

DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.2.15

УДК 532.5.013.4.536.25+519.

## БИФУРКАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В НАКЛОНЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ

Р.В. Сагитов<sup>1</sup>, А.Н. Шарифулин<sup>2</sup><sup>1</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия<sup>2</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

Исследуются влияние числа Грасгофа  $Gr$  и угла наклона  $\alpha$  к горизонтальной плоскости прямоугольной полости на структуру и устойчивость стационарных конвективных течений в ней при условии свободных границ. Между двумя противоположными изотермическими сторонами, горизонтальными при  $\alpha = 0^\circ$ , поддерживается постоянный перепад температуры, а остальные стороны теплоизолированы. Течение жидкости полагается плоским и описывается уравнениями тепловой конвекции в приближении Буссинеска. В случае подогрева строго снизу получены явные аналитические выражения для инкрементов и критических чисел Грасгофа при малых возмущениях механического равновесия. Путем решения многомерным методом Ньютона системы алгебраических уравнений дискретного аналога исходных уравнений тепловой конвекции на прямоугольной сетке определяются стационарные режимы. Для изучения устойчивости установленных стационарных режимов относительно малых возмущений находятся значения параметров, при которых якобиан системы равен нулю. Выявлено, что для угла  $\alpha = 0^\circ$  при увеличении числа Грасгофа от режима, отвечающего состоянию механического равновесия, в результате трех следующих друг за другом вилочных бифуркаций ответвляются два устойчивых одноваловых и по паре неустойчивых двух- и трехваловых стационарных режимов. Каждый двухваловый режим в результате вилочной бифуркации распадается в свою очередь на два неустойчивых и один устойчивый режимы. При всех указанных вилочных бифуркациях, кроме второй бифуркации равновесия, течения являются структурно неустойчивыми: при малом изменении угла наклона полости в них зарождаются новые режимы. Прослежена эволюция структуры течений при изменении угла наклона полости и числа Грасгофа. Выделены области на плоскости параметров  $(\alpha, Gr)$ , в которых для каждого набора параметров существуют один, три, пять, семь, девять или одиннадцать стационарных режимов.

*Ключевые слова:* бифуркации, неустойчивость, наклонная полость, стационарная конвекция

## BIFURCATIONS AND STABILITY OF STEADY REGIMES OF CONVECTIVE FLOWS IN AN INCLINED RECTANGULAR CAVITY

R.V. Sagitov<sup>1</sup> and A.N. Sharifulin<sup>2</sup><sup>1</sup>Perm State University, Perm, Russian Federation<sup>2</sup>Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

The effects of the Grashof number  $Gr$  and the angle of inclination  $\alpha$  of the cavity on the structure and stability of steady convective flows in a rectangle with free boundaries are studied. Between the two opposite isothermal sides, horizontal at  $\alpha = 0^\circ$ , the temperature difference is maintained, and the other sides are thermally insulated. The flow of the fluid is assumed to be flat and described by the equations of thermal convection in the Boussinesq approximation. In the case of heating, explicit analytical expressions for increments and critical Grashof numbers of small perturbations of mechanical equilibrium are obtained strictly from below. By solving the multidimensional Newton method of a system of algebraic equations obtained by discretizing the equations of thermal convection on a rectangular grid, stationary regimes are determined. To investigate the stationary modes found for stability with respect to small perturbations, we find the values of the parameters for which the Jacobian of the system for the amplitudes of small perturbations is zero. For  $\alpha = 0^\circ$  increasing the Grashof number from the state of mechanical equilibrium, as a result of three successive fork bifurcations, two stable single-shaft bunches and two unstable two- and three-shaft stationary regimes branch off. Each two-shaft mode as a result of a fork bifurcation breaks up into two unstable modes and one stable mode. All these fork bifurcations, except for the second equilibrium bifurcation, are structurally unstable: they decay with a small change in the angle of inclination of the cavity. The evolution of the flow structure is traced as the angle of inclination of the rectangle and Grashof number change. Areas are selected in the parameter plane  $(\alpha, Gr)$ , where one, three, five, seven, nine or eleven stationary modes exist for each set of parameters.

*Key words:* bifurcation, instability, inclined cavity, steady convection

### 1. Введение

Изучение тепловой конвекции жидкости в замкнутых прямоугольных полостях представляет интерес в связи с тем, что подобные емкости являются элементами большого количества технических устройств, и информация о течениях в этих полостях дает возможность выявить и проанализировать различные режимы работы устройств. Также прямоугольные полости широко используются при лабораторном и численном моделировании, позволяющем глубже понять физические механизмы океанических и атмосферных течений [1]. Исследование бифуркаций и устойчивости стационарных течений в таких полостях представляет не только фундаментальный теоретический интерес, но и позволяет предотвратить на практике аварии в технологических процессах и предсказать природные катастрофы, вызванные сменой режимов течений.

В большинстве работ конвекция в замкнутой полости рассматривается в случае, когда в неподвижной жидкости постоянный градиент температуры ориентирован вертикально (выполняются равновесные условия подогрева). При этом конвекция возникает кризисным образом вследствие потери жидкостью состояния устойчивого равновесия [2–21] — при строгом подогреве снизу это происходит в результате вилочной бифуркации. В приложениях горизонтальная ориентация является скорее исключением, чем правилом, важно учитывать режимы конвекции и их бифуркации при отклонениях от равновесных условий подогрева. Исследование влияния наклона на конвекцию в замкнутой полости проводилось в [4–21]. В этих работах показано, что любое отклонение градиента температуры от вертикальности приводит к разрушению вилочной бифуркации.

В работах [2, 30] изучалось развитие тепловой конвекции в полости квадратного сечения с идеально теплопроводными границами при подогреве снизу. Обнаружено, что надкритическое движение жидкости после потери ею устойчивости (при этом критическое число Релея  $\sim 5100$ ) приобретает форму единичного вихря. Вблизи порога возникновения конвекции квадраты функции тока и конвективного теплового потока прямо пропорциональны разности между заданным числом Релея и критическим. В интервале чисел Релея от  $14 \cdot 10^3$  до  $28 \cdot 10^3$  возможно метастабильное состояние в виде двухвихревой структуры («кошачьи глазки»), которая со временем разрушается, переходя в одновихревую. При превышении числом Релея значения  $64 \cdot 10^3$  одновихревой стационарный режим сменяется регулярными колебаниями.

Развитая тепловая конвекция в полости кругового сечения с идеально теплопроводными границами при подогреве снизу изучалась Чернатынским В.И. [5]. Нелинейные расчеты показали, что надкритическая конвекция способствует формированию двух симметричных застойных зон с медленной возвратной циркуляцией.

Тепловая конвекция в горизонтальном цилиндре квадратного сечения при подогреве сбоку была предметом многих исследований. В работах [15–20] показано, что в случае малых чисел Грасгофа течение имеет вид единичного вихря, его интенсивность пропорциональна числу Грасгофа, а конвективная добавка к тепловому потоку — числу Релея. Деформация одновихревого течения с ростом числа Грасгофа приводит к образованию восходящего и нисходящего конвективных пограничных слоев, а в центре полости — устойчиво стратифицированного малоподвижного ядра. Дальнейшее увеличение числа Грасгофа вызывает возникновение регулярных и нерегулярных колебательных режимов конвекции [20]. Конвекция при подогреве сбоку в цилиндре кругового сечения рассмотрена в упомянутой выше работе [5]. В условиях кругового цилиндра также формируются конвективный пограничный слой и устойчиво стратифицированное почти неподвижное ядро.

Конвективная устойчивость в полости произвольной формы при наличии малого угла отклонения градиента температуры, то есть направления подогрева, от вертикали —  $\alpha$ , впервые изучалась аналитически в работе [4]. Для получения стационарных решений использовался метод малого параметра. Построены зависимости амплитуды конвективного движения от числа Релея. Показано, что в надкритической области в окрестности первого критического числа Релея существуют три решения, одно из которых всегда неустойчиво.

В работе [5] численно (методом конечных разностей) решалась задача конвекции в горизонтальном цилиндре круглого сечения при гармоническом распределении температуры на стенке и при изменении ориентации нагрева по отношению к направлению действия силы тяжести. Рассмотрено три ситуации, связанные с взаимной ориентацией градиента температуры и направления вектора ускорения свободного падения и описываемые углом  $\alpha$  между ними: подогрев снизу ( $\alpha = 0^\circ$ ), подогрев сбоку ( $\alpha = 90^\circ$ ) и произвольная ориентация градиента температуры относительно вектора ускорения свободного падения ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ). В случае подогрева снизу определено критическое значение числа Релея, оно оказалось равным  $Ra_1 = 398 \pm 2$ , что хорошо согласуется с результатом линейной теории [30]. Построены линии тока и изотермы для развитого надкритического течения, которое с ростом надкритичности становится трехвихревым. Расчеты для подогрева строго сбоку показали, что развитые режимы конвекции имеют в этом случае преимущественно одновихревой характер. В центре возникает устойчиво стратифицированная застойная зона. Произвольные направления подогрева рассмотрены лишь для развитого режима, соответствующего восьмикратной надкритичности. Отклонение от направления подогрева снизу приводит к быстрому переходу в одновихревую структуру. Получена зависимость интенсивности течения (находится по функции тока) от угла  $\alpha$ . Интенсивность течения была наибольшей при  $\alpha \approx 30^\circ$ , максимальное значение числа Нуссельта достигалось при  $\alpha \approx 90^\circ$ .

В [6] исследовалось влияние на структуру течения произвольного поворота горизонтального цилиндра квадратного сечения с теплоизолированными вертикальными границами и подогреваемого снизу. Поворот на произвольный угол  $\theta$  осуществляется вокруг горизонтальной оси, совпадающей с осью цилиндра. Показано, что поверхность стационарных состояний обладает особенностью типа сборки. Ее сечения при постоянных углах наклона, близких к  $\theta = 0^\circ$ , представлены в виде диаграмм состояний  $U(Ra)$ , имеющих две ветви (здесь  $U$  — величина, характеризующая интенсивность и направление закрутки одновихревого

движения жидкости,  $Ra$  — число Релея). Одна из ветвей, выходящая из нуля, соответствует нормальному режиму конвекции (то есть одновихревому течению, при котором жидкость поднимается вдоль нагретой границы), а другая, которой отвечают два решения, возникает при надкритических значениях числа Релея. Одно из этих состояний всегда неустойчиво, а второе устойчиво и отличается от нормального противоположной закруткой и названо авторами аномальным. Путем численных расчетов установлена область существования аномального течения на плоскости  $(Ra, \theta)$ . Отметим, что аналогичные бифуркационные диаграммы были построены десятью годами ранее в работе [4]. В [6] новым результатом является то, что впервые определена бифуркационная кривая, разделяющая на плоскости параметров области с различным количеством стационарных режимов. Она монотонно стремится к значению угла наклона  $\alpha = 22^\circ$ . Расчеты, представленные в более поздней работе [14], показали, что на бифуркационной кривой имеется экстремум.

В [8] для числа Прандтля, равного 7, получены бифуркационные диаграммы устойчивых и неустойчивых стационарных плоских состояний для случая прямоугольной полости с идеально теплопроводными стенками. Изучено влияние слабых наклонов полости (до  $6,5^\circ$ ) на вид бифуркационных диаграмм. Выявлено, что увеличение отклонения градиента температуры на границах от вертикали приводит к переходу от многоячейстой конвекции к одновихревой.

Устойчивость нормального и аномального течений по отношению к трехмерным возмущениям при угле наклона  $0,01^\circ$  и фиксированном значении числа Прандтля ( $Pr = 7$ ), то есть для постановки, рассмотренной в [8], исследовалась в [13]. Показано, что аномальное течение всегда неустойчиво, нормальное течение становится неустойчивым при превышении числом Релея критического значения.

В работе [7] для изучения бифуркации стационарных режимов тепловой конвекции в замкнутой полости, возникающих при изменении числа Релея и наклона полости, предложена модельная система трёх обыкновенных дифференциальных уравнений. При строго вертикальном подогреве эта система совпадает с системой Лоренца [25]. Установлено, что бифуркации стационарных режимов, как и в работе [6], порождаются особенностью отображения типа сборки Уитни [26]. Отображение поверхности стационарных решений на плоскость параметров «число Релея – направление подогрева» оказалось топологически эквивалентным отображению Уитни — бифуркации стационарных режимов конвекции в замкнутой полости при изменениях двух параметров (числа Релея и направления подогрева (наклона полости)).

В большинстве рассмотренных работ предполагается, что скорость жидкости на границах полости равна нулю. Хотя это условие прилипания жидкости к стенкам успешно применяется при описании большого количества течений, распространены ситуации, когда более адекватным является условие проскальзывания [23–29]. Влияние плавной замены условия прилипания на условие проскальзывания начато в [22], где показано, что в прямоугольной полости с горизонтальными свободными границами плавный переход от условия проскальзывания к условию прилипания на вертикальных границах приводит к перезамыканию ветвей нейтральных кривых.

Исследование бифуркаций и устойчивости стационарных режимов тепловой конвекции в наклоняемой прямоугольной полости без учета прилипания на границах в маломодовом приближении проведено авторами в [9–12]. Для описания поведения жидкости выведена модельная система обыкновенных дифференциальных уравнений, совпадающая с предложенной без вывода системой из [7]. В рамках этой модели выведены аналитические выражения для описания стационарных режимов тепловой конвекции.

Аналитически для числа Прандтля 10 и соотношения сторон  $\sqrt{2}$  рассмотрена устойчивость полученных стационарных режимов при произвольных (не только малых) наклонах полости. Получена бифуркационная кривая, разделяющая область параметров «число Релея—угол наклона полости) на две области, внутреннюю и внешнюю. Во внешней области система имеет одно устойчивое стационарное решение, а во внутренней — три стационарных решения. Одно из них всегда неустойчиво монотонным образом, а два других могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Построены нейтральные кривые, определяющие границы возникновения колебательной и монотонной неустойчивостей.

В настоящей работе изучаются стационарные решения полных двумерных уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска в наклоняемой прямоугольной полости с граничными условиями, величиной числа Прандтля и соотношением сторон такими же, как в [9–12]:  $Pr = 10$  и  $B = \sqrt{2}$ , в интервале чисел Грасгофа от нуля до  $10G_1$ , где  $G_1$  — критическое число Грасгофа, соответствующее порогу возбуждения конвекции при подогреве снизу. В маломодовом приближении, рассмотренном в [9–12], не учитывается изменение структуры конвективного течения. Между тем увеличение числа Грасгофа может приводить к разрушению одноваликового течения и зарождению устойчивых и неустойчивых многоваликовых стационарных течений.

## 2 Постановка задачи

Рассматривается прямоугольная в плане полость, заполненная совершающей плоское движение несжимаемой жидкостью с плотностью  $\rho$  и кинематической вязкостью  $\nu$  (Рис. 1). Две параллельных

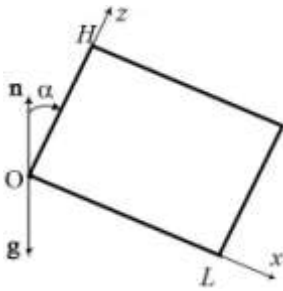


Рис. 1. Геометрия задачи

стенки длиной  $H$  теплоизолированные, две других длиной  $L$  идеально теплопроводные, на них поддерживаются постоянные и различающиеся на величину  $\Theta$  температуры. Предполагается, что на всех стенках полости выполняются условия непротекания и отсутствия касательных напряжений. Полость может наклоняться по отношению к горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости прямоугольного основания так, что угол отклонения идеально теплопроводных границ от горизонтальной плоскости составляет  $\alpha$ , причем при  $\alpha = 0^\circ$  реализуются условия подогрева строго снизу. Прямоугольная декартова система координат  $(Oxz)$  определена так, что ось  $Ox$  проходит по более нагретой идеально теплопроводной стороне, ось  $Oz$  — по теплоизолированной.

Для описания движения жидкости используются безразмерные уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + Gr T \mathbf{n}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr} \Delta T, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{n} = e_z \cos \alpha - e_x \sin \alpha$ , — единичный вектор, направленный вверх,  $\mathbf{v} = v_x e_x + v_z e_z$ ,  $p$ ,  $T$  — соответственно скорость жидкости, отклонение давления от гидростатического значения, отклонение температуры от среднего постоянного значения. В качестве единиц измерения расстояния, времени, скорости, температуры и давления выбраны величины: толщина слоя  $H$ ,  $H^2/\nu$ ,  $\nu/H$ ,  $\Theta$  и  $\rho \nu^2/H^2$ :

Граничные условия на стенках записываются в виде:

$$x = 0; B: \quad v_x = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$z = 0; 1: \quad v_z = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \quad T = 1 - z. \quad (5)$$

Задача (1)–(5) характеризуется углом наклона  $\alpha$  и безразмерными критериями подобия: числом Грасгофа  $Gr = g\beta\Theta H^3/\nu^2$ , числом Прандтля  $Pr = \nu/\chi$ , соотношением сторон  $B = L/H$ .

## 3. Устойчивость механического равновесия

В случае  $\alpha = 0^\circ$ , то есть при подогреве строго снизу, уравнения допускают решение, соответствующее механическому равновесию жидкости и линейному распределению температуры:

$$\mathbf{v}_0 = 0, \quad T_0 = 1 - z. \quad (6)$$

Задача (1)–(5) для случая малых возмущений состояния механического равновесия (6) с помощью замен

$v_z = v(z) \exp(\lambda t) \cos\left(\frac{m\pi}{B}x\right)$ ,  $\vartheta = \theta(z) \exp(\lambda t) \cos\left(\frac{m\pi}{B}x\right)$  сводится к краевой задаче

$$\lambda \left( v'' - \left(\frac{m\pi}{B}\right)^2 v \right) = \left( v^{IV} - 2 \left(\frac{m\pi}{B}\right)^2 v'' + \left(\frac{m\pi}{B}\right)^4 v \right) - Gr \left(\frac{m\pi}{B}\right)^2 \theta, \quad (7)$$

$$\lambda \theta - v - \frac{1}{Pr} \left( \theta'' - \left(\frac{m\pi}{B}\right)^2 \theta \right) = 0, \quad (8)$$

$$z = 0; 1: v = 0, v'' = 0, \theta = 0, \quad (9)$$

совпадающей с задачей Релея для случая, когда волновое число, определяющее периодичность возмущения вдоль оси  $x$ , равно  $\frac{m\pi}{B}$ . Решение задачи Релея дает собственные функции в виде простых гармоник [30, 31]:

$$v = v_{m,n} \sin n\pi z, \quad \theta = \vartheta_{m,n} \sin n\pi z, \quad (10)$$

где  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Причем  $v_{0,n} = 0$ , то есть  $m = 0, n \neq 0$  соответствуют решению краевой задачи (1)–(5) с нулевым возмущением скорости и возмущением температуры, не зависящим от координаты  $x$ :

$$\vartheta = \vartheta_{m,n} e^{\lambda t} \sin(n\pi z). \quad (11)$$

Инкременты данных возмущений всегда отрицательны и не связаны с числом Грасгофа:

$$\lambda = -\frac{n^2 \pi^2}{Pr}. \quad (12)$$

При  $m \neq 0, n \neq 0$  решение приводит к формулам для  $v_z, \vartheta$

$$\vartheta = \vartheta_{m,n} e^{\lambda t} \cos\left(\frac{m\pi}{B}x\right) \sin(n\pi z), \quad (13)$$

$$v_z = v_{z,m,n} e^{\lambda t} \cos\left(\frac{m\pi}{B}x\right) \sin(n\pi z), \quad (14)$$

описывающим плоские валиковые течения с осью вращения, параллельной горизонтальной оси, которая в свою очередь перпендикулярна плоскости прямоугольника в основании полости, и к выражению для инкрементов:

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{Pr}\right)\left(\frac{m^2 \pi^2}{B^2} + n^2 \pi^2\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{Pr}\right)^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{B^2} + n^2 \pi^2\right)^2 + \frac{m^2 \pi^2}{B^2} Gr \left/\left(\frac{m^2 \pi^2}{B^2} + n^2 \pi^2\right)\right.}. \quad (15)$$

Для конкретных  $m, n$  один из инкрементов всегда отрицателен, второй растёт с увеличением числа Грасгофа и при достаточно больших его значениях становится положительным, что делает соответствующие возмущения опасными для механического равновесия.

Приравнивая инкремент нулю, получаем выражение для критического числа Грасгофа, отвечающего моде  $m, n$ :

$$Gr_c = \left(\frac{m^2 \pi^2}{B^2} + n^2 \pi^2\right)^3 \left/\left(\frac{m^2 \pi^2}{B^2} Pr\right)\right.}. \quad (16)$$

Положив  $m\pi/B = k$  формулу (16), можно свести к классическому результату решения задачи Релея:

$Ra_c = (k^2 + n^2 \pi^2)^3 / k^2$ , где  $k$  — волновое число, определяющее периодичность возмущения вдоль оси  $x$ .

#### 4. Метод исследования устойчивости и бифуркаций стационарных режимов

Значение числа Прандтля и соотношение сторон приняты такими же, как в работах [9–12], посвященных исследованию устойчивости и бифуркаций стационарных режимов конвекции в маломодовом приближении:

$Pr = 10$  и  $B = \sqrt{2}$ . Для этих значений числа Прандтля и аспектного отношения, согласно (16), первые три критических значения числа Грасгофа: 65,75; 131,5; 360,1, соответствуют возмущениям с  $n = 1, m = 1, 2, 3$ , представляющим собой одно-, двух- и трехваликовые движения. В настоящей работе ограничимся областью чисел Грасгофа  $Gr \leq 10 \cdot Gr_c = 657,5$ . Во всей этой области найдем стационарные решения. При исследовании их устойчивости прибегнем к методу малых возмущений.

Для отыскания плоских стационарных решений воспользуемся уравнениями тепловой конвекции в форме Гельмгольца [12]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \text{Gr} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \sin \alpha + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cos \alpha - \sin \alpha \right), \quad (17)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right), \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \varphi = 0 \quad (19)$$

с граничными условиями:

$$\psi = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } x = 0; B \quad \text{и } z = 0; 1, \quad (20)$$

$$\vartheta = 0 \quad \text{при } z = 0; 1, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0; B, \quad (22)$$

где  $\vartheta$  — отклонение температуры от линейного распределения (6), задаваемое формулой  $\vartheta = T - 1 + z$ , при этом  $\psi$  — функция тока,  $\varphi$  — завихренность.

Система уравнений (17)–(19) после дискретизации и аппроксимации пространственных производных во внутренних узлах центральными разностями на прямоугольной сетке с числом узлов  $101 \times 101$  записывается в виде:

$$\mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{y}). \quad (23)$$

Здесь:  $\mathbf{y}$  — вектор-столбец, образуемый значениями дискретизированных полей завихренности, температуры и функции тока во внутренних узлах;  $\mathbf{f}$  — вектор-столбец, компонентами которого являются все значения во внутренних узлах дискретизированных правых частей уравнений (17)–(19).

Стационарные решения  $\mathbf{y}_0$  системы уравнений (23) удовлетворяют нелинейному векторному уравнению

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = 0, \quad (24)$$

которое решим численно, при помощи многомерного метода Ньютона [21]. Согласно методу каждое последующее приближение  $\mathbf{y}_0^{(r+1)}$  равно сумме значения с предыдущего шага  $\mathbf{y}_0^{(r)}$  и приращения  $\Delta \mathbf{y}_0^{(r)}$ , которое определяется из решения системы линейных алгебраических уравнений, полученных линеаризацией дискретной формы (24) с помощью разложения в ряд Тейлора около  $\mathbf{y}_0^{(r)}$ :

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}_0^{(r)}) \Delta \mathbf{y}_0^{(r)} = -\mathbf{f}(\mathbf{y}_0^{(r)}), \quad \mathbf{y}_0^{(r+1)} = \mathbf{y}_0^{(r)} + \Delta \mathbf{y}_0^{(r)}, \quad (25)$$

где  $\mathbf{J}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_{3s}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{3s}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_{3s}}{\partial y_{3s}} \end{pmatrix}$  — матрица Якоби системы (24),  $r$  — номер итерации. Итерации по методу

Ньютона продолжаются до тех пор, пока норма вектора невязки  $|\mathbf{f}(\mathbf{y}_0^{(r)})|$  не станет меньше заданной величины  $\varepsilon$  (в расчетах полагалось  $\varepsilon \leq 10^{-6}$ ). Найденное стационарное решение  $\mathbf{y}_0$  будем исследовать на устойчивость относительно малых возмущений  $\tilde{\mathbf{y}} \sim e^{\lambda t}$ .

Уравнение для возмущений

$$(-\lambda \mathbf{D} + \mathbf{J}(\mathbf{y}_0)) \tilde{\mathbf{y}} = 0 \quad (26)$$

представляет собой однородную систему из  $3(K-2)(I-2)$  линейных уравнений относительно  $3(K-2)(I-2)$  неизвестных. Система может иметь нетривиальное решение, если определитель её матрицы равен нулю. Для нахождения собственных значений задачи (26) решим уравнение:

$$|-\lambda \mathbf{D} + \mathbf{J}(\mathbf{y}_0)| = 0. \tag{27}$$

В окрестности точки бифуркации, в которой  $\lambda = 0$ , невозможно построить решение  $\mathbf{y}_0$  системы (24) с помощью итерационной процедуры (25), поскольку при условии  $\lambda = 0$  матрица Якоби  $\mathbf{J}(\mathbf{y}_0)$  вырождена:

$$|\mathbf{J}(\mathbf{y}_0)| = 0. \tag{28}$$

Чтобы решить систему (24) в окрестности точки бифуркации, зафиксируем  $c$ -ю компоненту вектора неизвестных  $\mathbf{y}_0$  и отыщем оставшиеся компоненты  $\mathbf{y}_0$  и значение управляющего параметра (например, число Грасгофа  $G_r$ ), применив вариант метода Ньютона, итерации которого осуществляются по формулам:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{y}_0^{(r)}) & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{y}_0^{(r)})}{\partial G_r} \\ \mathbf{e}_c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{y}_0^{(r)} \\ \Delta G_r^{(r)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{y}_0^{(r)}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0^{(r+1)} = \mathbf{y}_0^{(r)} + \Delta \mathbf{y}_0^{(r)}, \quad G_r^{(r+1)} = G_r^{(r)} + \Delta G_r^{(r)}, \tag{29}$$

где  $\mathbf{e}_c$  — единичный вектор-строка, все компоненты которого нулевые, кроме  $c$ -й. На каждом шаге итерации  $c$ -я компонента вектора неизвестных  $\mathbf{y}_0$  определяется как корень уравнения (28), которое решается методом секущих. Процесс установления бифуркационных значений числа  $G_r$  и компонент вектора  $\mathbf{y}_0$  посредством описанной итерационной процедуры прекращается после достижения заданной точности.

### 5. Влияние числа Грасгофа на структуру и устойчивость стационарных режимов при строгом подогреве снизу

По аналогии с работой [8] для количественной характеристики нелинейного стационарного режима будем использовать проекцию скорости течения на ось  $z$  в точке  $(1/8, 1/2)$ :  $u = v_z(1/8, 1/2)$ .

Полученные описанным выше методом бифуркационные диаграммы  $u(G_r)$  для подогрева строго снизу ( $\alpha = 0^\circ$ ) представлены на рисунке 2. На рисунке 3 изображены инкременты возмущений режимов стационарной тепловой конвекции, следующие из решения уравнения (27). При этом инкрементам возмущений механического равновесия соответствуют формулы (14) (для моды 0, 1) и (17) (для мод 1, 1; 2, 1; 3, 1).

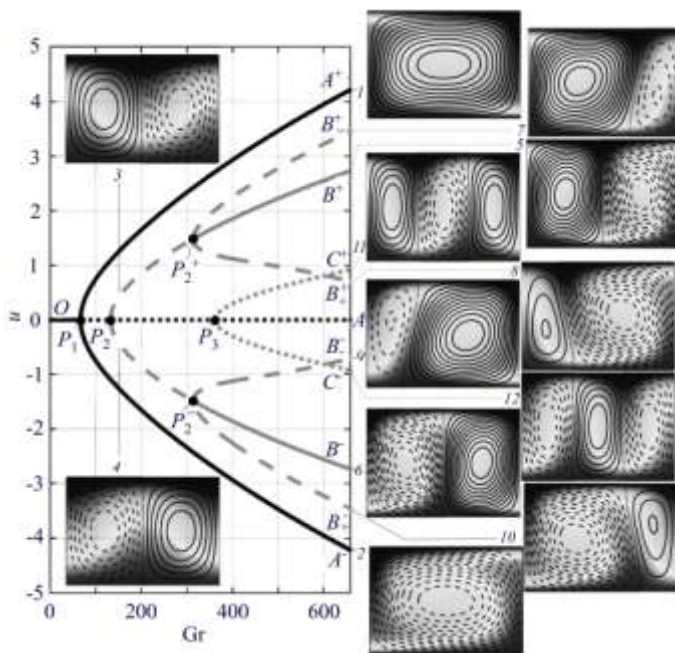


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы  $u(G_r)$  при  $\alpha = 0^\circ$  с полями скорости и температуры, наблюдаемыми в режимах течений при  $G_r = 657.5$  (вставки 1, 2, 5–12) и  $G_r = 140$  (3, 4)

Выше было показано, что все возмущения равновесия (ветвь  $OA$ , Рис. 2) затухают при значениях числа Грасгофа, меньших критического  $G_{r1} = 65,75$ . С увеличением числа Грасгофа и прохождении им значения  $G_{r1}$  (точка  $P_1$ , Рис. 2) наблюдается смена знака инкремента моды 1, 1 (Рис. 3). Механическое равновесие становится неустойчивым, и в точке  $P_1$  происходит вилочная бифуркация: ветвь  $OA$  разделяется на две устойчивых части  $P_1A^+$  и  $P_1A^-$ , соответствующие одноваликовым течениям, с закруткой по часовой стрелке на  $P_1A^+$  и с закруткой против часовой стрелки на  $P_1A^-$  (вставки 1 и 2, Рис. 2).

При переходе через второе критическое число Грасгофа  $G_{r2} = 131,5$  (точка  $P_2$ ) меняется знак инкремента моды 2, 1, имеет место вилочная бифуркация: ветвь  $OA$

раздваивается на части  $P_2P_2^+$  и  $P_2P_2^-$ , устойчивые относительно возмущений, вызванных указанной модой. Отвечающие этим ветвям течения являются двухваликовыми (вставки 3 и 4): поля скорости и температуры в конвективных валах симметричны относительно вертикали, проходящей через центр прямоугольника. Ветвь  $P_2P_2^+$  показывает, что более теплая жидкость поднимается у стенок, холодная опускается через центр прямоугольника. Согласно ветви  $P_2P_2^-$  направление циркуляции жидкости и отклонение температуры от равновесного распределения противоположны — более теплая жидкость поднимается через центр прямоугольника, холодная опускается у стенок.

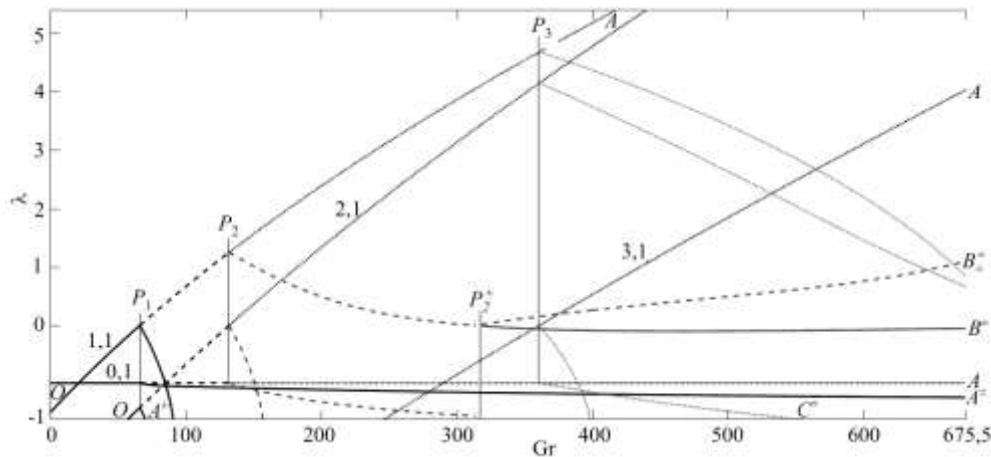


Рис. 3. Зависимость инкрементов  $\lambda$  от  $Gr$  при  $\alpha = 0^\circ$  равновесных и нелинейных режимов, представленных на рисунке 2

На ветвях  $P_2P_2^+$  и  $P_2P_2^-$  в некоторой окрестности точки бифуркации инкремент, отделившийся от инкремента возмущения моды 1, 1, положителен. С увеличением числа Грасгофа он уменьшается и при  $Gr = 312,9$  меняет свой знак (в точках  $P_2^+$  и  $P_2^-$ ), наблюдается вилочная бифуркация: каждая из ветвей  $P_2P_2^+$  и  $P_2P_2^-$  разделяется в свою очередь на три:  $P_2^+V^+$ ,  $P_2^+B^+$ ,  $P_2^+V_+$  и  $P_2^-V^-$ ,  $P_2^-B^-$ ,  $P_2^-V_-$ . При этом  $P_2^+V^+$ ,  $P_2^-V^-$  устойчивы,  $P_2^+B^+$ ,  $P_2^+V_+$ ,  $P_2^-B^-$ ,  $P_2^-V_-$  неустойчивы. Стационарный двухвихревой режим, соотносящийся с ветвью  $P_2^+V^+$  ( $P_2^-V^-$ ), после бифуркации в точке  $V^+$  ( $V^-$ ) сохраняет симметрию, присущую ему до бифуркации (вставка 5 (б)). На ветвях  $P_2^+V_+$ ,  $P_2^+B_+$  ( $P_2^-B_-$ ,  $P_2^-V_-$ ) симметрия нарушается: при удалении от точки бифуркации один из вихрей увеличивается, другой уменьшается (вставки 7, 8 (9, 10)).

При  $Gr_3 = 360,1$  меняется знак инкремента возмущения моды 3, 1, происходит надкритическая бифуркация: ветвь  $OA$  раздваивается на  $P_3C^+$  и  $P_3C^-$  (в точке  $P_3$ ). Ветви  $P_3C^+$  и  $P_3C^-$  связываются с трехваликовыми течениями, которые являются устойчивыми относительно возмущений, соответствующих моде 3, 1, но неустойчивыми относительно возмущений, вызванных модами 1, 1 и 2, 1. Ветви  $P_3C^+$  отвечает вращение центрального вала против часовой стрелки, боковым — по часовой стрелке, ветви  $P_3C^-$  — циркуляция в указанных валах противоположного реализующемуся согласно ветви  $P_3C^+$  направления.

Таким образом, бифуркационная картина в рассмотренной области чисел Грасгофа при подогреве строго снизу, то есть при  $\alpha = 0^\circ$ , определяется тремя (в точках  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ ) вилочными бифуркациями состояния механического равновесия  $OA$  и двумя (в точках  $P_2^+$  и  $P_2^-$ ) вилочными бифуркациями (см. ветви  $P_2P_2^+$  и  $P_2P_2^-$ ), соотносящимися с двухваликовыми режимами, возникшими в результате бифуркации в точке  $P_2$ . Вилочные бифуркации стационарных режимов течений в полости могут быть структурно неустойчивыми по отношению к изменению угла наклона [8]. Для решения вопроса о структурной устойчивости рассмотренных вилочных бифуркаций построим и исследуем бифуркационные диаграммы при слабом наклоне полости.

## 6. Структура и устойчивость стационарных режимов течений при малом угле наклона полости

Анализ бифуркационной диаграммы, построенной для угла наклона  $\alpha = 0,1^\circ$  (Рис. 4) показывает, что вилочная бифуркация в точке  $P_1$ , изображенная на рисунке 2, структурно неустойчива: при малом отклонении  $\alpha$  от нулевого значения бифуркационная диаграмма около указанной точки распадается на две части.



Одна часть — ветвь  $OA^+$ , на которой устойчивый одновихревой режим с закруткой вихря по часовой стрелке (вставка 22, Рис. 4) непрерывно изменяется вслед за изменением числа Грасгофа, а другая часть —  $A^-S_{1+}C^+$ , состоит из устойчивой части  $S_{1+}A^-$ , соответствующей одновихревому течению с закруткой против часовой стрелки (вставка 32), и неустойчивой —  $S_{1+}C^+$ , которые сливаются в точке седлоузловой бифуркации  $S_{1+}$ .

В точке вилочной бифуркации  $P_2$  при  $\alpha = 0^\circ$  (Рис. 2) от ветви  $OA$ , соответствующей состоянию механического равновесия, ответвляются два двухваликовых режима:  $P_2B^+$  и  $P_2B^-$ . В случае малого наклона  $\alpha = 0,1^\circ$  наблюдается похожая бифуркационная структура: от ветви  $S_{1+}C^+$  в точке  $P_{2+}$  отходят  $P_{2+}B^+$  и  $P_{2+}B^-$ . Это указывает на структурную устойчивость вилочной бифуркации. По сравнению со случаем вилочной бифуркации в  $P_2$ , вилочная бифуркация в  $P_{2+}$  при  $\alpha = 0,1^\circ$  происходит при значении числа Грасгофа, большем на 0,003. Течение в точке вилочной бифуркации  $P_{2+}$  является одноваликовым с закруткой против часовой стрелки, при перемещении от точки  $P_{2+}$  по ветвям  $P_{2+}B^+$  и  $P_{2+}B^-$  оно преобразуется в двухваликовое (вставки 1–9).

Вилочная бифуркация в точке  $P_2^-$  ( $P_2^+$ ) (Рис. 2) структурно неустойчива: при малом угле наклона бифуркационная диаграмма в окрестности указанной точки состоит из трех частей: отрезка  $B^-S_{2+}^-B^-$  ( $B^+S_{2+}^+B^+$ ) устойчивой ветви  $S_{2+}^-B^-$  ( $S_{2+}^+B^+$ ) и неустойчивой ветви  $S_{2+}^-B^-$  ( $S_{2+}^+B^+$ ), сливающихся в точке  $S_{2+}^-$  ( $S_{2+}^+$ ), и ветви  $P_{2+}B^-$  ( $P_{2+}B^+$ ), непрерывно проходящей под  $S_{2+}^-$  ( $S_{2+}^+$ ). В точке  $S_{2+}^-$  ( $S_{2+}^+$ ) течение двухвихревое с закруткой левого (правого) вихря против часовой стрелки, правого (левого) — по часовой стрелке (вставка 10 (11), Рис. 4). Интенсивность и размер правого (левого) вихря незначительно больше, чем левого (правого). С увеличением числа Грасгофа интенсивность обоих вихрей вдоль  $S_{2+}^-B^-$  ( $S_{2+}^+B^+$ ) увеличивается, размер и интенсивность левого (правого) вихря приближаются к размеру и интенсивности правого (левого) (вставка 30 (24)). При удалении от точки бифуркации  $S_{2+}^-$  ( $S_{2+}^+$ ) по ветви  $S_{2+}^-B^-$  ( $S_{2+}^+B^+$ ) размер и интенсивность левого (правого) вихря уменьшаются, а правого (левого) увеличиваются (вставка 29 (23)). После прохождения под точкой бифуркации  $S_{2+}^-$  ( $S_{2+}^+$ ) по линии  $P_{2+}B^-$  ( $P_{2+}B^+$ ) левый (правый) вихрь увеличивается (уменьшается), а правый (левый) уменьшается (вставка 31 (25)).

Вилочная бифуркация в точке  $P_3$  (Рис. 2) структурно неустойчива: при отклонении угла наклона от нулевого значения диаграмма в окрестности  $P_3$  распадается на две части. Первая часть — неустойчивая непрерывная ветвь  $P_{2+}C^+$ , а вторая часть —  $C^-S_{3+}D^+$ , состоит из двух неустойчивых ветвей:  $S_{3+}C^-$  и  $S_{3+}D^+$ , сливающихся в точке  $S_{3+}$ , соответствующей седлоузловой бифуркации.

При  $Gr < 256$  режим течения, описываемый ветвью  $S_{1+}C^+$ , является одновихревым с закруткой против часовой стрелки (вставка 12,  $Gr = 250$ , Рис 4). При приближении числа Грасгофа к значению  $Gr = 256$  одновихревое течение дополняется слабыми вихрями в углах полости с закруткой по часовой стрелке (вставка 13,  $Gr = 270$ ). При дальнейшем увеличении числа Грасгофа размеры и интенсивность этих вихрей растут, при  $Gr \approx 275$  верхние вихри сливаются с расположенными под ними вихрями, образуются вихри с двумя центрами, расположенными друг над другом (вставка 14,  $Gr = 280$ ). При  $Gr \approx 290$  происходит слияние их центров, и при  $Gr > 290$  течение, которому отвечает ветвь  $S_{1+}C^+$ , представляет собой трехвихревое с закруткой центрального вихря против часовой стрелки и с закруткой вихрей, расположенных слева и справа от него, по часовой стрелке (вставки 15, 16, 26,  $Gr = 293; 364,1; 657,5$  соответственно).

Течение вдоль всей ветви  $S_{3+}C^-$  является трехвихревым, центральный вихрь при этом вращается по часовой стрелке, а два боковых — против (вставки 17, 27,  $Gr = 364,1; 657,5$ ). Течение по ветви  $S_{3+}D^+$  по мере роста числа Грасгофа эволюционирует: центральный вихрь (вставка 17) сжимается в горизонтальном направлении (вставка 18,  $Gr = 390$ ), затем в нем появляется два вихря с центрами, расположенными друг над другом (вставка 19,  $Gr = 398$ ), после этого вихри разделяются (вставка 20 для  $Gr = 406$ ), а потом и полностью исчезают. В итоге формируется занимающий всю полость вихрь, внутри которого справа и слева располагается по вихрю с закруткой против часовой стрелки (вставки 21,  $Gr = 406$ , 28,  $Gr = 657,5$ ). Отметим, что все описанные трехвихревые режимы (вставки 14–19) и эволюционно возникающие из них режимы (вставки 20 и 21) неустойчивы.

Бифуркационная диаграмма, построенная для отрицательного угла наклона  $\alpha = -0,1^\circ$ , совпадает с диаграммой, полученной зеркальным отражением относительно оси абсцисс диаграммы на рисунке 4.

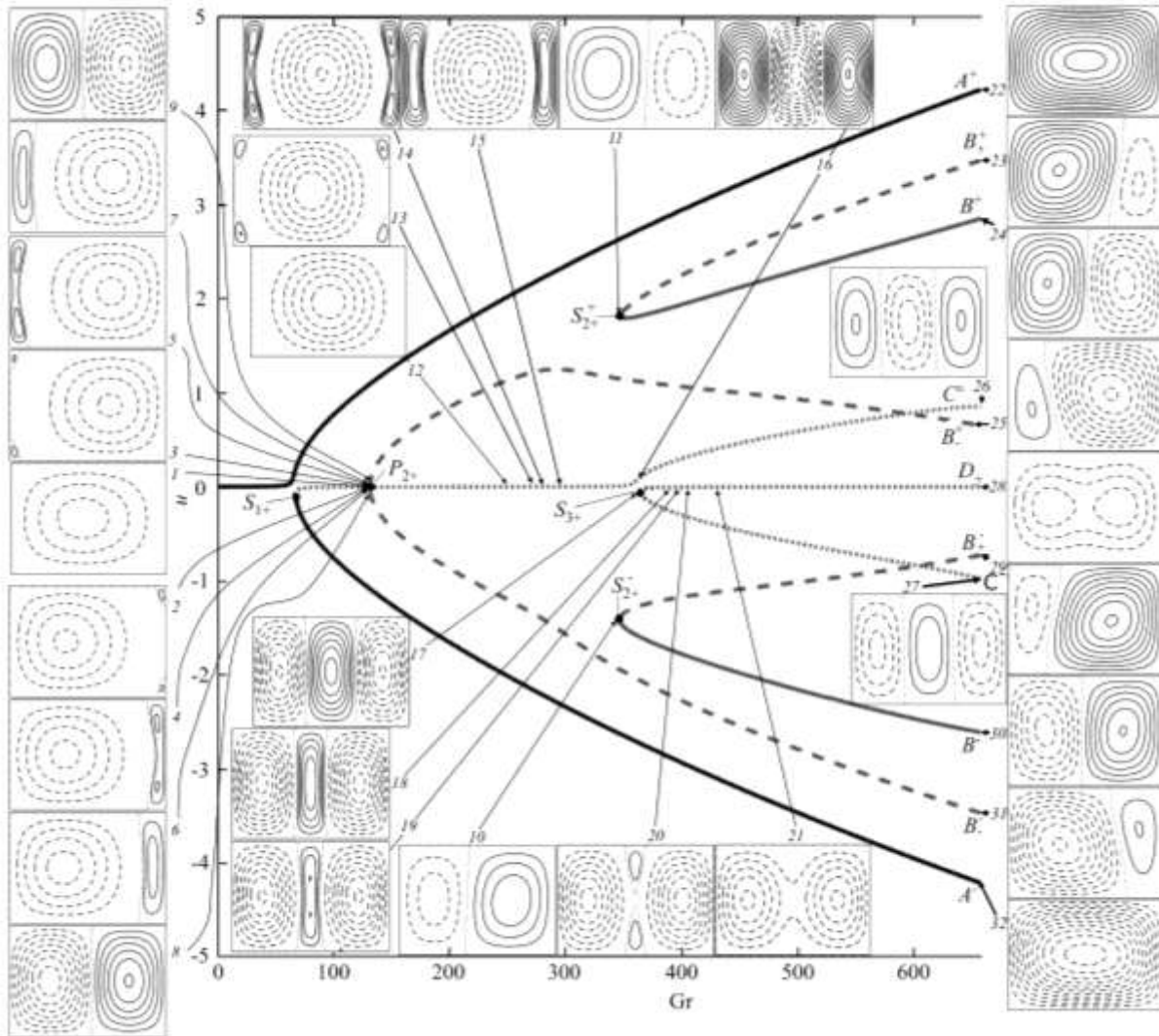


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма  $u(Gr)$  при  $\alpha = 0,1^\circ$  с представленными на вставках линиями тока (сплошные (штриховые) кривые соответствуют положительным (отрицательным) значениям функции тока) при фиксированных значениях числа Грасгофа  $Gr$  : 131,58395 (вставка 1); 131,5845 (2, 3); 131,5846 (4, 5); 131,5848 (6, 7); 131,7 (8, 9); 346,633 (10, 11); 250 (12); 270 (13); 280 (14); 293 (15); 364,1 (16, 17); 390 (18); 398 (19); 406 (20); 430 (21); 657,5 (22–32)

**7. Структура и устойчивость относительно плоских возмущений стационарных режимов течений при произвольном угле наклона полости**

Методом продолжения по параметру построены бифуркационные кривые  $S_{1-}P_1S_{1+}$ ,  $P_{2-}P_2P_{2+}$ ,  $S_{2-}P_2^{\pm}S_{2+}$ , на плоскости параметров  $(\alpha, Gr)$  (Рис. 5). Кривая  $S_{1-}P_1S_{1+}$ , за исключением точки  $P_1$ ,

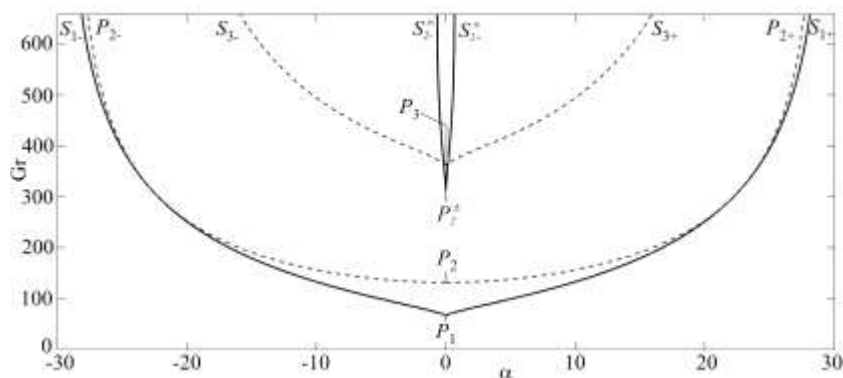


Рис. 5. Бифуркационные кривые на плоскости параметров  $(\alpha, Gr)$

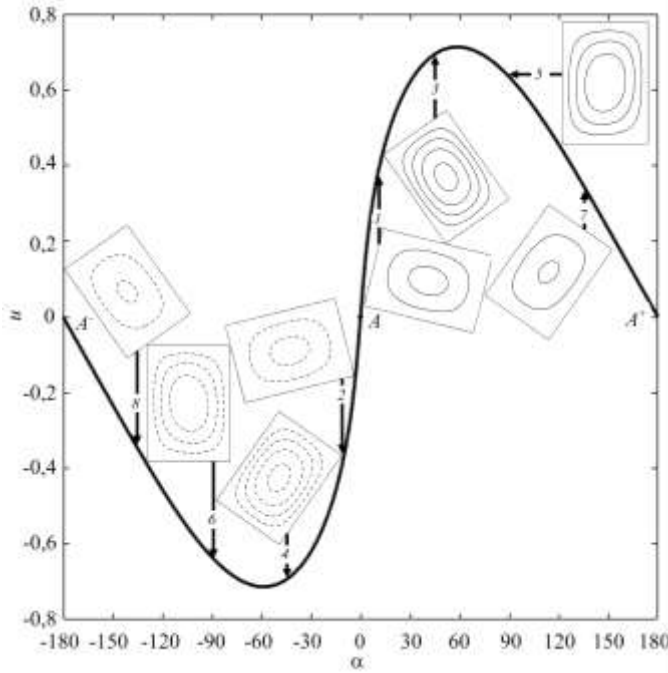


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма  $u(\alpha)$  при  $Gr = 50$  и различных значениях угла наклона  $\alpha$ , град: 10 (вставка 1); -10 (2); 45 (3); -45 (4); 90 (5); -90 (6); 135 (7); -135 (8)

представляет множество точек, при прохождении через которые в результате изменения значения числа Грасгофа происходит седлоузловая бифуркация. В точке  $P_1$  осуществляется вилочная бифуркация. В области под кривой  $S_{1-}P_1S_{1+}$ , которая имеет точку возврата при  $\alpha = 0^\circ$  и  $Gr_1 = 65,75$ , для конкретных значений угла наклона и числа Грасгофа существует стационарный режим. Это подтверждается тем, что бифуркационная диаграмма  $u = u(\alpha)$ , построенная для  $Gr < Gr_1$  (Рис. 6), обладает единственной ветвью —  $A^-AA^+$ . Указанный режим является одновихревым с циркуляцией по часовой стрелке при  $\alpha > 0^\circ$  (вставки 1, 3, 5, 7) и с циркуляцией против часовой стрелки при  $\alpha < 0^\circ$  (вставки 2, 4, 6, 8). При этом жидкость поднимается у более теплой стенки, опускается у холодной стенки.

Каждый набор значений параметров  $\alpha, Gr$  из области между ветвями бифуркационной кривой  $S_{1-}P_1S_{1+}$  при  $Gr < Gr_2 = 131,5$  соответствуют трем стационарным режимам, которые описываются ветвями  $A^+S_{1-}$ ,  $S_{1-}AS_{1+}$  и  $S_{1+}A^-$  бифуркационной диаграммы  $u = u(\alpha)$ , построенной для диапазона значений  $Gr_1 < Gr < Gr_2$  (Рис. 7). В виде ветви  $S_{1-}AS_{1+}$  реализуется неустойчивый одноваликовый режим с закруткой против часовой стрелки (по часовой стрелке) при  $\alpha > 0$  ( $\alpha < 0$ ). Ветвь  $A^+S_{1-}$  ( $S_{1+}A^-$ ) соответствует устойчивому одноваликовому режиму с закруткой по часовой стрелке (против часовой стрелки). Вне области, ограниченной ветвями бифуркационной кривой  $S_{1-}P_1S_{1+}$ , конкретным значениям  $\alpha, Gr$  отвечает единственное стационарное одноваликовое течение при  $\alpha > 0$  ( $\alpha < 0$ ) с закруткой по часовой стрелке (против часовой стрелки).

При числе Грасгофа  $131,5 < Gr < 312,9$  для интервала углов наклона  $\alpha$ , ограниченного бифуркационной кривой  $P_{2-}P_2P_{2+}$ , структура бифуркационных диаграмм  $u = u(\alpha)$  (Рис. 8) аналогична описанной выше: левее (правее) кривой  $S_{1-}P_1S_{1+}$  с веткой  $A^-S_{1+}$  ( $A^+S_{1-}$ ) соотносится единственное устойчивое стационарное одноваликовое течение с циркуляцией жидкости против часовой стрелки (по часовой стрелке), в области между кривыми  $P_{2-}P_2P_{2+}$  и  $S_{1-}P_1S_{1+}$  — по три стационарных решения. Внутри области, ограниченной  $P_{2-}P_2P_{2+}$ , к указанным трем решениям добавляются еще два ( $P_{2-}B_2^+P_{2+}$ ,  $P_{2-}B_2^-P_{2+}$ ), которые отделяются в результате вилочной бифуркации в точках  $P_{2-}$  и  $P_{2+}$  от неустойчивой ветви  $S_{1-}AS_{1+}$ . В соответствии с ветвью  $S_{1-}AS_{1+}$  при  $\alpha > 0$  ( $\alpha < 0$ ) реализуется одновихревое течение с циркуляцией против часовой стрелки (по часовой стрелке) (вставка 3 (4)).

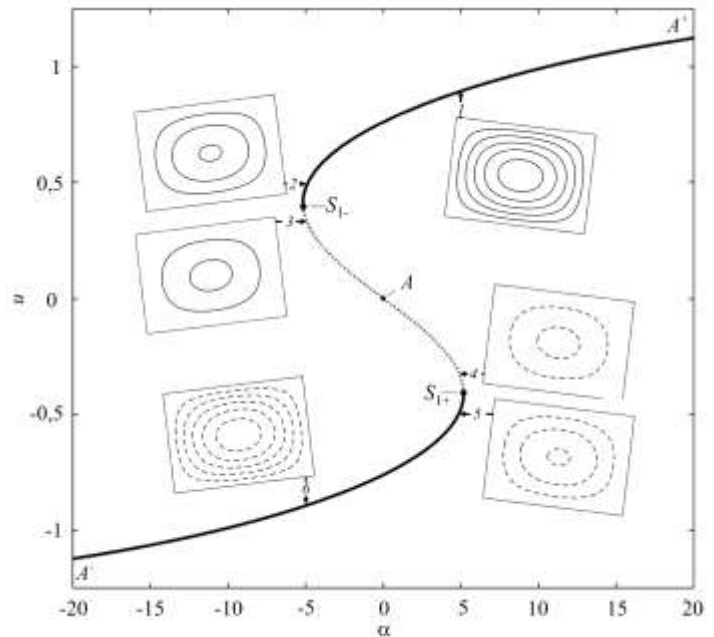
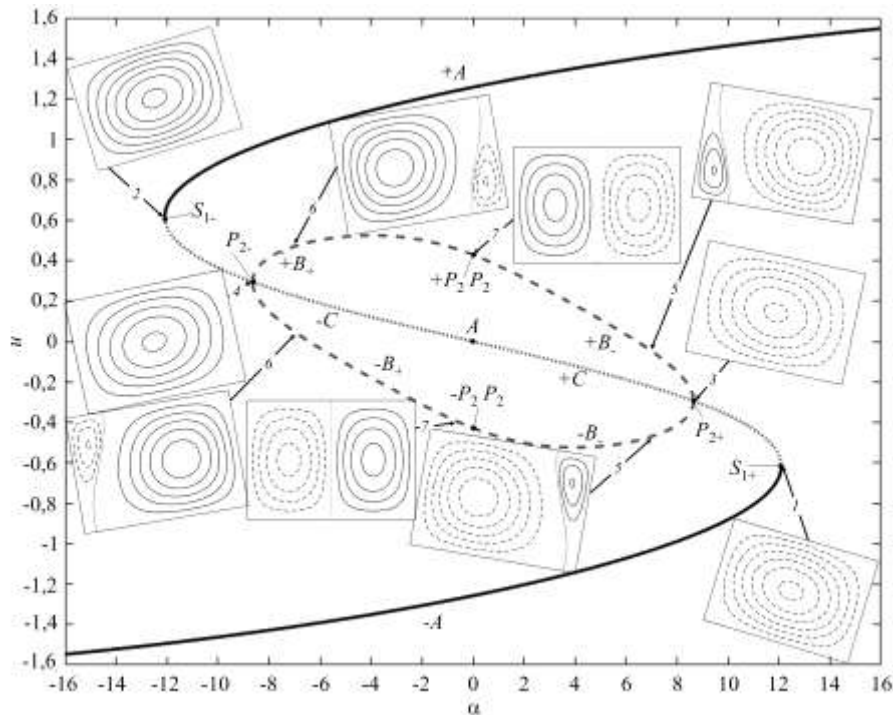


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма  $u(\alpha)$  при  $Gr = 100$  и различных значениях угла наклона  $\alpha$ , град: 5 (вставка 1); -5 (2); -5 (3); 5 (4); 5 (5); -5 (6)

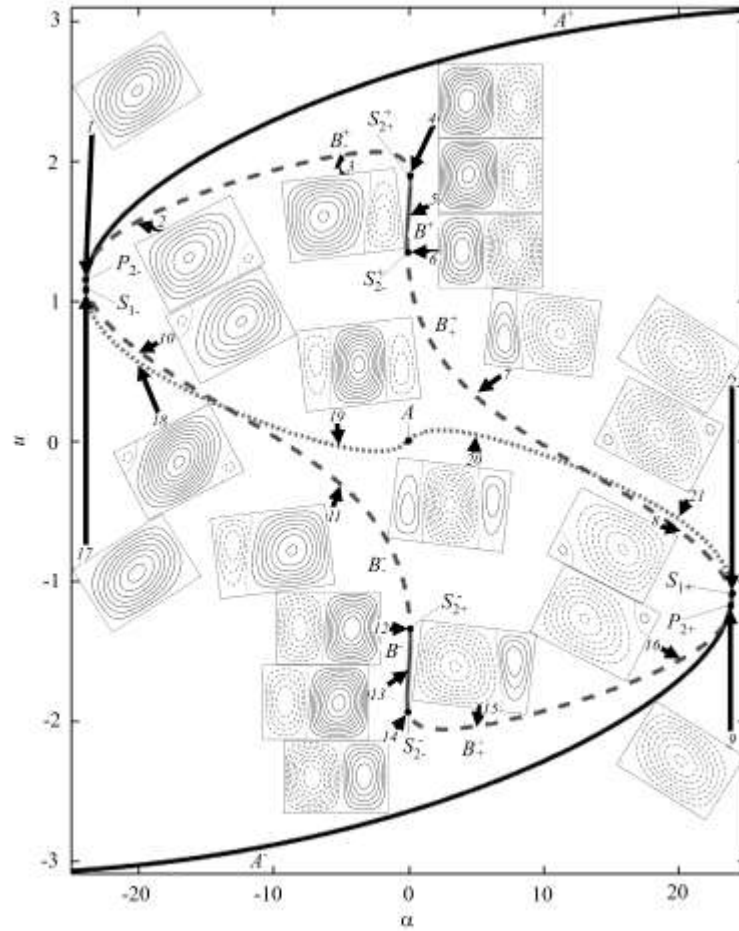
В точке вилочной бифуркации  $P_{2-}$  течение является одновихревым с закруткой по часовой стрелке (вставка 4). Видно, что при движении от нее по ветви  $P_{2-}B^+P_{2+}$  ( $P_{2-}B^-P_{2+}$ ) в правом нижнем (левом верхнем) углу полости наблюдается вихрь с противоположной закруткой, который растет по мере удаления от точки бифуркации (вставка 7 (8)), и в точке  $B^+$  ( $B^-$ ) ( $\alpha = 0^\circ$ ) размеры и интенсивность обоих вихрей сравниваются (вставка 6 (9)). При дальнейшем движении по ветви  $P_{2-}B^+P_{2+}$  ( $P_{2-}B^-P_{2+}$ ) от точки  $P_{2-}$  к точке  $P_{2+}$ , размеры левого (правого) вихря уменьшаются, а правого (левого) увеличиваются (вставка 5 (10)), и в точке вилочной бифуркации  $P_{2+}$  течение становится одновихревым с закруткой против часовой стрелки (вставка 3).



**Рис. 8.** Бифуркационная диаграмма  $u(\alpha)$  при  $Gr = 150$  и различных значениях угла наклона  $\alpha$ , град: 12,07 (вставка 1);  $-12,07$  (2); 8,65 (3);  $-8,65$  (4); 7 (5);  $-0$  (6);  $-7$  (7);  $-7$  (8); 0 (9); 7 (10)

Для диапазона  $312,9 < Gr < 360,1$  на бифуркационной диаграмме (Рис. 9), в отличие от случая  $131,5 < Gr < 312,9$ , рассмотренного выше, точки вилочной бифуркации  $P_{2-}$  и  $P_{2+}$  меняются местами с седлоузловыми бифуркационными точками  $S_{1-}$  и  $S_{1+}$ : ветви  $P_{2-}B^+P_{2+}$  и  $P_{2-}B^-P_{2+}$  получаются в результате отделения от ветвей  $S_{1-}A^+$  и  $S_{1+}A^-$  в точках  $P_{2-}$  и  $P_{2+}$  соответственно. На ветви  $P_{2-}B^+P_{2+}$  ( $P_{2-}B^-P_{2+}$ ) диаграммы имеется пара седлоузловых точек бифуркаций  $s_{2+}^+$  и  $s_{2+}^-$  ( $s_{2+}^+$  и  $s_{2+}^-$ ), между которыми находится устойчивая ветвь  $s_{2+}^+s_{2+}^-$  ( $s_{2+}^-s_{2+}^+$ ). При перемещении по ветви  $P_{2-}B^+P_{2+}$  ( $P_{2-}B^-P_{2+}$ ) от точки вилочной бифуркации  $P_{2-}$ , отвечающей одновихревому течению с закруткой по часовой стрелке (вставка 1, Рис. 9), в правом нижнем (левом верхнем) углу полости наблюдается зарождение слабого вихря с противоположной закруткой, который растет по мере приближения к точке  $s_{2+}^+$  ( $s_{2+}^-$ ) (вставки 2, 3 (10, 11)). В точке  $s_{2+}^+$  ( $s_{2+}^-$ ) левый (правый) вихрь лишь немного уступает по размерам правому (левому) (вставка 4 (12)). При удалении от точки  $s_{2+}^+$  ( $s_{2+}^-$ ) по направлению к  $s_{2+}^-$  ( $s_{2+}^+$ ) до  $\alpha = 0^\circ$  наблюдается незначительное уменьшение левого (правого) вихря (вставки 4, 5 (12, 13)). При перемещении по ветви  $s_{2+}^+s_{2+}^-P_{2+}$  ( $s_{2+}^-s_{2+}^+P_{2+}$ ) от  $\alpha = 0^\circ$  до точки  $P_{2+}$  происходит уменьшение правого (левого) вихря (вставки 5–8 (13–16)) с его последующим исчезновением в точке вилочной бифуркации  $P_{2+}$ , где течение становится одновихревым с закруткой против часовой стрелки (вставка 9).

Ветвь  $S_{1-}A^+$  ( $S_{1+}A^-$ ) устойчива везде, кроме участка  $S_{1-}P_{2-}$  ( $S_{1+}P_{2+}$ ). На конце  $S_{1-}$  неустойчивой ветви  $S_{1-}A^+$  течение одновихревое с циркуляцией по часовой стрелке (вставка 17), при удалении по этой ветви от нее в правом нижнем и левом верхнем углах полости возникают слабые вихри с противоположной к центральному закруткой (вставка 18), которые растут при удалении от точки бифуркации  $S_{1-}$ , и течение

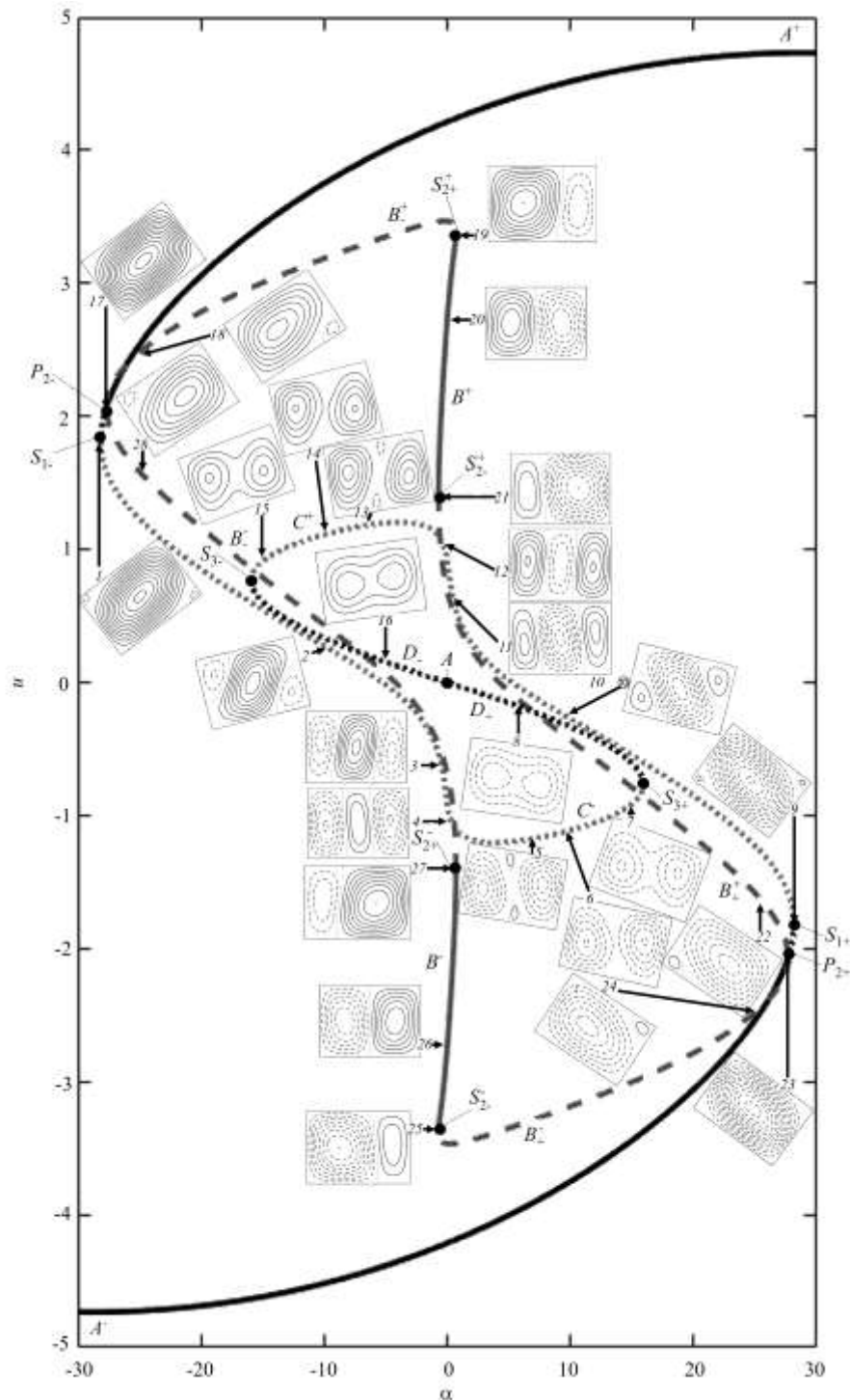


**Рис. 9.** Бифуркационная диаграмма  $u(\alpha)$  при  $Gr = 350$  и различных значениях угла наклона  $\alpha$ , град:  $-23,86$  (вставка 1);  $-20$  (2);  $-5$  (3);  $0,1$  (4);  $0$  (5);  $-0,1$  (6);  $5$  (7);  $20$  (8);  $23,86$  (9);  $-20$  (10);  $-5$  (11);  $0,1$  (12);  $0$  (13);  $-0,1$  (14);  $5$  (15);  $20$  (16);  $-23,89$  (17);  $-20$  (18);  $-5$  (19);  $5$  (20);  $20$  (21);  $23,89$  (22)

преобразуется в трехвихревое (вставка 19). При прохождении по ветви  $S_{1-}AS_{1+}$  точки  $A$ , соответствующей механическому равновесию, направление циркуляции в трех указанных вихрях меняется на противоположное (вставка 20). При дальнейшем движении по ветви к точке  $S_{1+}$ , размеры левого и правого вихрей уменьшаются, а центрального увеличиваются (вставка 21). В точке седлоузловой бифуркации  $S_{1+}$  течение является одновихревым с закруткой против часовой стрелки (вставка 22).

Для  $360,1 < Gr < 657,5$  бифуркационная диаграмма  $u = u(\alpha)$  (Рис. 10) изогнута таким образом, что по сравнению со случаем  $312,9 < Gr < 360,1$  на ветви  $S_{1-}AS_{1+}$  имеются симметрично расположенные относительно точки  $A$  седлоузловые бифуркационные точки  $S_{3-}$  и  $S_{3+}$ , между которыми находится неустойчивая ветвь  $S_{3+}AS_{3-}$ . При этом  $S_{3+}AS_{3-}$  сливается с ветвями  $S_{1-}S_{3+}$  и  $S_{1+}S_{3-}$  в точках  $S_{3+}$  и  $S_{3-}$ , соответственно, а  $S_{3-}S_{1+}$  ( $S_{3+}S_{1-}$ ) непрерывно проходит над  $S_{3+}$  (под  $S_{3-}$ ).

Течение в точке седлоузловой бифуркации  $S_{1-}$  ( $S_{1+}$ ) представляет из себя вихрь с закруткой по часовой стрелке (против часовой стрелки) с расположенными в правом нижнем (верхнем) и левом верхнем (нижнем) углах полости слабыми вихрями (вставка 1 (9)). При движении по ветви  $S_{1-}S_{3+}$  ( $S_{1+}S_{3-}$ ) интенсивность центрального вихря уменьшается, а интенсивность угловых вихрей увеличивается (вставка 2 (10)) так, что при приближении к  $\alpha = 0^\circ$  размер и интенсивность всех вихрей практически уравниваются (вставка 3 (11)). При дальнейшем перемещении по этой ветви от  $\alpha = 0^\circ$  средний вихрь уменьшается как в размере, так и по интенсивности (вставка 4 (12)) и распадается на верхнюю и нижнюю части (вставка 5 (13)), которые уменьшаются, а затем исчезают. Течение становится двухвихревым с закруткой против часовой стрелки (по часовой стрелке) (вставка 6 (14)). При приближении к  $S_{3+}$  ( $S_{3-}$ ) течение в полости превращается в вихрь, внутри которого справа и слева располагается по вихрю. Все вихри закручиваются против часовой стрелки (по часовой стрелке) (вставка 7 (15)). В дальнейшем при перемещении по ветви до точки  $A$ , соответствующей покою



**Рис. 10.** Бифуркационная диаграмма  $u(\alpha)$  при  $Gr = 657,5$  и различных значениях угла наклона  $\alpha$ , град:  $-28,21$  (вставка 1);  $-10$  (2);  $-0,5$  (3);  $0,5$  (4);  $7$  (5);  $10$  (6);  $15$  (7);  $6$  (8);  $28,21$  (9);  $10$  (10);  $0,5$  (11);  $-0,5$  (12);  $-7$  (13);  $-10$  (14);  $-15$  (15);  $-6$  (16);  $-27,66$  (17);  $-25$  (18);  $-0,7057$  (19);  $0$  (20);  $-0,7057$  (21);  $25$  (22);  $-27,66$  (23);  $-25$  (24);  $-0,7057$  (25);  $0$  (26);  $0,7057$  (27);  $-25$  (28)

жидкости, структура течения качественно не меняется. Остальные ветви бифуркационной диаграммы, изображающие поведение течения, по сравнению с описанным выше случаем, не претерпевают качественных изменений.

## 8. Заключение

В работе проведено исследование устойчивости и бифуркаций стационарных режимов конвективных течений в наклоняемой прямоугольной полости с соотношением сторон  $b = \sqrt{2}$  для значения числа Прандтля  $Pr = 10$ . Показано, что задача об устойчивости механического равновесия в рассматриваемой

прямоугольной полости сводится к задаче Релея для возмущений с длиной полуволны, равной длине горизонтальной стороны. Первые три критических числа Грасгофа  $Gr_{1,2,3} = 65,75; 131,5; 360,1$  отвечают одно-, двух- и трехвалковым возмущениям.

На описывающей механическое равновесие ветви бифуркационной диаграммы, построенной для угла наклона  $\alpha = 0^\circ$ , с изменением числа Грасгофа в интервале от 0 до  $10 Gr_1$  и при  $Gr = Gr_1$ , или  $Gr = Gr_2$ , или  $Gr = Gr_3$ , в результате вилочной бифуркации отделяется по две ветви, соответствующие одно-, двух- и трехвалковым нелинейным режимам стационарной конвекции. Оценка устойчивости течений показала, что одновалковые режимы не откликаются на относительно малые возмущения, трехвалковые неустойчивы при этом. Двухвалковые режимы неустойчивы до числа Грасгофа  $Gr_2^\pm = 312,9$ , при  $Gr = Gr_2^\pm$  каждая ветвь, соотносящаяся с двухвалковым режимом, посредством вилочной бифуркации разделяется на две неустойчивые и одну устойчивую ветви.

Анализ бифуркационной диаграммы, построенной для малого наклона полости ( $\alpha = 0,1^\circ$ ), выявил, что все вилочные бифуркации для  $\alpha = 0^\circ$ , кроме второй бифуркации равновесия, являются структурно неустойчивыми. Около точки структурно неустойчивой вилочной бифуркации диаграмма для  $\alpha = 0,1^\circ$  представляет собой совокупность ветви, проходящей непрерывно, и двух ветвей, сливающихся в точке седлоузловой бифуркации. На неустойчивой ветви, идущей от точки седлоузловой бифуркации, возникшей вследствие разрушения первой вилочной бифуркации равновесия, имеется точка вилочной бифуркации вблизи второй вилочной бифуркации равновесия, что говорит о её структурной устойчивости.

На плоскости параметров  $(\alpha, Gr)$  построены четыре бифуркационные кривые. Под нижней бифуркационной кривой  $S_{1-}P_1S_{1+}$  для конкретных значений  $(\alpha, Gr)$  существует единственный устойчивый стационарный режим. Для параметров, принимающих значения из области между кривыми  $P_1S_{1-}$  и  $P_2P_{2-}$  ( $P_1S_{1+}$  и  $P_2P_{2+}$ ), бифуркационные диаграммы состоят из трех ветвей. Одна из них непрерывно продолжается из области параметров, лежащей ниже бифуркационной кривой  $S_{1-}P_1S_{1+}$ . В точке седлоузловой бифуркации, соответствующей кривой  $S_{1-}P_1S_{1+}$ , происходит слияние двух других ветвей бифуркационной диаграммы (кроме случая, когда  $\alpha = 0^\circ$ ). На бифуркационной кривой  $P_2^-P_2P_2^+$  проявляется вилочная бифуркация на одной из ветвей диаграммы, в результате которой диаграмма между бифуркационной кривой  $P_2^-P_2P_2^+$  и нижней из бифуркационных кривых  $S_{2-}P_2^+S_{2+}^+$  и  $S_{3-}P_3S_{3+}$  имеет 5 ветвей. При пересечении бифуркационных кривых  $S_{3-}P_3S_{3+}$  и  $S_{2-}P_2^+S_{2+}^+$  образуется еще две и четыре ветви диаграммы, соответственно. Таким образом, для параметров из области над  $S_{2-}P_2^+S_{2+}^+$  и под  $S_{3-}P_3S_{3+}$  диаграмма обладает следующим числом ветвей: 9-ю — над  $S_{3-}P_3S_{3+}$ ; 7-ю — левее  $S_{2-}P_2^+S_{2+}^+$  и правее  $P_2^+S_{2+}^+$ ; 11-ю — над  $S_{3-}P_3S_{3+}$ ; и  $S_{2-}P_2^+S_{2+}^+$ .

Авторы благодарны Е.А. Колчановой за ценные замечания и Т.П. Любимовой за плодотворное обсуждение полученных результатов.

## Литература

1. Шарифулин А.Н., Полудницин А.Н., Кравчук А.С. Лабораторное моделирование нелокального возникновения тропического циклона // ЖЭТФ. – 2008. – Т. 134, № 6. – С. 1269-1273.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Тарунин Е.Л. Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1966. – № 6. – С. 93-99.
3. Mizushima J., Adachi T. Sequential transitions of the thermal convection in a square cavity // J. Phys. Soc. Jpn. – 1997. – Vol. 66. – No. 1. – P. 79-90. DOI
4. Чернатыйский В.И., Шлиомис М.И. Конвекция вблизи критических чисел Релея при почти вертикальном градиенте температуры // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1973. – № 1. – С. 64-70.
5. Чернатыйский В.И. Численное исследование конвекции в горизонтальном цилиндре кругового сечения // Гидродинамика. – 1974. – № 7. – С. 65-82..
6. Cliffe K.A., Winters K.H. A Numerical Study of the Cusp Catastrophe for Bénard Convection in Tilted Cavities // J. Comput. Phys. – 1984. – Vol. 54. – No. 3. – P. 531-534. DOI
7. Никитин А.И., Шарифулин А.Н. О бифуркациях стационарных режимов тепловой конвекции в замкнутой полости порождаемых особенностью типа сборки Уитни // Процессы тепло- и массопереноса вязкой жидкости. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. – С. 32-39.
8. Mizushima J., Hara Y. Routes to Unicellular Convection in a Tilted Rectangular Cavity // J. Phys. Soc. Jpn. – 2000. – Vol. 69. – No. 8. – P. 2371-2374. DOI
9. Сагитов Р.В., Шарифулин А.Н. О стационарных решениях конвекции в обобщенной модели Лоренца // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. – 2006. – № 1. – С. 86-90.
10. Сагитов Р.В., Шарифулин А.Н. Монотонная и колебательная устойчивость стационарных режимов конвекции в обобщенной модели Лоренца // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. – 2006. – № 1 – С. 91-97.

11. Sagitov R.V., Sharifulin A.N. Аналитическое исследование устойчивости стационарных режимов тепловой конвекции в наклоняемой замкнутой полости в маломодовом приближении // Уч. зап. Перм. ун-та. Сер. Гидродинамика. – 2007. – № 16. – С. 259-275.
12. Sagitov R. V., Sharifulin A.N. Устойчивость стационарной тепловой конвекции в наклоняемой прямоугольной полости в маломодовом приближении // Теплофизика и аэромеханика. – 2008. – Т. 15, № 2. – С. 247-256.
13. Adachi T. Stability of natural convection in an inclined square duct with perfectly conducting side walls // Int. J. Heat Mass Transf. – 2006. – Vol. 49. – P. 2372-2380. DOI
14. Шарифулин А.Н., Суслов С.А. Конвективные бифуркации несжимаемой жидкости в наклоняемой полости квадратного сечения // Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах (НПС-2010): Материалы X Международной конференции в двух томах, Пермь, 1-3 ноября 2010 г. – Пермь, 2010. – Т. 2. – С. 315-319.
15. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Тарунин Е.Л. Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1966. – № 5. – С. 56-62.
16. Тарунин Е.Л. Численное исследование свободной конвекции // Уч. зап. Перм. ун-та. Сер. Гидродинамика. – 1968. – № 184, Вып. 1. – С. 135-168.
17. Тарунин Е.Л. Тепловая конвекция в прямоугольной полости, подогреваемой сбоку // Гидродинамика. – 1970. – Вып. 2. – С. 163-175.
18. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. – 228 с.
19. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1982. – 272 с.
20. Тарунин Е.Л., Шайдуров В.Г., Шарифулин А.Н. Экспериментальное и численное исследование устойчивости замкнутого конвективного пограничного слоя // Конвективные течения и гидродинамическая устойчивость. – Свердловск: УНЦ АН СССР. – 1979. – С. 3-16.
21. Torres Alvarez J.F. A study of heat and mass transfer in enclosures by phase-shifting interferometry and bifurcation analysis: дис. – Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2014. – 414 p.
22. Mizushima J., Nakamura T. Repulsion of eigenvalues in the Rayleigh-Bénard problem // J. Phys. Soc. Jpn. – 2002. – Vol. 71. – P. 677-680. DOI
23. Шелухин В.В., Хрустенко У.А. Об одном условии проскальзывания для уравнений вязкой жидкости // ПМТФ. – 2013. – Т. 54. – № 5. – С. 101-109.
24. Thompson P.A., Troian S.M. A general boundary condition for liquid flow at solid surfaces // Nature. – 1997. – Vol. 389. – P. 360-362. DOI
25. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. – 1963. – No. 20. – P. 130-141. DOI
26. Whitney H. On singularities of Mappings of Euclidean Spaces I. Mappings of the Plane into the Plane // Ann. Math. – 1955. – Vol. 62. – No. 3. – P. 374-410. DOI
27. Aziz A. Hydrodynamic and thermal slip flow boundary layers over a flat plate with constant heat flux boundary condition // Comm. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat. – 2010. – Vol. 15. – Is. 3. – P. 573-580. DOI
28. Kuznetsova D.V., Sibgatullin I.N. Transitional regimes of penetrative convection in a plane layer // Fluid Dynam. Res. – 2012. – Vol. 44. – No. 3. – 031410. DOI
29. Whitehead J.A. Convection driven by temperature and composition flux with the same diffusivity // Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. – 2017. – Vol. 111. – Is. 4. – P. 229-248. DOI
30. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
31. Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея-Бенара. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 248 с.

## References

1. Sharifulin A.N., Poludnitsin A.N., A.N., Kravchuk A.S. Laboratory Scale Simulation of Nonlocal Generation of a Tropical Cyclone. *JETP*, 2008, vol. 107, no.6, pp.1090-1093. DOI
2. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M., Tarunin E.L. Numerical study of convection of a liquid heated from below. *Fluid Dyn.*, 1966, vol. 1, no. 6, pp. 58-62. DOI
3. Mizushima J., Adachi T. Sequential transitions of the thermal convection in a square cavity. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1997, vol. 66, no. 1, pp. 79-90 DOI
4. Chernatynskii V. I., Shliomis M. I. Convection near critical Rayleigh numbers with an almost vertical temperature gradient. *Fluid Dyn.*, 1973, vol. 8, no. 1, pp. 55-61. DOI
5. Chernatynskiy V. I. Chislennoye issledovaniye konveksii v gorizonta'nom tsilindre krugovogo secheniya [Numerical study of convection in a horizontal cylinder of circular cross-section]. *Gidrodinamika*, 1974, no. 7, pp. 65-82.
6. Cliffe K.A., Winters K.H. A Numerical Study of the Cusp Catastrophe for Bénard Convection in Tilted Cavities. *J. Comput. Phys.*, 1984, vol. 54, no. 3, pp. 531-534. DOI
7. Nikitin A. I., Sharifulin A. N. Concerning the bifurcations of steady-state thermal convection regimes in a closed cavity due to the Whitney folding-type singularity. *Heat transfer – Sov. Res.*, 1989, vol. 21, no. 2, pp. 213-221.
8. Mizushima J., Hara Y. Routes to Unicellular Convection in a Tilted Rectangular Cavity. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 2000, vol. 69, no. 8, pp. 2371-2374. DOI
9. Sagitov R.V., Sharifulin A.N. O stacionarnykh resheniyakh konveksii v obobshchennoy modeli Lorentsa [On stationary solutions of convection in the generalized Lorentz model]. *Vestnik PGTU. Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2006, no. 1, pp. 86-90.
10. Sagitov R.V., Sharifulin A.N. Monotonnaya i kolebatel'naya ustoychivost' stacionarnykh rezhimov konveksii v obobshchennoy modeli Lorentsa [Monotonic and oscillatory stability of stationary regimes of convection in the generalized Lorentz model]. *Vestnik PGTU. Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2006, no. 1, pp. 91-97.



11. Sagitov R.V., Sharifulin A.N. Analiticheskoye issledovaniye ustoychivosti statsionarnykh rezhimov teplovoy konveksii v naklonyayemoy zamknutoy polosti v malomodovom priblizhenii [Analytical study of the stability of stationary regimes of thermal convection in a tilt closed cavity in the low-mode approximation]. *Uchenyye zapiski permskogo universiteta. Gidrodinamika*, 2007, no. 16, pp. 259-275.
12. Sagitov R.V., Sharifulin A.N. Stability of steady thermal convection in a tilted rectangular cavity in low-mode approximation. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2008, vol. 15, no. 2, pp. 233-241. DOI
13. Adachi T. Stability of natural convection in an inclined square duct with perfectly conducting side walls. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2006, vol. 49, pp. 2372-2380. DOI
14. Sharifulin A.N., Suslov S.A. 10th Int. conf. "High-performance parallel computing on cluster systems" (HPC-2010), 1-3 November 2010, Perm, Perm State Polytechnical University, 2010. Part 2, pp. 315-319.
15. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M., Tarunin E. L. Numerical investigation of convective motion in a closed cavity. *Fluid Dyn.*, 1966, vol. 1, no. 5, pp. 38-42. DOI
16. Tarunin E.L. Chislennoye issledovaniye svobodnoy konveksii [Numerical investigation of free convection]. *Uchenyye zapiski permskogo universiteta. Gidrodinamika*, 1968, no. 184, is. 1, pp. 135-168.
17. Tarunin E.L. Teplovaya konveksiya v pryamougol'noy polosti, podogrevayemoy sboku [Thermal convection in a rectangular cavity heated from the side]. *Gidrodinamika*, 1970, no. 2, pp. 163-175.
18. Tarunin E.L. *Vychislitel'nyy eksperiment v zadachakh svobodnoy.* – Irkutsk: Izd-vo Irkut. un-ta, 1990. – 228 p.
19. Samarskiy A.A. *Vvedeniye v chislennyye metody.* – M.: Nauka, 1982. 272 p.
20. Tarunin E.L., Shaydurov V.G., Sharifulin A.N. Eksperimental'noye i chislennoye issledovaniye ustoychivosti zamknutogo konvektivnogo pogrannichnogo sloya [Experimental and numerical study of the stability of a closed convective boundary layer] // *Konvektivnyye techeniya i gidrodinamicheskaya ustoychivost'* [Convective flows and hydrodynamic stability]. Sverdlovsk: UNTS AN SSSR. 1979. Pp. 3-16.
21. Torres Alvarez J.F. *A study of heat and mass transfer in enclosures by phase-shifting interferometry and bifurcation analysis.* PhD Dissertation, Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2014. xxxii+382 p.
22. Mizushima J., Nakamura T. *Repulsion of eigenvalues in the Rayleigh-Bénard problem.* *J. Phys. Soc. Jpn.*, 2002, vol. 71, pp. 677-680. DOI
23. Shelukhin V.V., Khristenko U.A. On one slip condition for the equations of a viscous fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 5, pp. 773-780. DOI
24. Thompson P.A., Troian S.M. A general boundary condition for liquid flow at solid surfaces. *Nature*, 1997, vol. 389, pp. 360-362. DOI
25. Lorenz E. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 1963, no. 20, pp. 130-141. DOI
26. Whitney H. On singularities of Mappings of Euclidean Spaces I. Mappings of the Plane into the Plane. *Ann. Math.*, 1955, vol. 62, no. 3, pp. 374-410. DOI
27. Aziz A. Hydrodynamic and thermal slip flow boundary layers over a flat plate with constant heat flux boundary condition. *Comm. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.*, 2010, vol. 15, is. 3, pp. 573-580. DOI
28. Kuznetsova D.V., Sibgatullin I.N. Transitional regimes of penetrative convection in a plane layer. *Fluid Dynam. Res.*, 2012, vol. 44, no. 3, 031410. DOI
29. Whitehead J. A. Convection driven by temperature and composition flux with the same diffusivity. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, 2017, vol. 111, is. 4, pp. 229-248. DOI
30. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. *Convective stability of incompressible fluids.* Jerusalem, Keter Publishing House, 1976. 330 p. DOI
31. Getling A.V. *Rayleigh-Bénard convection: structures and dynamics.* Singapore, World Scientific, 1998. DOI

Поступила в редакцию 17.01.2018; опубликована в электронном виде 05.07.2018

---

Сведения об авторах

Сагитов Рафиль Вафович, б/с, асс., Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПННИУ), 614990, Пермь, ул. Букирева, д. 15; e-mail: sagitovrv@mail.ru

Шарифулин Альберт Нургалеевич, кфмн., доц, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, Пермь, Комсомольский пр.-т, д. 29; e-mail: sharifulin@bk.ru