

DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.2.13

УДК 539.3:534.1

ВОЛНЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГРУППОВОЙ СКОРОСТЬЮ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Г.В. Филиппенко

*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация*

Изучаются свободные колебания бесконечной тонкой цилиндрической оболочки типа оболочки Кирхгофа–Лява, заполненной жидкостью. Эта модель часто берётся за основу при проектировании различных трубопроводов. Волны, распространяющиеся в подобных системах, вызывают колебания и вибрации как мест сочленений их элементов, так и поддерживающих опор, что может сказаться на прочностных свойствах всей системы. В данной работе особое внимание уделено исследованию волн с отрицательной групповой скоростью. Зависимость процессов от времени предполагается гармонической. Рассматриваются совместные колебания оболочки и жидкости. Используется точное дисперсионное уравнение, полученное в результате аналитического решения задачи. Это уравнение асимптотически исследуется в окрестности параметров, при которых оно имеет кратные корни. Обсуждается качественное различие асимптотик дисперсионных кривых при кратных корнях и в регулярном случае. Проверяются условия возникновения отрицательной групповой скорости и влияние на её величину жидкости и параметров системы. Анализ групповой скорости дополняется сравнительным анализом динамических и кинематических величин, характеризующих процессы в системе. Устанавливаются возможные области применимости выявленных эффектов.

Ключевые слова: распространение волн, цилиндрическая оболочка, колебания оболочек

WAVES WITH NEGATIVE GROUP VELOCITY IN CYLINDRICAL SHELL FILLED WITH LIQUID

G. V. Filippenko

*Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, Saint-Petersburg, Russian Federation
Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation*

The problem of joint oscillations of an infinite thin cylindrical shell filled with liquid is investigated in the framework of the Kirchoff–Love model, which is often used for modeling various pipelines. The waves caused by different sources of vibrations can produce vibrations of supports and connections in the pipelines, which may affect the strength properties of the system. Special attention is given to the waves with negative group velocity. The time dependence of the processes under study is supposed to be harmonic. Joint oscillations of the shell and the fluid are considered. The free vibrations of the system are determined. An exact dispersion equation that is based on the exact analytical solution of the problem is used. This equation is asymptotically explored in the neighborhood of the point where it has multiple roots. The propagating waves are analyzed. Much attention is given to studying the waves with negative group velocity in the neighborhood of the bifurcation point of dispersion curves. The asymptotics of dispersion curves are used in the neighborhood of bifurcation point for this case. The difference between the types of asymptotics for the regular case and for the case of bifurcation is discussed. The analysis of arising effects is fulfilled in terms of kinematic and dynamic variables and in terms of wave group velocity. The relative advantages and disadvantages of these approaches are discussed. The dependence of dynamic and kinematic variables on the relative thickness of the shell, the mode number and other parameters of system is viewed. The possible fields of applicability of the gained effects are established.

Key words: wave propagation, cylindrical shell, shell vibrations

1. Введение

Цилиндрические оболочки давно и активно исследуются в связи с широким применением в технике и строительстве. С их помощью моделируются акустические волноводы, различные трубопроводы и опоры гидротехнических сооружений [1–9]. Наличие жидкости внутри или снаружи оболочки значительно усложняет характер волновых процессов и требует отдельного исследования. Так, в работах [1, 3–7] изучались волновые процессы в системе «оболочка, заполненная жидкостью», а в [8, 9] — в системе «оболочка, окруженная жидкостью». Для получения более полной картины процессов, происходящих в различных оболочках, помимо кинематических и динамических характеристик, в последнее время используется энергетический анализ, в том числе и анализ потоков энергии [1–3, 5, 8, 9, 13–16].

При определённом сочетании параметров как в случае «сухой» оболочки, так и оболочки, заполненной жидкостью, возможно появление волны с отрицательной групповой скоростью. Факт, что у такой волны направление распространения (фазовая скорость) и направление распространения энергии (групповая скорость) противоположны, наряду с теоретическим интересом имеет и практическое значение. Например, если под влиянием параметров вклад данного типа волны при работе источника колебаний становится существенным, то это может препятствовать отводу энергии от источника и, как следствие, приводить к увеличению амплитуд колебаний в его окрестности и отразиться на прочностных характеристиках конструкции.

В работе [16] рассмотрена модель «сухой» цилиндрической оболочки при гипотезах Кирхгофа–Лява, где эффект отрицательной групповой скорости также имеет место, но для экзотически высоких мод. Однако простота и наглядность выбранной модели Кирхгофа–Лява [10] позволили спрогнозировать основные эффекты отрицательной групповой скорости и для оболочки с жидкостью внутри неё. Дальнейшие исследования, в том числе и приводимые в представляемой статье, показали обоснованность полученных результатов.

В данной работе влияние жидкости на формирование отрицательной групповой скорости в системе «оболочка, заполненная жидкостью» изучается на основе аналитического решения задачи и его асимптотического исследования. В отличие от «сухой» оболочки эффект отрицательной групповой скорости проявляется уже на первых модах Устанавливаются общие черты и различия в поведении обеих систем. Для этого часть результатов, установленных ранее для «сухой» оболочки, аналитически обосновывается и уточняется.

2. Постановка задачи

Постановка задачи и способ построения решения такие же, как и в работе [9]. Рассмотрим совместные свободные колебания бесконечно протяженной цилиндрической оболочки и полностью заполняющей её жидкости. Введём координаты: цилиндрические (r, φ, z) , где ось z совпадает с осью цилиндра, и локальные $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{k})$, где \mathbf{t}, \mathbf{n} — соответственно касательный и нормальный к оболочке единичные векторы, а вектор \mathbf{k} — единичный вектор вдоль оси z . В качестве переменных, описывающих акустическое и вибрационное поля в системе, выберем акустическое давление в жидкости $P(r, \varphi, z)$ и вектор смещений оболочки $\mathbf{u}(\varphi, z)^T = (u_r, u_z, u_\varphi)^T$ (T — знак операции транспонирования).

Акустическое давление в жидкости подчиняется уравнению Гельмгольца:

$$(\Delta + k^2)P(r, z, \varphi) = 0, \quad 0 \leq r < R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty. \quad (1)$$

Здесь: $k = \omega/c_w$ — волновое число в жидкости, где c_w — скорость распространения звука в жидкости; ω — частота; R — радиус срединной поверхности цилиндрической оболочки. Зависимость всех процессов от времени предполагаем гармонической, а временной фактор $e^{-i\omega t}$ условимся всюду опускать.

На границе оболочка–жидкость имеют место безотрывность движения жидкости и цилиндра

$$u_n(z, \varphi) = \frac{1}{\rho_w \omega^2} \frac{\partial P(r, z, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=R-h/2} \quad (2)$$

и баланс сил, действующих на цилиндр:

$$\frac{\rho c_s^2}{R^2} \mathbf{L}_w \mathbf{u} = (0, 0, P)^T. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{L}_w — линейный матричный дифференциальный оператор оболочки типа оболочки Кирхгофа–Лява [10], который можно записать в виде:

$$\mathbf{L}_w \equiv [L_{ij}] = w^2 \mathbf{I} + \mathbf{L} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где $w = \omega R/c_s$ — безразмерная частота колебаний оболочки, \mathbf{I} — единичный оператор, а \mathbf{L} — дифференциальный оператор вида:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \alpha_1 [\partial_\varphi^2 + \nu_- \partial_z^2] & \nu_+ \partial_z \partial_\varphi & \partial_\varphi (1 + 2\alpha^2 [1 - \partial_\varphi^2 - \partial_z^2]) \\ L_{21} & \nu_- \partial_\varphi^2 + \partial_z^2 & \nu \partial_z \\ L_{31} & L_{32} & \alpha^2 (2\partial_\varphi^2 - 1 + 2\nu \partial_z^2 - [\partial_\varphi^2 + \partial_z^2]^2) - 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Здесь $L_{21} = L_{12}$, $L_{31} = -L_{13}$, $L_{32} = -L_{23}$, $\partial_z := R \partial/\partial z$, $\partial_\varphi := \partial/\partial \varphi$, $\alpha_\pm = 1 + 4\alpha^2$, $\nu_\pm = (1 \pm \nu)/2$, а также введены следующие обозначения: ρ_w — плотность жидкости; $\rho = \rho_s h$ — поверхностная плотность, где h — толщина оболочки; $c_s = \sqrt{E/((1-\nu^2)\rho_s)}$ — скорость распространения волн деформации срединной

поверхности цилиндрической оболочки, где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ρ_s — объёмная плотность материала оболочки. Установлены безразмерные параметры, характеризующие оболочку: параметр относительной толщины оболочки $\alpha^2 = (1/12)(h/R)^2$ (в теории тонких оболочек он предполагается малым: $\alpha < 0,015$, то есть $h/R < 0,05$ [17]); относительная скорость $c = c_s/c_w$; относительная плотность оболочки $\rho^* = \rho_s/\rho_w$.

Граничные условия дополняются условием на бесконечности. Рассматриваются однородные волны, бегущие в системе вдоль оси z из $-\infty$ в $+\infty$.

3. Общее представление вибрационного поля

Решение задачи аналогично решениям в работах [5], [9]. Вибрационные и акустические поля в системе полностью описываются парой (\mathbf{u}, P) . Учтем, что, в соответствии с уравнением неразрывности, нормальные смещения u_n оболочки выражаются через давление P . Поэтому независимыми являются только переменные u_r, u_z и P . Для дальнейших выкладок удобно ввести вектор $(u_r, u_z, P)^T$ по формуле:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_z \\ P \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} u_r \\ u_z \\ P \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_w \omega^2} \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В этих терминах уравнение (3) можно представить как

$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} u_r \\ u_z \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{0}; \quad \mathbf{S} = \mathbf{L}\mathbf{M} - \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \frac{w^2}{\rho \omega^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_z \\ P \end{pmatrix} = A_s e^{i\lambda z} \begin{pmatrix} \zeta \sin(m\varphi) \\ \xi \cos(m\varphi) \\ \gamma J_m(r\sqrt{k^2 - \lambda^2}) \cos(m\varphi) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

полагая $|\zeta|^2 + |\xi|^2 + |\gamma|^2 = 1$, а $m = 0, 1, 2, \dots$. Здесь: J_m — функция Бесселя с индексом m ; A_s, ζ, ξ, γ — произвольные константы; λ — искомое волновое число.

Подставляя (7) в (6), приходим к однородной алгебраической системе

$$\mathbf{S}^* \mathbf{x} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{x} = (\zeta, \xi, \gamma)^T, \quad (8)$$

где матрица \mathbf{S}^* получается в результате действия оператора \mathbf{S} на вектор $e^{i\lambda z} (\zeta \sin(m\varphi), \xi \cos(m\varphi), \gamma J_m(r\sqrt{k^2 - \lambda^2}) \cos(m\varphi))^T$. Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к дисперсионному уравнению

$$\det \mathbf{S}^* = 0. \quad (9)$$

Поскольку в статье рассматриваются бегущие волны в жидкости и оболочке, то далее для заданной частоты будем находить только вещественные положительные корни λ этого уравнения (заметим, что если $k < \lambda$, то функции Бесселя $J_m(r\sqrt{k^2 - \lambda^2})$ превращаются в модифицированные функции Бесселя $I_m(r\sqrt{\lambda^2 - k^2})$). После подстановки такого корня в систему (8) находим собственный вектор \mathbf{x} и, следовательно, вид акустического и вибрационного полей в системе.

Для наглядности изложения будет удобно перейти от размерных волновых чисел λ к безразмерным волновым числам $\lambda_* := \lambda R$ (в дальнейшем символ «*» у λ опускаем).

4. Асимптотический анализ дисперсионного уравнения

4.1. «Сухая» оболочка

Сначала обратимся к частному случаю — «сухой» оболочке [16]. При этом дисперсионное уравнение (9) упрощается и приобретает вид

$$\det \mathbf{L}_w^* = 0, \tag{10}$$

где $\mathbf{L}_w^* = w^2 \mathbf{I} + \mathbf{L}^*$, а операторы \mathbf{L}_w^* , \mathbf{L}^* — Фурье-образы операторов \mathbf{L}_w , \mathbf{L} . Уравнение (9) — это бикубическое уравнение относительно w^2 . Оно имеет три вещественных неотрицательных корня (при параметрах, отвечающих оболочке Кирхгофа–Лява). Эти корни, как функции λ , определяют три дисперсионных кривых на плоскости (w, λ) :

$$w_i(\lambda) \equiv \sqrt{w_i^2(\lambda^2)} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Их начальные точки обозначим: $w_i \equiv w_i(0)$, где $i = 1, 2, 3$, $w_1 < w_2 < w_3$; $w_2 = m\sqrt{v_-}$. На рисунке 1а, где показана зависимость от w безразмерных волновых чисел λ , этим дисперсионным кривым отвечают кривые, маркированные буквами *A, B, C*, соответственно (об остальных кривых, изображённых на рисунке, речь пойдёт позже).

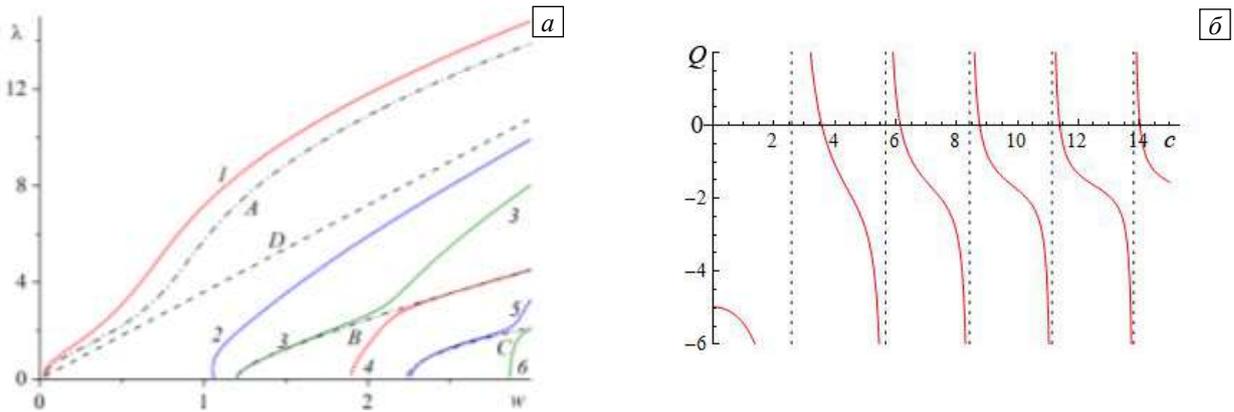


Рис. 1. Дисперсионные кривые оболочки с жидкостью для $m = 2$ (а) и условие кратных корней (б)

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести алгебраические дополнения $M_{i,j}(w^2, \lambda^2)$ матрицы \mathbf{L}_w^* ($i, j = 1, 2, 3$). В этих терминах уравнение для нахождения w_1, w_3 приобретает вид:

$$M_{2,2}(w^2, 0) = 0. \tag{11}$$

Левая часть дисперсионного уравнения (10) (и уравнения (9) тоже) является неявной функцией своих аргументов — вторых степеней w и λ . В случае выполнения условия существования обратной функции (или, что то же, локальной разрешимости уравнения (9)), можно явно выразить w через λ (этот случай назовём регулярным). При этом асимптотическое представление дисперсионных кривых при $\lambda \rightarrow 0$ становится следующим:

$$w_j^2(\lambda) = w_j^2 + B_j \lambda^2 + O(\lambda^4), \quad B_j > 0 \quad (j = 1, 2, 3). \tag{12}$$

При специальном выборе параметров m и α может возникнуть двукратный корень $w = w_2$ уравнения (10). Это достигается при больших номерах мод m . Грубая оценка показывает, что $m \geq 42$ [16]. Данный корень должен удовлетворять уравнению

$$M_{2,2}(w_2^2, 0) = 0 \quad (13)$$

относительно m и α . В таком случае начальные точки w_1 и w_2 дисперсионных кривых A и B на рисунке 1а совпадают, и их абсциссы равны $w_2 \equiv m\sqrt{v_-}$. Соответствующие кривые $w_1(\lambda)$ и $w_2(\lambda)$ будем обозначать как левая — $w_-(\lambda)$, и правая — $w_+(\lambda)$, ветви дисперсионной кривой. В этом, уже не регулярном случае, асимптотическое представление для ветвей в окрестности их точки зарождения $w = w_2$ приходится искать в виде:

$$w^2(\lambda) = w_2^2 + A\lambda + B\lambda^2 + O(\lambda^3). \quad (14)$$

Этот случай, в отличие от регулярного, назовем для краткости «случаем кратных корней». После подстановки (14) в (10) получаются явные выражения для коэффициентов A и B , которые здесь не приводятся ввиду их громоздкости (их асимптотика будет показана ниже).

Условие (13) может быть преобразовано в приближении больших m (соответственно малых значений $\varepsilon = 1/m$) и при ограниченных значениях параметра $p = m\alpha$ (который характеризует «волновую толщину» оболочки [16]):

$$p^2 = v_- + \frac{3v_-(1+2v_-)}{(1-v_-)}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4). \quad (15)$$

Подставляя (14) в (10) и используя (15), находим асимптотические представления для коэффициентов A и B :

$$A = \pm 4v_- + O(\varepsilon^2), \quad B = \frac{3v_-}{2} + O(\varepsilon^2).$$

Видно, что коэффициенты A и B в первом приближении не зависят от номера моды m . Тогда все соответствующие дисперсионные кривые для различных m (в случае кратных корней) изображаются одной и той же параболой в переменных (w^2, λ) . Это, в некотором смысле, говорит о подобии показанных волновых процессов.

В переменных (w, λ) асимптотические представления для w имеют вид:

$$w_{\pm}(\lambda) = w_2 \pm a\lambda + b\lambda^2 + O(\lambda^3), \quad a = \frac{1}{2w_2}\sqrt{A^2}, \quad b = \frac{1}{2w_2}\left(B - \left(\frac{A}{2w_2}\right)^2\right) > 0. \quad (16)$$

Отсюда получаем безразмерную групповую скорость $v_g \equiv \frac{dw}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}$, а также диапазоны значений волновых чисел $\delta\lambda$ и частот δw , при которых наблюдается отрицательная групповая скорость:

$$v_g = \pm a, \quad \delta\lambda = \frac{a}{2b}, \quad \delta w = \frac{a^2}{4b}. \quad (17)$$

Учитывая выведенные для A и B выражения, получаем:

$$b = \frac{3\sqrt{v_-}}{4}\varepsilon + O(\varepsilon^3), \quad |v_g| = a = 2\sqrt{v_-}\varepsilon + O(\varepsilon^3), \quad \delta\lambda = \frac{4}{3} + O(\varepsilon^2), \quad \delta w = \frac{4\sqrt{v_-}}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^3). \quad (18)$$

Таким образом, наибольшее отрицательное значение групповой скорости v_g достигается при $\lambda \rightarrow 0$, при этом групповая скорость волн, отвечающая дисперсионным кривым w_- и w_+ , имеет противоположные знаки. При $v = 0,28$ (материал оболочки — сталь) эти формулы трансформируются в следующие:

$$\frac{dw}{d\lambda} = \frac{1,2}{m} + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \quad \delta\lambda = \frac{4}{3} + O\left(\frac{1}{m^2}\right), \quad \delta w = \frac{0,8}{m} + O\left(\frac{1}{m^3}\right). \quad (19)$$

Формулы (15)–(19) являются обобщением и уточнением аналогичных соотношений, найденных в [16] другим способом. Заметим, что дисперсионное уравнение «сухой» оболочки (10) исследовалось в [8], [9], [11], [12]. В данной работе проводится его более подробный анализ в приложении к задаче колебаний с отрицательной групповой скоростью системы «оболочка, заполненная жидкостью».

4.2. Оболочка с жидкостью

В случае оболочки с жидкостью решается уравнение (9). Соответствующие дисперсионные зависимости образуют кривые, которые на рисунке 1а маркируются цифрами 1–6. Кривые так и будем называть в дальнейшем: «первая», «вторая» и так далее. Прямая D — это дисперсионная кривая волны в жидкости при условии, если бы оболочка отсутствовала, и рассматривалось распространение волны в безграничном пространстве.

Дисперсионное уравнение (9) может быть переписано в виде:

$$\frac{f(x)}{x} \Big|_{x=\sqrt{w^2 c^2 - \lambda^2}} = \frac{1}{w^2(\lambda)} \frac{\prod_{j=1}^{j=3} [w^2(\lambda) - w_j^2(\lambda)]}{\prod_{j=4}^{j=5} [w^2(\lambda) - w_j^2(\lambda)]}; \quad f(x) \equiv -\frac{1}{M} \frac{J_m(x)}{\partial_x J_m(x)}; \quad M \equiv \rho^* \alpha \sqrt{12}. \quad (20)$$

Здесь $w_j(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$, — корни уравнения (8), а $w_j(\lambda)$, $j = 4, 5$, — корни уравнения

$$M_{3,3}(w^2, \lambda^2) = 0, \quad (21)$$

биквадратного относительно своих переменных (w, λ) . Этот минор отвечает оператору «сухой» оболочки и регулярному случаю, поэтому асимптотическое решение уравнения (21) можно искать в виде:

$$w_j^2(\lambda) = w_j^2 + B_j \lambda^2 + O(\lambda^4) \quad (j = 4, 5); \quad w_4 = w_2.$$

При $\lambda = 0$ уравнение (9) имеет очевидный корень $w = m\sqrt{v_-}$, который не зависит от параметров жидкости и совпадает с w_2 — частотой зарождения второй дисперсионной кривой «сухой» оболочки. Чтобы корень был второй кратности, необходимо выполнить условие:

$$Q(c) \equiv \frac{f(x)}{x} \Big|_{x=cw_2} - \frac{(w_2^2 - w_1^2)(w_3^2 - w_2^2)}{w_2^2(w_5^2 - w_2^2)} = 0. \quad (22)$$

График левой части (22) как функции относительной скорости c изображён на рисунке 1б. В случае кратного корня асимптотическое представление решения уравнения (20) при $\lambda \rightarrow 0$ будет выглядеть как (14). После подстановки (14) в дисперсионное уравнение (20) определим коэффициенты A и B разложения:

$$A = \pm \sqrt{\frac{r}{s+t}}; \quad 2B = B_4 - \frac{\beta}{s+t} + \frac{r}{(s+t)^2} \left(\frac{c^2 \psi}{8\alpha} - \frac{q}{w_5^2 - w_2^2} \right), \quad (23)$$

где

$$r = \frac{(B_2 - B_4)(w_2^2 - w_1^2)(w_3^2 - w_2^2)}{(w_5^2 - w_2^2)}, \quad s = 1 + q, \quad t = -\frac{1}{2} \frac{\partial_x(x f(x))}{x} \Big|_{x=cw_2},$$

$$\beta = \frac{(w_2^2 - w_1^2)}{(w_5^2 - w_2^2)^2} (B_2(w_5^2 - w_3^2) + (B_5 - B_4)(w_2^2 - w_3^2)) + \frac{(B_4 - B_3)(w_2^2 - w_1^2) - (B_1 + B_2 - B_4)(w_2^2 - w_3^2)}{(w_2^2 - w_5^2)}, \quad (24)$$

$$q = \frac{(w_5^2 - w_1^2)(w_3^2 - w_5^2)}{(w_5^2 - w_2^2)^2}, \quad \psi = \frac{(x f'(x))'x - f(x)}{x^3} \Big|_{x=cw_2}.$$

Элементарный анализ выражений (24) показывает, что справедливо неравенство $r, s, t > 0$, и квадратный корень в (23) является определённым. В частности, неравенство $t > 0$ иллюстрируется поведением функции

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{12}} \frac{1}{\rho^* x} \partial_x \left(\frac{x J_m(x)}{\partial_x J_m(x)} \right) > 0, \quad x > 0, \tag{25}$$

выражение которой лишь постоянным положительным множителем отличается от вида t (как функции $c w_2$) (Рис. 2а).

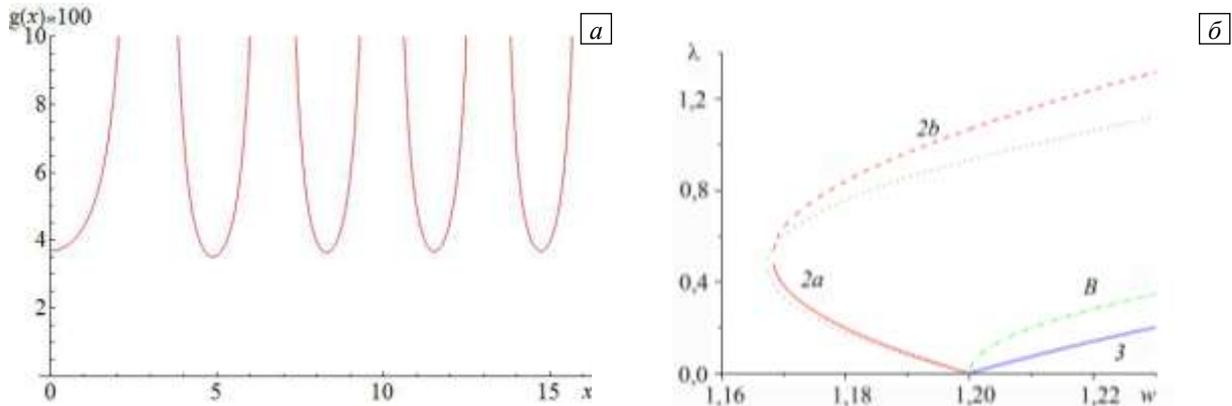


Рис. 2. Поведение функции $g(x)$ в зависимости от x (а) и случай кратных корней (б)

Рассмотрим асимптотические по α (при $\alpha \ll 1$) представления коэффициентов, фигурирующих в (24):

$$w_1 = \frac{m(m^2 - 1)}{\sqrt{1 + m^2}} \alpha + O(\alpha^2), \quad w_2 = m\sqrt{v_-}, \quad w_3 = \sqrt{1 + m^2} + O(\alpha^2), \quad w_4 = w_2, \quad w_5 = m\sqrt{\alpha_1} = m + O(\alpha^2)$$

$$B_1 = O(\alpha^2), \quad B_2 = v_- \left[1 + \frac{4v_+}{1 + m^2 v_+} \right] + O(\alpha^2), \quad B_3 = \frac{m^2 v_+ + v_-^2}{m^2 v_+ + 1} + O(\alpha^2), \tag{26}$$

$$B_4 = 1 - \frac{v_+^2}{(\alpha_1 - v_-)} = v_- + O(\alpha^2), \quad B_5 = 1 + O(\alpha^2).$$

Подставляя эти выражения в (24), находим асимптотические представления для A и B . Ограничимся выражением для A (для B таковое не приводится ввиду его громоздкости):

$$A^2 = (4v_-^2 + O(\alpha^2)) \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{m^2 v_+^2} + O(\alpha^2) \right]^{-1}, \quad \tau = \frac{2\alpha}{g(cw_2)}. \tag{27}$$

Для получения более компактных формул оценки упростим запись A и B при дополнительном предположении, что величина τ также мала (например, для значений параметров системы, которым соответствует рисунок 2а, содержащий график функции $g(x)$, значение τ составляет $\sim 0,244$, что формально удовлетворяет требованию малости). В результате

$$A^2 = 4v_-^2 (\tau + O(\tau^2)), \quad B = v_- + O(\tau^2). \tag{28}$$

В переменных (w, λ) асимптотические представления для w имеют вид (16). Используя (28), приходим к выражениям для коэффициентов a, b в данном разложении. Из (17) можно найти групповую скорость $v_g \equiv \left. \frac{dw}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}$, а также диапазоны значений волновых чисел $\delta\lambda$ и частот $\delta\omega$, при которых наблюдается отрицательная групповая скорость:

$$v_g \approx \pm \frac{1}{m} \sqrt{2v_- \tau}, \quad \delta\lambda \approx \frac{m \sqrt{1 - \tau m^2 v_+}}{1 - v_+ (\tau m^2 + \alpha)}, \quad \delta\omega \approx \frac{m}{2} \frac{\alpha v_+ \sqrt{v_-}}{1 - v_+ (\tau m^2 + \alpha)}. \tag{29}$$

На рисунке 2б в качестве иллюстрации приведена зависимость безразмерных волновых чисел λ от безразмерной частоты w в случае кратных корней, когда вторая и третья дисперсионные кривые оболочки с жидкостью (кривые 2 и 3) выходят из одной точки $w = 1,2$ (по-прежнему будем называть их, соответственно, левой и правой дисперсионными ветвями). Левая ветвь 2 имеет участок 2а с отрицательной групповой скоростью в окрестности малых волновых чисел и последующий участок 2б. Правая ветвь имеет цифровой маркер 3. Кривая В — это вторая дисперсионная кривая «сухой» оболочки. Иллюстрируется эффект, аналогичный обнаруженному для «сухой» оболочки [16]: групповая скорость в окрестности точки кратных корней не равна нулю, одинакова по модулю для обеих выходящих из этой точки дисперсионных ветвей и противоположна по знаку. Однако в оболочке с жидкостью всё происходит на значительно меньших частотах, чем у «сухой» оболочки, и вызвано влиянием присоединённой массы жидкости, увеличивающей инерционные свойства системы.

На этом же рисунке пунктирная линия — это участок дисперсионной кривой с отрицательной групповой скоростью, вычисленной по асимптотическим формулам (16) с учётом (28). Значение модуля групповой скорости при $\lambda \rightarrow 0$, следующее из точного дисперсионного уравнения (20), равно $v_g \approx 0,13$, найденное по асимптотическим формулам (16) с учётом формулу (27) — $v_g \approx 0,14$, а по асимптотическим формулам (16) и формуле (29) — $v_g \approx 0,15$.

Однако групповая скорость становится отрицательной и в случае, когда точки зарождения дисперсионных кривых не совпадают, но достаточно близки друг к другу. Так, на рисунке 1а кривая 2 получает участок с отрицательной групповой скоростью, «отталкиваясь» от кривой 3. Имеем эффект, аналогичный наблюдаемому в «сухой» оболочке [16].

Отметим, что асимптотика дисперсионного уравнения может быть линейной по λ не только для случая кратных корней, но и в регулярном случае (мода $m = 0$), когда рассматривается первая дисперсионная ветка оболочки с жидкостью, стартующая из точки $(\omega, \lambda) = (0, 0)$, и групповая скорость, соответственно, также не равна нулю при $\lambda \rightarrow 0$.

5. Численные результаты

Представленные в статье графические зависимости рассчитывались при определённых значениях характеристик элементов системы оболочка–жидкость. Так, на рисунках 1, 2, 3а, 4б, 5 относительная скорость составляет: $c = c_s/c_w = 3,6$ (соответствует взаимодействию стальной оболочки с водой). На всех рисунках:

- $m = 2$ (кроме Рис. 3б);
- $h/R = 0,019205$ (кроме Рис. 3а и Рис. 6б);
- коэффициент Пуассона $\nu = 0,28$ (кроме Рис. 7а);
- относительная плотность $\rho_s/\rho_w = 7,8$ (кроме Рис. 6б);
- вдоль оси абсцисс откладывается безразмерная частота w (кроме Рис. 1б и 2а).

Для наглядности на рисунках 3, 6 и 7 начало всех дисперсионных кривых приведено к точке $(w, \lambda) = (0, 0)$.

На рисунках 3 и 4а демонстрируется зависимость протяжённости участков дисперсионных кривых с отрицательной групповой скоростью от параметров задачи. Так, на рисунке 3а дисперсионные кривые 1-7 для второй моды соответствуют нарастанию параметра h/R от 0,005 до 0,1. Видно, что наибольшей длины участок дисперсионной кривой с отрицательной групповой скоростью достигает при $h/R = 0,019$, а это не что иное, как случай кратных корней. При этом, если кривые не приводить к одной точке, то при $h/R < 0,019$ они (см. сплошные линии) выходят из точки w_2 , а если $h/R > 0,019$, то кривые (см. штриховые линии) выходят из точек $w < w_2$ (где $w = 1,1605; 1,109; 1,057$, что соотносится с $h/R = 0,025; 0,035; 0,05$). Правая дисперсионная кривая по мере роста параметра h/R как бы «вытесняет» левую (с участком с отрицательной групповой скоростью) из точки w_2 , а сама занимает её место (эффект такой же, как и в «сухой» оболочке [16]).

На рисунке 3б дисперсионные кривые 1-4,6 (им отвечают относительные скорости $c = 4,79; 3,60; 3,07; 2,77; 2,45$) соответствуют модам $m = 1-4, 6$. Для каждой из мод рассматривается первая из возможных дисперсионных кривых, для которой реализуется случай кратных корней. Это вторая по счёту дисперсионная кривая (как на рисунке 1а), и выходит она из точки $w_2 = m\sqrt{v_-}$. Наиболее ярко эффект с отрицательной групповой скоростью виден у первой моды $m = 1$. Здесь имеют место наибольшие отрицательные групповые скорости.

Рассмотрим в точке кратных корней связь относительной и групповой скоростей. По мере роста относительной скорости $c = 3,60; 6,13; 8,69; 11,27$ эту точку последовательно проходят все более высокочастотные ветки с возрастающими номерами: 2, 3, 4, 5 (Рис. 1а). На рисунке 4а они изображены под номерами 1, 2, 3, 4 (заметим, что на этом рисунке кривая В отвечает второй дисперсионной кривой «сухой» оболочки). Видно, что модуль групповой скорости уменьшается с ростом номера ветки.

Вернемся к рисунку 1б, который иллюстрирует уравнение (22). Его первое слагаемое содержит параметры c и ρ^* , характеризующие влияние жидкости, а во второе слагаемое входят только параметры α и ν «сухой» оболочки. Корни уравнения (22) c_j ($j = 1, 2, \dots$) могут быть проанализированы,

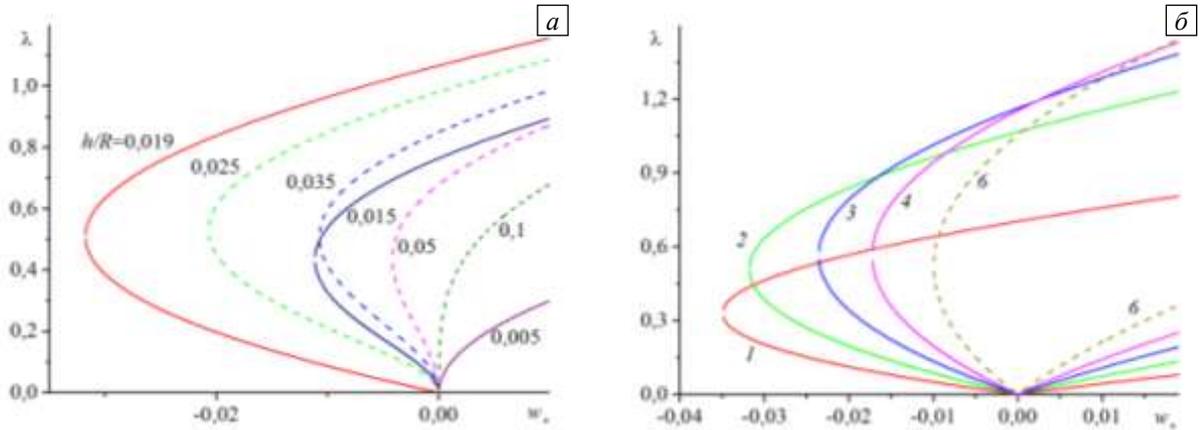


Рис. 3. Дисперсионные кривые для различных значений параметра h/R (а) и мод 1-4, 6 (б)

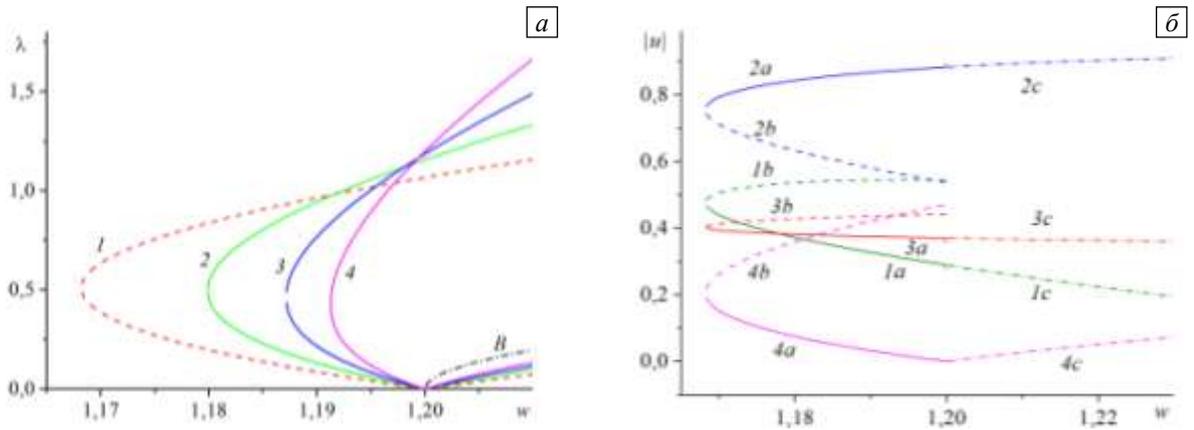


Рис. 4. Дисперсионные кривые для различных значений параметра c (а) и компоненты u_r, u_z, u_n, u_p (соответственно, кривые 1, 2, 3, 4) обобщенного вектора смещений для моды $m = 2$ (б)

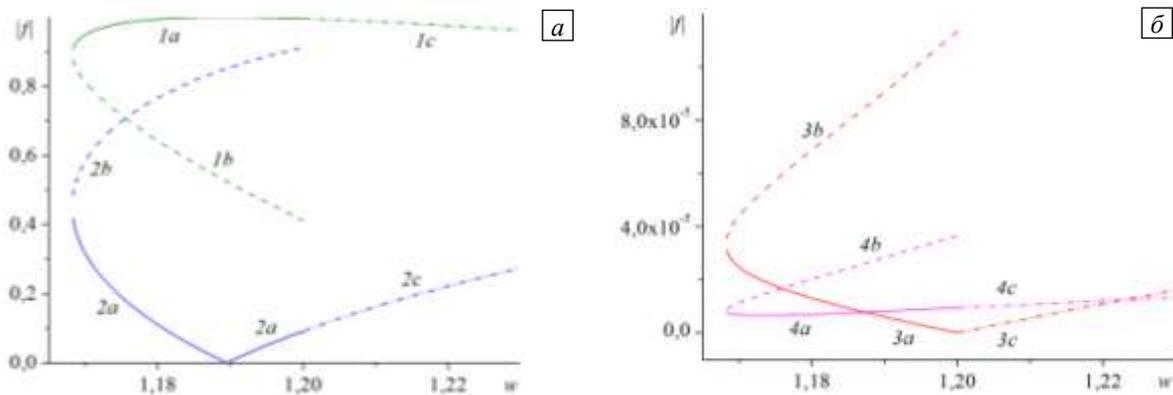


Рис. 5. Компоненты обобщенного вектора сил f_r, f_z (кривые 1, 2) (а) и f_n, f_p (кривые 3, 4) (б)

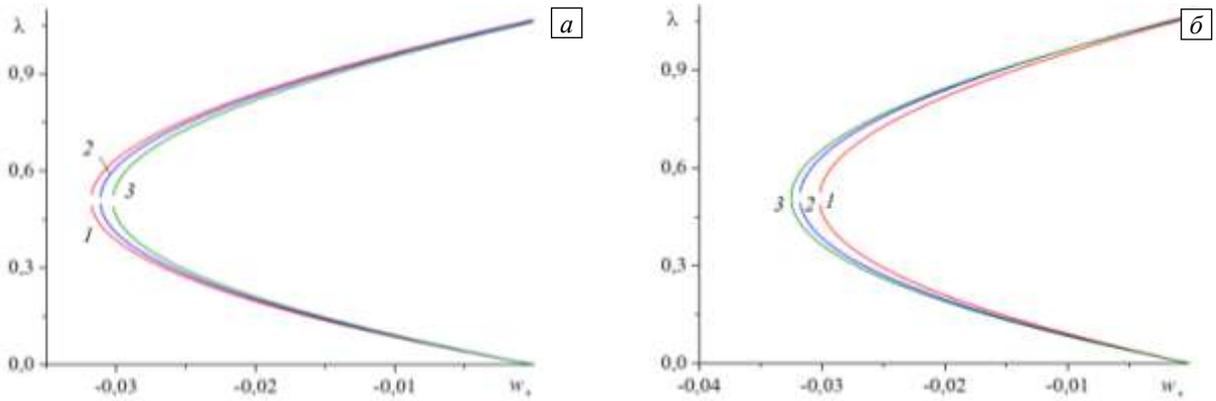


Рис. 6. Дисперсионные кривые 1, 2, 3 для различных значений параметров: $\rho' = 6, 2; 7, 0; 7, 8$ и $c = 3, 7; 3, 65; 3, 6$ (а) и $h/R = 0, 0152; 0, 0192; 0, 0232$ и $c = 3, 7; 3, 65; 3, 6$ (б)

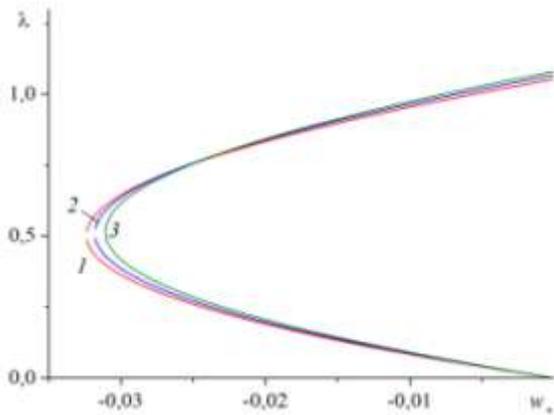


Рис. 7. Дисперсионные кривые 1, 2, 3 для различных значений параметров: $v = 0, 22; 0, 28; 0, 34$; $c = 3, 45; 3, 60; 3, 77$

исходя из вида левой части уравнения, как функции c . Она монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$ внутри промежутков непрерывности (начиная со второго), ограниченных вертикальными асимптотами в точках, где

$$\partial_x J_m(x) \Big|_{x=cw_2} = 0 \tag{30}$$

(заметим, что уравнение (30) совпадает с дисперсионным уравнением акустического волновода с жёсткими граничными условиями). Следовательно, во всех промежутках непрерывности эта функция имеет ровно по одному нулю (кроме первого промежутка, где корни отсутствуют). По мере роста номера j (и, соответственно, увеличения c_j) нули смещаются к корням

уравнения (30), поэтому величина t в (23) растёт, а групповая скорость $(dw/d\lambda) \Big|_{\lambda=0}$, соответственно, уменьшается.

Эта закономерность хорошо соотносится с поведением дисперсионных кривых на рисунке 4а. Чем «мягче» оболочка (чем меньше относительная скорость c), тем больше по модулю групповая скорость и шире диапазон частот δw с отрицательной групповой скоростью. Работает известный физический принцип: волна уходит из более быстрой (более «жёсткой») среды в более медленную тем интенсивнее, чем больше разность этих «жёсткостей», что ведёт к уменьшению диапазона частот с отрицательной групповой скоростью. Причём соответствующий диапазон волновых чисел оболочки с жидкостью ($\delta\lambda < 0,5$) (Рис. 4а) уже диапазона «сухой» оболочки ($\delta\lambda < 4/3$) (19) вследствие влияния присоединенной массы жидкости (инерционные свойства оболочки увеличиваются, что способствует росту длин волн).

Однако сама граница диапазона для оболочки с жидкостью — $\lambda \approx 0,5$ (Рис. 4а), практически не чувствительна к изменению относительной скорости c («жёсткости»). Это связано с тем, что именно оболочка определяет сам факт возникновения отрицательной групповой скорости в системе, в то время как относительная скорость характеризует взаимодействие оболочки и жидкости и в основном сказывается на величине групповой скорости. Заметим, что для «сухой» оболочки размах этого диапазона также не зависел от «жёсткости», где её роль играл номер моды m (18) (с ростом номера моды оболочка становится «жёстче» к соответствующим своим движениям).

Вычисления показывают, что в случае кратных корней для оболочки с жидкостью значение отрицательной групповой скорости зависит от «обобщенной относительной жёсткости» оболочки. Причём в этой роли может выступать не только относительная скорость c , но и номер моды m (Рис. 3б). При этом влияние возрастающего номера моды оказывается сильнее убывающей относительной скорости (Рис. 3б), что опять-таки связано с доминированием самой оболочки в процессе возникновения отрицательной групповой скорости в системе.

Графики обобщённых сил f_t, f_z и f_n, f_p (Рис. 5а, б) сравним с графиками смещений u_t, u_z, u_n, u_p (Рис. 4б) в оболочке. Заметим, что векторы обобщённых смещений \mathbf{u}^4 и сил \mathbf{f}^4 нормируются следующим образом: $\mathbf{u}^4 := \mathbf{u}^4 / \|\mathbf{u}^4\|_{c^4}$, $\mathbf{f}^4 := \mathbf{f}^4 / \|\mathbf{f}^4\|_{c^4}$, где $\mathbf{f}^4 = (f_t, f_z, f_n, f_p)^T$, $\mathbf{u}^4 = (u_t, u_z, u_n, u_p)^T$. Введено обозначение $u_p = -\partial_z u_n$, а индексами t, z, n, p помечены, соответственно, тангенциальная, продольная, нормальная компоненты и компонента, связанная с поворотом (моментом) [9]. Кривым с буквами a, b, c в обозначении, изображающим компоненты обобщённых сил и смещений на рисунках 4б, 5а, б, соответствуют участки a, b, c дисперсионных кривых на рисунке 2б. Для наглядности рисунков функциональные зависимости, отвечающие левой дисперсионной кривой, изображены только левее точки кратных корней (при $w \leq w_2$).

Обращает на себя внимание тот факт, что структура этих векторов, а также компонент потоков энергии (пропорции между модулями компонент) для волны из левой и правой веток, в точке кратных корней одинакова. Отличаются только знаки соответствующих компонент. Аналогичная картина наблюдается и для «сухой» оболочки [16].

Такой скачок значений компонент связан с тем, что дисперсионное уравнение как для «сухой» оболочки (10), так и для оболочки с жидкостью (20) является функцией λ^2 и w^2 . Поэтому, с одной стороны, картина дисперсионных кривых симметрична относительно оси w , а с другой стороны, локально дисперсионные кривые 2 и 3 (Рис. 2б), выходящие из точки кратных корней $(w, \lambda) = (w_2, 0)$, представляются прямыми $w_{\pm}(\lambda) = w_2 \pm a\lambda$, что показано выше. Таким образом, дисперсионные кривые 2 и 3 можно продолжить через точку кратных корней в область $\lambda < 0$ «без излома». При движении по этим «продолжениям» не испытывают скачка ни групповая скорость, ни соответствующие компоненты смещений и сил (фактически полагаем, что в точке кратных корней пересекаются две гладких квазидисперсионных кривых, которые переходят друг в друга при симметрии относительно оси w). Отсюда и имеем «симметричный» характер скачка соответствующих компонент в точке кратных корней в области $\lambda > 0$. Как следствие, модули этих компонент скачка не испытывают.

Заметим, что моментная компонента смещений и изгибная компонента сил равны нулю в точке кратных корней. Если силы в данном примере отражают всё-таки доминирующую роль крутильной компоненты колебаний, то смещения в колебаниях отдают первое место продольной компоненте. Более того, оказывается, что для вектора смещений вклад нормальной компоненты и компоненты, связанной с поворотом, сопоставимы с вкладом продольной компоненты. Однако более полную картину характера колебаний даёт анализ потоков энергии. Это обусловлено тем, что потоки энергии учитывают не только смещения (на основе которых обычно и устанавливают характер колебаний [6, 7]), но и силы, и сдвиг фазы между силами и смещениями и более полно характеризуют волновой процесс [16].

Можно оценить влияние и других параметров системы на величину групповой скорости. Например, меняя относительную плотность ρ^* , найдём (решая уравнение (22)) соответствующие значения относительной скорости c . Для данного случая на рисунке 6а приведены дисперсионные кривые 1, 2, 3 для значений $\rho^* = 6, 2; 7, 0; 7, 8$ и $c = 3, 7; 3, 65; 3, 6$.

Таким же образом получают зависимости, связывающие относительную толщину и коэффициент Пуассона с относительной скоростью (следует отметить, что модуль Юнга E , который характеризует упругие свойства материала оболочки, входит в безразмерную частоту w через скорость c_s и в этом смысле не является параметром). Так, на рисунке 6б приведены дисперсионные кривые 1, 2, 3 для значений $h/R = 0, 0152; 0, 0192; 0, 0232$ и $c = 3, 70; 3, 60; 3, 51$, а на рисунке 7а — дисперсионные кривые 1, 2, 3 для значений $\nu = 0, 22; 0, 28; 0, 34$ и $c = 3, 45; 3, 60; 3, 77$ соответственно.

Результаты вычислений показывают, что даже значительное изменение этих параметров практически не сказывается на значении групповой скорости при $\lambda \ll 1$ и величине диапазона волновых чисел $\delta\lambda$, где этот эффект наблюдается (в отличие от существенного влияния волн из разных дисперсионных кривых (Рис. 4а) или мод (Рис. 3б)). Наиболее существенно отзывается на это лишь размер соответствующего диапазона частот $\delta\omega$, причём в той мере, в какой меняется при этом относительная скорость c в ответ на изменение соответствующих параметров. Как это было описано выше, с ростом относительной скорости соответствующий диапазон частот уменьшается.

6. Заключение

Проведённый анализ «сухой» оболочки и оболочки с жидкостью показывает, что модель Кирхгофа–Лява «сухой» оболочки [16] качественно правильно описывает поведение оболочки с жидкостью в случае кратных корней. Так, результаты асимптотического и численного исследования свидетельствуют, что в обоих случаях наиболее ярко эффект с отрицательной групповой скоростью выражен для точки кратных корней дисперсионного уравнения; вне её он достаточно быстро пропадает (Рис. 3а). Динамика поведения дисперсионных кривых и возникновения участка с отрицательной групповой скоростью на одной из них

по мере сближения точек зарождения дисперсионных кривых в обеих задачах совпадает. Характерной особенностью волн с отрицательной групповой скоростью в случае кратных корней является их быстрое «включение» в процесс переноса энергии на длинных волнах (групповая скорость не равна нулю в момент зарождения соответствующей дисперсионной кривой). Именно оболочка определяет отрицательность потока энергии в системе. Влияние жидкости проявляется, в частности, в увеличении длин волн соответствующих колебательных процессов (вследствие возросшей инерционности системы).

Несмотря на одинаковость эффектов в оболочке с жидкостью и без неё, характер поведения оболочки с жидкостью существенно усложняется уже хотя бы потому, что в системе возникает бесконечное число энергетических каналов, связанных с неограниченно большим набором волноводных мод, в отличие от трёх каналов у «сухой» оболочки. Точка кратных корней может реализовываться на бесконечном количестве дисперсионных ветвей (что осуществляется подбором относительной скорости). При этом, хотя у «сухой» оболочки в точке кратных корней встречаются два канала распространения энергии, отвечающие только движениям оболочки, а в случае оболочки с жидкостью фактически накладываются канал, связанный с оболочкой, и канал, связанный с движениями жидкости, тем не менее, качественно картины являющиеся похожими.

Полученные оценки диапазонов частот и волновых чисел, где наблюдается эффект с отрицательной групповой скоростью, а также максимальная отрицательная групповая скорость в системе могут быть полезны при проектировании трубопроводов и других подобных систем.

Литература

1. Fuller C. R., Fahy F. J., Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid // *J. Sound Vib.* – 1982. – Vol. 81, no. 4. – P. 501-518. DOI
2. Pavic G. Vibrational energy flow in elastic circular cylindrical shells // *J. Sound Vib.* – 1990. – Vol. 142, no. 2. – P. 293-310. DOI
3. Pavic G. Vibroacoustical energy flow through straight pipes // *J. Sound Vib.* – 1992. – Vol. 154, no. 3 – P. 411-429. DOI
4. Feng, L. Acoustic properties of fluid-filled elastic pipes // *J. Sound Vib.* – 1994. – Vol. 176, no. 3. – P. 399-413. DOI
5. Филиппенко Г.В. Анализ потоков энергии в бесконечной цилиндрической оболочке контактирующей со сжимаемой жидкостью // Материалы XXVII сессии Российского акустического общества, посвященной памяти ученых-акустиков, ФГУП «Крыловский государственный научный центр» А. В. Смольякова и В. И. Попкова, Санкт-Петербург, 16-18 апреля 2014 г. С. 8
6. Тер-Акопянц Г.Л. Осесимметричные волновые процессы в цилиндрических оболочках, заполненных жидкостью // *Естественные и технические науки.* – 2015. – №7(85). – P. 10-14.
7. Тер-Акопянц Г.Л. Дисперсионные кривые и модальные коэффициенты при распространении волн в оболочке с жидкостью // *Естественные и технические науки.* – 2015. – № 6(84). – P.77-81.
8. Филиппенко Г.В. Энергетические аспекты осесимметричного распространения волн в бесконечной цилиндрической оболочке, полностью погруженной в жидкость // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2013. – Т.6, №2. – С. 187-197. (English version DOI)
9. Филиппенко Г.В. Энергетические аспекты распространения волн в бесконечной цилиндрической оболочке, полностью погруженной в жидкость // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 295-305. (English version DOI)
10. Елисеев В.В., *Механика упругих тел.* – СПб., Изд.-во СПбГПУ. – 2003. – 336 с.
11. Зиновьева Т.В. Дисперсия волн в цилиндрической оболочке // *Научно-технические ведомости СПбГПУ.* – № 4-1(52). – 2007. – С. 53-58.
12. Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. Двумерные (оболочечные) и трехмерная модели для упругого тонкостенного цилиндра // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* – 2014. – № 3. – С. 50-70. DOI
13. Вешев В.А., Коузов Д.П., Миролюбова Н.А., Потоки энергии и дисперсия нормальных волн изгибаемого типа в балке крестообразного профиля // *Акустический журнал.* – 1999. – Т. 45, №3. – С. 331-337.
14. Sorokin S.V., Nielsen J.B., Olhoff N. Green's matrix and the boundaryintegral equation method for the analysis of vibration and energy flow in cylindrical shells with and without internal fluid loading // *J. Sound Vib.* – 2004. – Vol. 271. – P. 815-847. DOI
15. Коузов Д.П., Миролюбова Н.А. Локальные потоки энергии вынужденных колебаний тонкой упругой полосы // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2012. – Т. 5, №4. – С. 397-404. (English version DOI)
16. Филиппенко Г.В. Энергетический анализ волн с отрицательной групповой скоростью в цилиндрической оболочке // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2017. – Т. 10, № 2. – С. 187-196 (English version DOI)
17. Новожилов В.В., *Теория тонких оболочек.* – СПб., Государственное издательство судостроительной литературы, 1951. – 344 с.

References

1. Fuller C. R., Fahy F. J., Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid. *J. Sound Vib.*, 1982, vol. 81, no. 4, pp. 501-518. DOI
2. Pavic G. Vibrational energy flow in elastic circular cylindrical shells. *J. Sound Vib.*, 1990, vol. 142, no. 2, pp. 293-310. DOI
3. Pavic G. Vibroacoustical energy flow through straight pipes. *J. Sound Vib.*, 1992, vol. 154, no. 3, pp. 411-429. DOI
4. Feng, L. Acoustic properties of fluid-filled elastic pipes. *J. Sound Vib.*, 1994, vol. 176, no. 3, pp. 399-413. DOI

5. Filippenko G.V., Analyzing of energy fluxes in the infinite cylindrical shell contacting with compressible liquid. *Proc. of the Conference "XXVII session of Russian Acoustical Society", 16-18 April 2014, St.Petersburg, Russia*. CD-ROM, 2014, 8 p. (in Russian), <http://rao.akin.ru/Rao/sess27/proceedings27.htm>
6. Ter-Akopyants G.L. Osesimmetrichnye volnovye processy v cilindricheskikh obolochkah, zapolnennyh zhidkost'yu [Axisymmetrical wave processes in cylindrical shells filled with fluid]. *Estestvennye i tehnicheckie nauki – Natural and engineering science*, 2015, №7(85), pp.10-14.
7. Ter-Akopyants G.L. Dispersionnye krivye i modal'nye koeffficienty pri rasprostraneni voln v obolochke s zhidkost'yu [Dispersion curves and modal patterns of the wave propagation in elastic cylindrical shell filled with fluid]. *Estestvennye i tehnicheckie nauki – Natural and engineering science*, 2015, no 6(84), pp.77-81.
8. Filippenko G.V. Energy aspects of axysymmetrical waves propogation in the infinite cylindrical shell fully submerged in to the liquid. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 187-197. [DOI](#)
9. Filippenko G.V. Energy aspects of wave propagation in an infinite cylindrical shell fully submerged in liquid. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 295-305. [DOI](#)
10. Yeliseev, V.V. Mekhanika uprugih tel [Mechanics of elastic bodies]. SPb., SPbSPU, 2003, 336 p.
11. Zinovieva T.V. Wave dispersion in cylindrical shell, *Acta of SPbSPU. Engineering*. SpbSPU press, St. Petersburg, 2007, no. 504, pp. 112-119.
12. Yeliseyev V.V., Zinovieva T.V. Two-dimensional (shell-type) and three-dimensional models for elastic thin-walled cylinder. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 3, pp. 50-70.
13. Veshev, V.A., Kouzov, D.P., Mirolyubova, N.A., Energy flows and dispersion of the normal bending waves in the X-shaped beam. *Acoustical Physics*, 1999, vol. 45, no 3, pp. 331-337.
14. Sorokin S.V., Nielsen J.B., Olhoff N., Green's matrix and the boundaryintegral equation method for the analysis of vibration and energy flow in cylindrical shells with and without internal fluid loading. *J. Sound Vib.*, 2004, vol. 271, pp. 815-847. [DOI](#)
15. Kouzov D.P., Mirolyubova N.A. Local energy fluxes of forced vibrations of a thin elastic band. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 397-404. [DOI](#)
16. Filippenko G.V. Energy analysis of waves with negative group velocity in cylindrical shell. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 187-196. [DOI](#)
17. Novozhilov, V.V. *Theory of thin shells*. P. Noordhoff; 1st edition, 1959, 376 p.

Поступила в редакцию 30.01.2018, опубликована в электронном виде 05.07.2018