$, $p_{(n)}$ и $q_{(n)}$ подставлялись текущие значения ξ , p и q , полученные интегрированием системы (31). Каждый вариант счета прекращался при достижении параметром ψ_1 нулевого значения: $\psi_1(\xi_{(n)}, p_{(n)}, q_{(n)}) = 0$. «Пристрелка» по значению $\xi_{(d)}$ продолжалась до выполнения с некоторой заданной точностью условия $\psi_2(\xi_{(n)}, p_{(n)}, q_{(n)}) = 0$, и соответствующие значения $\xi_{(d)}$, $\xi_{(n)}$, $p_{(d)}$ и $p_{(n)}$ принимались за искомые величины.

6. Результаты расчетов

Для параметров, определяющих свойства снега, газа и гидрата, были приняты значения: $\rho_i = 900$ кг/м³, $\rho_h = 910$ кг/м³, $c_g = 1650$ Дж/(кг·К), $c_i = 2090$ Дж/(кг·К), $c_h = 2200$ Дж/(кг·К), $\lambda_g = 0,03$ Вт/(м·К), $\lambda_i = 2$ Вт/(м·К), $\lambda_h = 0,5$ Вт/(м·К), $l_h = 1,45 \cdot 10^5$ Дж/кг, $G = 0,12$, $\mu_g = 9,5 \cdot 10^{-6}$ Па·с, $k_g = 10^{-15}$ м², $R_g = 520$ Дж/(кг·К), $T_{(s0)} = 263$ К, $p_{(s0)} = 1,86$ МПа, $T_* = 30$ К [1, 2, 15, 16].

Исходные значения давления, температуры снежного массива и нагнетаемого с постоянным массовым расходом $Q_g = 15 \cdot 10^{-4}$ кг/(м·с) газа, соответственно, равнялись $p_0 = 0,1$ МПа, $T_0 = 225$ К и $T_{(w)} = 270$ К; начальная снегонасыщенность составляла $S_{i0} = 0,3$.

Распределения давления, температуры и гидратонасыщенности в массиве при различных массовых расходах газа Q_g иллюстрирует рисунок 2а. Видно, что увеличение массового расхода закачиваемого газа

влечет за собой наращивание давления нагнетания газа, в результате зона образования гидрата становится протяженнее, и повышается величина гидратонасыщенности в массиве на ближней границе. При этом ближняя зона, состоящая из снега и газа, сужается.

На рисунке 2б представлены те же распределения, что и на рисунке 2а, но при различных начальных значениях снегонасыщенности массива s_{i0} . Установлено, что с ее ростом протяженности объемной зоны образования гидрата и ближней зоны, где не происходит фазовых переходов, уменьшаются, поскольку при заданном массовом расходе газа увеличивается его доля, необходимая для образования гидрата. Это в свою очередь приводит к более резкому снижению давления и, согласно выражению (5), уменьшению температуры в массиве.

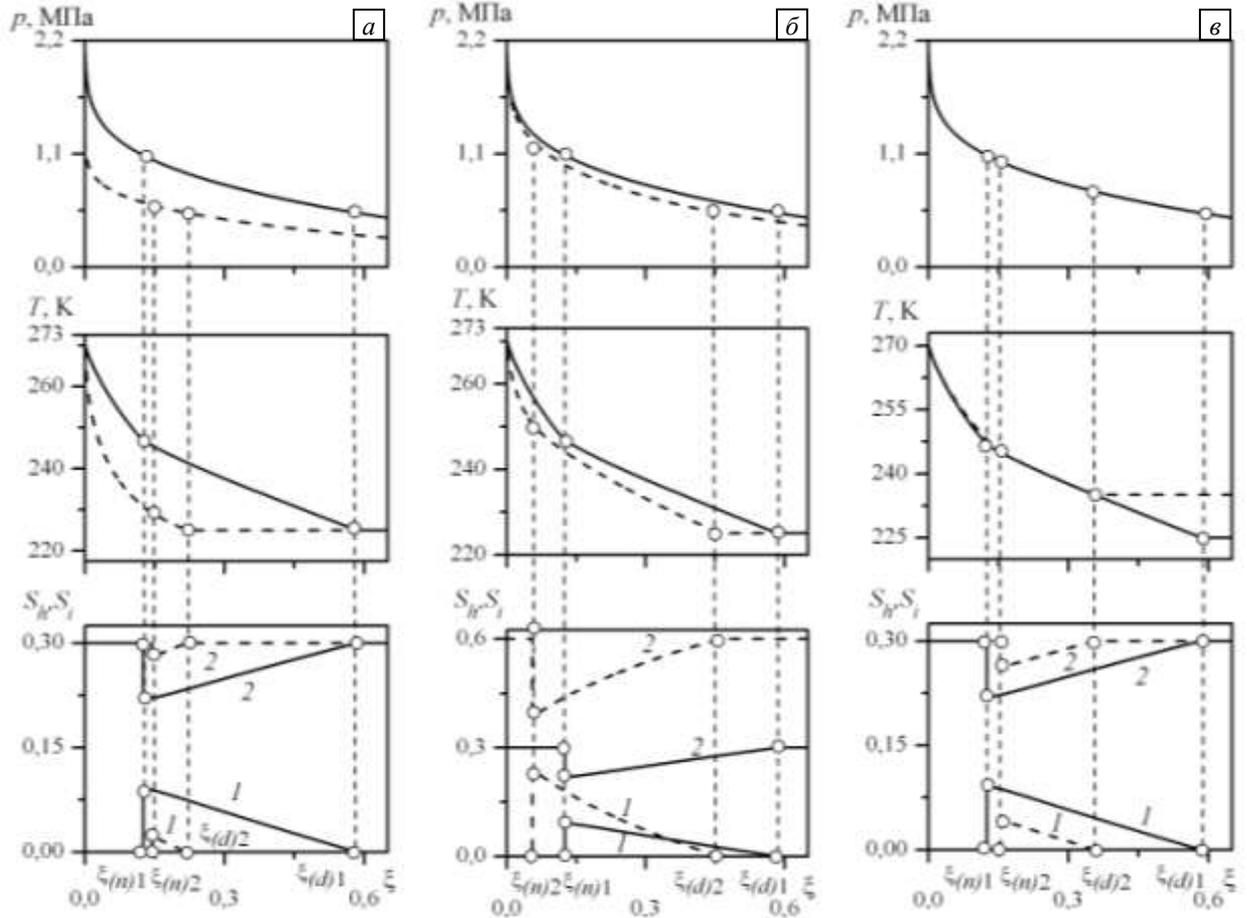


Рис. 2. Распределение давления, температуры и насыщенностей гидрата (индекс 1) и снега (индекс 2) в массиве при различных массовых расходах газа q_g , кг/(м·с) (а): $15 \cdot 10^{-4}$ (сплошная линия), $5 \cdot 10^{-4}$ (штриховая линия); при различных начальных значениях снегонасыщенности s_{i0} (б): 0,3 (сплошная линия), 0,6 (штриховая линия), и температуры t_0 , к (в) массива: 225 (сплошная линия), 235 (штриховая линия)

Исследовано влияние значения исходной температуры массива t_0 (Рис. 2в) на характер распределений, показанных на рисунке 2б. Видно, что в случае массивов с низкой температурой при заданном массовом расходе нагнетаемого газа протяженность зоны, в которой фазы снега и газа переходят в гидратное состояние, увеличивается, при этом гидратонасыщенность на ближней границе растёт.

7. Выводы

Для задачи синтеза газогидрата при нагнетании газа в снежный массив, насыщенный тем же газом, построены автомоделные решения при осесимметричной постановке. Представлены соотношения, описывающие распределения основных параметров в массиве. Показано, что с увеличением массового расхода нагнетаемого газа и уменьшением исходной температуры снежного массива протяженность объемной зоны образования гидрата и доля гидрата на границе между ближней и промежуточной зонами в области фильтрации увеличиваются. Установлено также, что с увеличением значения исходной снегонасыщенности протяженность зоны фазовых переходов и ближней области, состоящей из снега и газа, уменьшается.

Литература

1. *Истомин В.А., Якушев В.С.* Газовые гидраты в природных условиях. М.: Недра, 1992. 236 с.
2. *Макогон Ю.Ф.* Гидраты природных газов. М.: Недра, 1974. 208 с.
3. *Бондарев Э.А., Рожин И.И., Попов В.В., Аргунова К.К.* Оценка возможности подземного хранения гидратов природного газа в зоне многолетней мерзлоты // Криосфера Земли. 2015. Т. XIX, № 4. С. 64-74.
4. *Nakai S.* Development of natural gas hydrate (NGH) supply chain // Proc. of the 25th World Gas Conf., Kuala Lumpur, Malaysia, June 4–8. 2012. P. 367-375.
5. *Хасанов М.К.* Исследование режимов образования газогидратов в пористой среде, частично насыщенной льдом // Т и А. 2015. Т. 22, № 2. С. 255-266.
6. *Гималтдинов И.К., Хасанов М.К.* Математическая модель образования газогидрата при инекации в пласт, частично насыщенный льдом // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 1. С. 80-90.
7. *Шагапов В.Ш., Нурисламов О.Р.* Некоторые особенности синтеза газогидратов нагнетанием газа во влажную пористую среду // ТОХТ. 2010. Т. 44, № 3. С. 275-285.
8. *Шагапов В.Ш., Хасанов М.К., Мусакаев Н.Г.* Образование газогидрата в пористом резервуаре, частично насыщенном водой, при инекации холодного газа // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 3. С. 462-472.
9. *Шагапов В.Ш., Мусакаев Н.Г., Хасанов М.К.* Нагнетание газа в пористый резервуар, насыщенный газом и водой // ТиА. 2005. Т. 12, № 4. С. 645-656.
10. *Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С.* О нагнетании гидратообразующего газа в снежный массив, насыщенный тем же газом, при переходе через точку плавления льда // ТиА. 2018. Т. 25, № 1. С. 89-104.
11. *Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Русинов А.А.* Математическое моделирование процесса образования гидрата в пласте насыщенного снегом при нагнетании холодного газа // Вычисл. мех. сплош. сред. 2016. Т. 9, № 2. С. 173-181 [DOI](#)
12. *Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Белова С.В.* К теории процесса образования газогидрата в замкнутом теплоизолированном объеме, опрессованном метаном // ИФЖ. 2017. Т. 90, № 5. С. 1208-1222.
13. *Шагапов В.Ш., Рафикова Г.Р., Хасанов М.К.* К теории образования газогидрата в частично водонасыщенной пористой среде при нагнетании метана // Теплофизика высоких температур. 2016. Т. 54, № 6. С. 911-920.
14. *Уразов Р.Р., Чиглинцев И.А., Насыров А.А.* Образование склеротических отложений гидрата в трубе для отбора газа из купола-сепаратора // ИФЖ. 2017. Т. 90, № 5. С. 1223-1231.
15. *Чиглинцева А.С.* Автомодельное решение задачи образования гидрата в снежном массиве // Вычисл. мех. сплош. сред. 2017. Т. 10, № 2. С. 212-224. [DOI](#)
16. *Шагапов В.Ш., Мусакаев Н.Г.* Динамика образования и разложения гидратов в системах добычи, транспортировки и хранения газа. М.: Наука, 2016. 238 с.
17. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред: в 2 ч. М.: Наука, 1987. Ч. 1, 464 с., Ч. 2, 360 с.
18. *Цыпкин Г.Г.* Течения с фазовыми переходами в пористых средах. М.: Физматлит, 2009. 232 с.
19. *Чиглинцева А.С., Шагапов В.Ш.* О нагнетании гидратообразующего газа в пласт снега, насыщенный тем же газом // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2017. Т. 12. № 2. С. 219-226. [DOI](#)
20. *Хасанов М.К., Мусакаев Н.Г., Гималтдинов И.К.* Особенности разложения газогидратов с образованием льда в пористой среде // ИФЖ. 2015. Т. 88, № 5. С. 1022-1030.
21. *Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Запихаина М.Н.* Моделирование процесса образования льда при инекации воды в пористую среду, насыщенную льдом и газом // Вестник Башкирск. ун-та. 2013. Т. 18. № 1. С. 22-26.

References

1. Istomin V.A., Yakushev V.S. *Gazovyye gidraty v prirodnykh usloviyakh*. M.: Nedra, 1992. 236 p.
2. Makogon Yu.F. *Gidraty prirodnykh gazov*. M.: Nedra, 1974. 208 p.
3. Bondarev E.A., Rozhin I.I., Popov V.V., Argunova K.K. Assessment of possibility of natural gas hydrates underground storage in permafrost regions. *Earth's cryosphere*, 2015, vol. XIX, no. 4, pp. 58-67.
4. Nakai S. Development of natural gas hydrate (NGH) supply chain. *Proc. of the 25th World Gas Conf.*, Kuala Lumpur, Malaysia, June 4–8. 2012. P. 367-375.
5. Khasanov M.K. Investigation of regimes of gas hydrate formation in a porous medium, partially saturated with ice. *T. and A.*, 2015, vol. 22, no. 2, pp. 245–255. [DOI](#)
6. Gimaldinov I.K., Khasanov M.K. Mathematical model of the formation of a gas hydrate on the injection of gas into a stratum partially saturated with ice. *J. Appl. Math. Mech.*, 2016, vol. 80, no. 1, pp. 57-64. [DOI](#)
7. Shagapov V.SH., Nurislamov O.R. Some features of the synthesis of gas hydrates by gas injection into a moist porous medium. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2010, vol. 44, no. 3, pp. 260-271. [DOI](#)
8. Shagapov V.SH., Khasanov M.K., Musakaev N.G. Formation of a gas hydrate due to injection of a cold gas into a porous reservoir partly saturated by water. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 3, pp. 462-472. [DOI](#)
9. Shagapov V.SH., Musakaev N.G., Hasanov M.K. Nagnetaniye gaza v poristy rezervuar, nasyshchenny gazom i vodoy // [The injection of gas into a porous reservoir saturated with gas and water]. *T. and A.*, 2005, vol. 12, no. 4, pp. 645–656.
10. Shagapov V.SH., Chiglintseva A.S. On injection of hydrate-forming gas into a gas-saturated snowy agglomerate while transition through the ice melting point. *T. and A.*, 2018, vol. 25, no. 1, pp. 85-99. [DOI](#)
11. Shagapov V.SH., Chiglintseva A.S., Rusinov A.A. Mathematical modeling of hydrate formation in a reservoir saturated with snow by cold gas injection. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 2, pp. 173-181. [DOI](#)
12. Shagapov V.SH., Chiglintseva A.S., Belova S.V. On the theory of formation of a gas hydrate in a heat-insulated space compacted with methane. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2017, vol. 90, no. 5, pp. 1147–1161. [DOI](#)

13. Shagapov V.SH., Rafikova G.R., Khasanov M.K. On the theory of formation of gas hydrate in partially water-saturated porous medium when injecting methane. *High. Temp.*, 2016, vol. 54, no. 6, pp. 858-866. [DOI](#)
14. Urazov R.R., Chiglinstev I.A., Nasyrov A.A. Formation of sclerotic hydrate deposits in a pipe for extraction of a gas from a dome separator. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2017, vol. 90, no. 5, pp. 1162-1169. [DOI](#)
15. Chiglintseva A.S. Self-similar solution of the problem of hydrate formation in snow massifs. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 212-224. [DOI](#)
16. Shagapov V.SH., Musakaev N.G. *Dinamika obrazovaniya i razlozheniya gidratov v sistemakh dobychi, transportirovki i khraneniya gaza* [Dynamics of education and decomposition of hydrates in systems of production, transportation and storage of gas]. M.: Nauka, 2016. 238 p.
17. Nigmatulin R.I. *Dynamics of multiphase media*. N.Y., *Hemisphere*, 1990, vol. 1, 532 p., vol 2, 388 p.
18. Tsyppin G.G. *Techeniya s fazovymi perekhodami v poristykh sredakh* [Flows with phase transitions in porous media]. M.: Fizmatlit, 2009. 232 p.
19. Chiglintseva A.S., Shagapov V.Sh. O nagnetanii gidratoobrazuyushchego gaza v plast snega, nasyshchenny tem zhe gazom [On the injection of hydrate-forming gas into a layer of snow saturated with the same gas]. *Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova UNTs RAN*, 2017, vol. 12, no. 2, pp. 219-226. [DOI](#)
20. Khasanov M.K., Gimaltdinov I.K., Musakaev N.G. Features of the decomposition of gas hydrates with the formation of ice in a porous medium. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2015, vol. 88, no. 5, pp. 1052-1061. [DOI](#)
21. Shagapov V.Sh., Galimzyanov M.N., Zapivahina M.N. Modelirovaniye protsessa obrazovaniya l'da pri inzhektionsii vody v poristuyu sredu, nasyshchennuyu l'dom i gazom [Modeling the process of ice formation when water is injected into a porous medium saturated with ice and gas]. *Vestnik Bashkirskogo universiteta – Bulletin of Bashkir University*, 2013, vol. 18, no. 1, pp. 22-26.

Поступила в редакцию 09.07.2018; опубликована в электронном виде 22.10.2018