

DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.2.12

УДК 539.3

КРИТЕРИЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ СТРУКТУРИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ С ОСТРЫМ V-ОБРАЗНЫМ ВЫРЕЗОМ

В.Д. Кургузов¹, Н.С. Астапов^{1,2}¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Российская Федерация

Проведено компьютерное моделирование разрушения пластины конечных размеров с острым V-образным вырезом при нормальном отрыве. Процесс разрушения такого образца описан с помощью модифицированной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла, использующей дополнительный параметр – поперечник зоны пластичности (ширину зоны предразрушения). В качестве модели материала деформируемого твердого тела выбран идеальный упругопластический материал, имеющий предельное относительное удлинение. К исследуемому классу относятся, например, низколегированные стали, применяемые в конструкциях, работающих при температурах ниже порога хладноломкости. В условиях маломасштабной текучести при наличии сингулярной особенности поля напряжений в окрестности вершины V-образного выреза, который в предельном случае может быть краевой трещиной, предлагается прибегать к двухпараметрическому дискретно интегральному критерию прочности. Деформационный критерий разрушения формулируется в вершине реального выреза, а силовой критерий для нормальных напряжений с учетом осреднения – в вершине специально вводимой модельной трещины. Выполнено численное моделирование распространения зон пластичности в прямоугольных пластинах при квазистатическом нагружении. Оценены размеры пластической зоны в окрестности вершины V-образного выреза. Методом конечных элементов получено выражение для обобщенного коэффициента интенсивности напряжений для трещины, растущей от вершины острого V-образного выреза. Обнаружено, что результаты численных экспериментов по прогнозированию разрушающей нагрузки хорошо согласуются с результатами расчетов по аналитической модели разрушения материалов со структурой при нормальном отрыве в режиме маломасштабной текучести. Построены диаграммы квазихрупкого разрушения образца из структурированного материала.

Ключевые слова: V-образный вырез, критерии разрушения, коэффициент интенсивности напряжений, пластическая зона, диаграмма квазихрупкого разрушения, метод конечных элементов, компьютерное моделирование

THE CRITERION OF ELASTOPLASTIC FRACTURE OF A STRUCTURED PLATE WITH A SHARP V-NOTCH

V.D. Kurguzov¹ and N.S. Astapov^{1,2}¹Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation^{1,2}Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

Computer simulation of the destruction of a plate of finite dimensions with a sharp V-shaped notch under normal disruption was carried out. The process of destruction of such a sample is described with the help of a modified Leonov–Panasyuk–Dugdale model using an additional parameter - the width of the zone of plasticity (the width of the pre-destruction zone). A model of an ideal elastoplastic material having a limiting elongation is chosen as the model of a deformable solid. The investigated class of materials includes, for example, low-alloy steels used in the structures operating at temperatures below the cold-brittle threshold. Under small-scale yielding conditions, in the presence of a singularity of the stress field in the vicinity of the vertex of the V-shaped notch, it is proposed to use a two-parameter discrete/integral strength criterion. The deformation criterion of destruction is formulated at the apex of the real cut-out, and the force criterion for normal stresses with allowance for averaging is formulated at the apex of the model crack. Numerical simulation of the propagation of plasticity zones in rectangular plates under quasistatic loading is performed. An estimate of the dimensions of the plastic zone in the vicinity of the vertex of the V-shaped notch is obtained, which in the limiting case can be an edge crack. The finite element method yields an expression for the generalized stress intensity factor for a crack in a sharp V-shaped notch. It is found that the results of numerical experiments on the prediction of the destructive load are in good agreement with the results of calculations based on the analytical model for the destruction of materials with a structure under normal disruption in the small-scale yielding regime. The diagrams of quasi-brittle fracture of the sample of a structured material are constructed.

Key words: V-shaped notch, fracture criteria, stress intensity factor, plastic zone, diagram of quasibrittle fracture, finite element method, computer modeling

1. Введение

Оценке хрупкой прочности областей с трещинами посвящено большое количество работ. В то же время влияние угловых вырезов на величину разрушающей нагрузки изучено недостаточно. Это объясняется, прежде всего, тем обстоятельством, что все известные критерии разрушения не приспособлены к вырезам с угловыми точками. Следует отметить, однако, что в инженерной практике такого рода проблематика встречается достаточно часто [1]. Поэтому критерии разрушения должны быть простыми, удобными для эффективного применения в инженерных расчетах [2]. В работе [3] впервые намечен способ исследования асимптотики поля напряжений и смещений в окрестности вершины выреза, который затем

был подробно разработан в [2, 4]. В работе [2] для бесконечных пластин с острыми вырезами предложен критерий хрупкого разрушения, основанный на подходе Ирвина и Новожилова и предполагающий, что распространение трещины от вершины выреза происходит тогда, когда действительные значения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) достигают критических значений. В работе [4] для нескольких критериев разрушения проведен анализ, основанный на сравнении результатов расчетов по аналитическим моделям с экспериментальными результатами, полученными при испытаниях пластин из полиметилметакрилата (ПММА). В работах [5–8] исследуется зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от вида U-вырезов и закругленных V-вырезов. В обзорной работе [6], содержащей обширный библиографический материал (около 400 ссылок), анализируется экспериментальная информация по изучению прочности конструкций с U-вырезами и затупленными V-вырезами. В работе [8] отмечается, что T -напряжения (речь идет о несингулярной составляющей поля напряжений у вершины трещины) «...в отличие от случая трещины ... при надрезах не являются постоянными, а зависят от расстояния от вершины надреза» и что «... T -напряжения оказывают существенное влияние на направление и устойчивость движения трещины». Поэтому в определяющих соотношениях аналитических моделей авторам приходится вводить дополнительные параметры, которые находят либо с помощью численного моделирования, либо по результатам лабораторных экспериментов. Так, в работе [9] для устранения сингулярности классического решения в задаче о трещине нормального отрыва в определяющие соотношения включен устанавливаемый экспериментально малый параметр, характеризующий микроструктуру среды.

Подход Новожилова позволяет аналитически оценить критическую нагрузку и для случая угловых вырезов в пластинах конечных размеров. Ниже при рассмотрении разрушения структурированных материалов используется модифицированная модель зоны предразрушения Леонова–Панасюка–Дагдейла (ЛПД) с привлечением необходимого и достаточного критериев разрушения (подход Нейбера–Новожилова) [10, 11]. Выделение зон предразрушения в вершинах трещин в рамках модели ЛПД оказалось удачным для описания процесса раскрытия трещин [12, стр. 244–245]. Сравнение результатов численного и аналитического моделирования при поперечном сдвиге [13] показало удивительно хороший прогноз на основе аналитической модели длины зоны предразрушения (зоны пластичности) во всем диапазоне нагрузок. Однако для трещины при остром V-вырезе в литературе отсутствует выражение обобщенного КИН, необходимое для аналитической модели. Поэтому в [13] для его нахождения методом конечных элементов (МКЭ) была дополнительно решена задача растяжения образца с вырезом при единичной нагрузке. Затем полученные значения смещений в окрестности выреза сравнивались с известным решением из [14] для бесконечной пластины, нагруженной парой сосредоточенных сил, приложенных к берегам трещины, выходящей из V-образного выреза.

В настоящее время «наиболее общим способом моделирования напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины является метод конечных элементов» [8]. Но для решения с помощью МКЭ конкретной задачи по разрушению необходима достаточно высокая квалификация вычислителя и значительные затраты времени на предварительную подготовку программы и проведение расчетов [15], причем кроме МКЭ иногда приходится привлекать дополнительные методы, например, метод корреляции цифровых изображений [16], и комплексы программ. Однако для инженерных расчетов желательно иметь простые алгоритмы и конечные формулы, пригодные для быстрого вычисления критической разрушающей нагрузки в конструкциях с трещинами при различных способах нагружения.

2. Асимптотический анализ полей напряжений

Рассмотрим плоский острый V-образный вырез в изотропном линейно-упругом теле и связанную с ним полярную систему координат $O r \theta$ с началом в вершине выреза (Рис. 1). Угол раскрытия выреза ω связан с углом α соотношением $\omega/2 = \pi - \alpha$. Сингулярное поле напряжений порождается растягивающими и

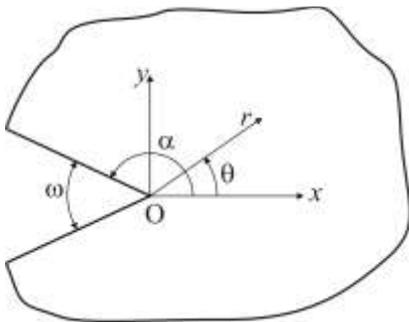


Рис. 1. Система координат в окрестности V-образного выреза

сдвигающими усилиями, действующими на удаленных границах, причем грани $\theta = \pm \alpha$ свободны от напряжений. Асимптотика поля напряжений и смещений в окрестности вершины выреза имеет вид [1, 2, 4]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{K_I^n}{(2\pi r)^{1-\lambda_1}} f_{\alpha\beta}^1(\theta) + \frac{K_{II}^n}{(2\pi r)^{1-\lambda_2}} f_{\alpha\beta}^2(\theta), \\ u_\alpha &= \frac{K_I^n r^{\lambda_1}}{(2\pi)^{1-\lambda_1}} g_\alpha^1(\theta) + \frac{K_{II}^n r^{\lambda_2}}{(2\pi)^{1-\lambda_2}} g_\alpha^2(\theta). \end{aligned} \quad (1)$$

Коэффициенты при главных членах асимптотических разложений поля напряжений называются обобщенными КИН

и обозначаются как κ_I^n (разрушение по I-й моде) и κ_{II}^n (разрушение по II-й моде). В уравнении (1) индексы α и β принимают значения (x, y, z) в декартовых координатах и (r, θ, z) в цилиндрических координатах; величины λ_i , $f_{\alpha\beta}^i(\theta)$, $g_{\alpha}^i(\theta)$, где $i = 1, 2$, устанавливаются из асимптотического анализа, при этом λ_i и $f_{\alpha\beta}^i(\theta)$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) являются функциями только α , в то время как $g_{\alpha}^i(\theta)$ — функции α и упругих свойств материала (конечно же, в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния они различаются). Не следует путать угол α и нижний индекс α . Коэффициенты κ_I^n и κ_{II}^n есть функции геометрии тела и приложенных нагрузок, их значения полностью определяют напряженное состояние в окрестности вершины V-образного выреза для данного угла ω (или α). Показатели степени λ_1 и λ_2 описывают сингулярности поля напряжений в окрестности вершины выреза и представляют собой корни характеристических уравнений [2, 4]

$$\begin{aligned} \lambda_1 \sin 2\alpha + \sin 2\lambda_1 \alpha &= 0, & 1 \\ \lambda_2 \sin 2\alpha - \sin 2\lambda_2 \alpha &= 0. & 2 \end{aligned} \quad (2)$$

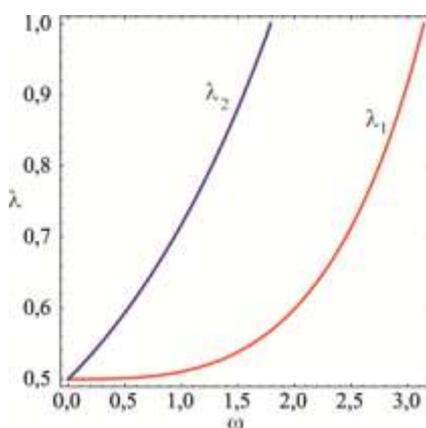


Рис. 2. Зависимость параметров сингулярности λ_1 и λ_2 от угла ω (в радианах), найденная из решения уравнений (2)

Зависимость показателей сингулярности λ_1 и λ_2 от угла ω (в радианах) представлена на рисунке 2. Заметим, что поле напряжений с показателем степени λ_2 не имеет особенностей для углов выреза ω , больших $102,6^\circ$, в то время как поле напряжений с показателем степени λ_1 сингулярно для всех $\omega < 180^\circ$. В общем случае λ_1 и λ_2 больше 0,5, поэтому в вершине V-образного выреза сингулярность слабее, чем в вершине трещины. Следовательно, критерии, обычно применяемые для полей напряжений без особенностей, например критерий максимальных растягивающих напряжений, не годятся. Критерии подрастания трещины, связанные со скоростью освобождения упругой энергии, напрямую неприменимы, видимо потому, что при появлении трещины геометрия конструкции изменяется несамоподобно. Ниже для описания зарождения трещины в вершине острого V-образного выреза и прогнозирования разрушающей нагрузки предлагается обобщить модифицированную модель ЛПД на квазихрупкое разрушение структурированных материалов с трещинами [10, 11, 13].

3. Растяжение образца с V-образным вырезом

Рассмотрим пластину прямоугольного поперечного сечения, ослабленную V-образным вырезом, нагруженную по торцам усилиями P (Рис. 3), то есть такую, в которой реализуется I-я мода разрушения. На рисунке обозначено: w — ширина, $L \geq 4w$ — длина, t — толщина пластины; d — глубина выреза; a — длина модельной трещины в модели ЛПД. Толщина пластины выбрана достаточной для того, чтобы выполнялось условие плоской деформации. Материал пластины является идеальным упругопластическим материалом с $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграммой одноосного деформирования, показанной на рисунке 4. Здесь: σ_y — предел текучести; ε_0 — максимальная упругая деформация; ε_1 — предельная деформация до разрушения.

Введем параметр $\chi = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) / \varepsilon_0$, характеризующий

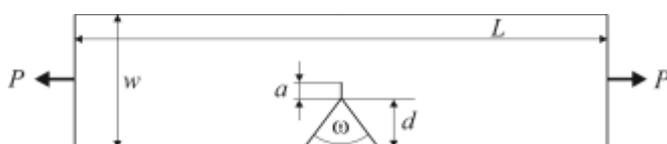


Рис. 3. Схема растяжения образца с V-образным вырезом

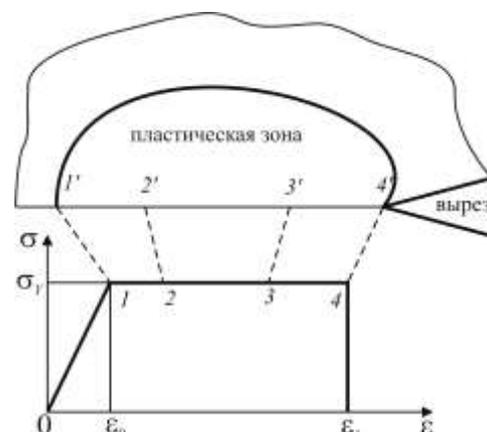


Рис. 4. Соответствие точек 1-4 диаграммы деформирования материала $(\sigma - \varepsilon)$ точкам 1'-4' зоны предразрушения в окрестности вершины выреза

отношение предельной неупругой деформации к максимальной упругой. Величину χ можно трактовать как относительную длину площадки текучести. Материал образца обладает определенной структурой, имеет квазихрупкий либо квазивязкий тип разрушения, причем характерный линейный размер r_0 структурного элемента (например, диаметр зерна) предполагается известным.

4. Модель разрушения материала

В модифицированной модели ЛПД [10, 11] помимо реальной внутренней или краевой прямолинейной трещины длиной $2l_0$, распространяющейся прямолинейно в структурно-неоднородном материале, вводится в рассмотрение модельная трещина — разрез длиной $2l = 2l_0 + 2a$, где a — длина зоны предразрушения (или пластической зоны), расположенной на продолжении реальной трещины. В зоне предразрушения действуют постоянные нормальные сжимающие напряжения, равные пределу текучести материала σ_y , устраняющие сингулярность поля напряжений в окрестности вершины трещины. Полная постановка задачи о распределении напряжений и смещений трещины нормального отрыва для упругопластических материалов рассматривается в нелинейной механике разрушения. Эту нелинейную задачу можно существенно упростить, используя классические положения линейной механики разрушения, когда модельная трещина нормального отрыва представляется как двусторонний разрез, а нелинейность в задачу вводится только при изображении зоны предразрушения. Напомним, что согласно классической модели ЛПД [17–19] в пластическом материале с зоной предразрушения, поперечник которой равен нулю, берега трещины стягиваются.

Применим этот подход к описанию зарождения трещины в вершине острого V-образного выреза. Пусть перед вершиной выреза глубиной d при деформировании по I-й моде возникает зона предразрушения (или пластическая зона) длиной a . Обозначим длину выреза с выходящей из него трещиной через $l = d + a$, начало системы координат поместим в вершину трещины. В зоне предразрушения действуют постоянные нормальные сжимающие напряжения, равные пределу текучести материала σ_y , устраняющие сингулярность поля напряжений с показателем $1 - \lambda$ в окрестности вершины выреза (Рис. 5а), где $\lambda = \lambda_1$ — корень уравнения (2₁).

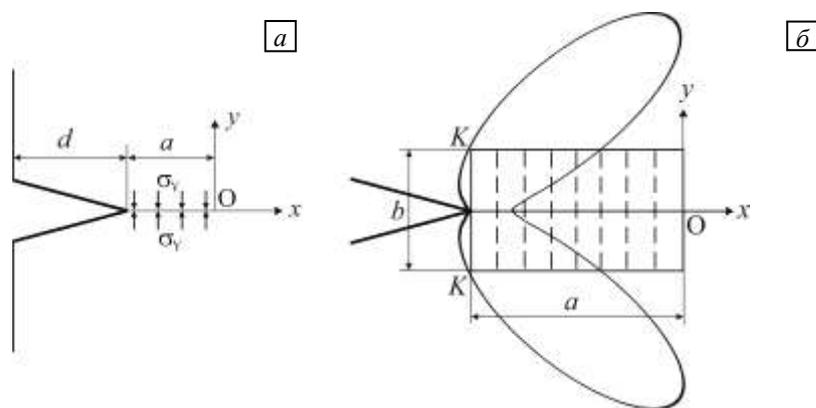


Рис. 5. Сжимающие напряжения на продолжении V-образного выреза в модели Леонова–Панасюка–Дагдейла (а); аппроксимация пластической зоны прямоугольником (зона предразрушения заштрихована) (б)

Аппроксимируем зону предразрушения прямоугольником со сторонами a, b (Рис. 5б), причем длину зоны предразрушения a определим в процессе решения задачи о разрушении, а ширину b прямоугольника целесообразно отождествить с поперечником зоны пластичности. На рисунке 4 приведена схема, качественно поясняющая взаимосвязь между точками 1–4 на $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграмме и точками 1'–4' в зоне предразрушения, расположенными на продолжении V-образного выреза. Вне зоны предразрушения характер деформирования материала упругий, на границе этой зоны он меняется на неупругий, при этом точки зоны предразрушения находятся в области неупругих деформаций. Предполагаем, что на продолжении V-образного выреза реализуется одноосное растяжение [12]. В докритическом состоянии материал в вершине выреза имеет удлинение $\varepsilon < \varepsilon_1$, а в критическом состоянии его удлинение совпадает с критическим удлинением, то есть в точке 4 на рисунке 4 выполняется равенство $\varepsilon = \varepsilon_1$. На этом рисунке пластическая зона в окрестности вершины трещины приближенно изображена для случая плоского напряженного состояния, а на рисунке 5б — в виде двух лепестков — для плоской деформации. Как будет показано далее, реальная форма пластической зоны весьма далека от идеализированных представлений [12, 20].

Для построения модели разрушения образца с V-образным вырезом при нормальном отрыве воспользуемся интегральным критерием разрушения Новожилова [21]:

$$\frac{1}{r_0} \int_0^{r_0} \sigma_y(x, 0) dx = \sigma_y, \quad x \geq 0, \quad (3)$$

$$v(-a) = v_c. \quad (4)$$

Здесь: $\sigma_y(x, 0)$ — нормальные напряжения на продолжении выреза; σ_y — предел текучести при одноосном растяжении; r_0 — характерный линейный размер структуры материала; $v(x) = 2u_y(x, 0)$ — раскрытие трещины. Через v_c обозначено критическое раскрытие трещины; при величине раскрытия, равной критическому значению, разрушается структура материала в вершине V-образного выреза (в граничной точке зоны предразрушения (см. точку 4', Рис. 4)). Длина зоны предразрушения составляет только часть длины зоны пластичности, если учесть величину интервала осреднения r_0 . Силовой критерий (3), по терминологии Новожилова, является необходимым: процесс разрушения материала начинается тогда, когда осредненные по интервалу r_0 нормальные напряжения достигают предела текучести σ_y . При выполнении деформационного критерия (4) происходит катастрофическое разрушение образца. По этой причине совокупность условий (3), (4) называют достаточным критерием разрушения [21].

Аналитическое выражение нормального напряжения $\sigma_y(x, 0)$ на продолжении трещины представим в виде [22]:

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi x}} + Y_r \sigma_0, \quad x \geq 0. \quad (5)$$

Здесь: $\sigma_0 = P/(lw)$ — напряжения, действующие на торцах образца (Рис. 3); $K_1 = K_1^o + K_1^a$ — суммарный КИН в обобщенной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла; $K_1^o > 0$ — КИН, порождаемый напряжениями σ_0 ; $K_1^a < 0$ — КИН, порождаемый сжимающими напряжениями σ_y , действующими на берегах модельной трещины в зоне предразрушения; $Y_r = Y_r(l/w)$ — поправочный коэффициент, учитывающий конечные размеры образца (в случае полуплоскости тождественно равен единице). Коэффициент Y_r находится из условия равновесия напряжений, приложенных к торцам образца, и напряжений, действующих на лигаменте $w - l$: $Y_r = \frac{1}{1 - \xi} - Y_0 \sqrt{\frac{2\xi}{1 - \xi}}$, где $\xi = l/w$, $Y_0 = Y_0(\xi) = 1,12 - 0,231\xi + 10,55\xi^2 - 21,72\xi^3 + 30,39\xi^4$ — поправочный коэффициент к КИН для полосы с краевой трещиной ([23], стр. 154; [24], стр. 51). После интегрирования по интервалу осреднения r_0 уравнение (3) принимает вид:

$$K_1 = (\sigma_y - Y_r \sigma_0) \sqrt{\frac{\pi r_0}{2}}. \quad (6)$$

Для раскрытия $v(x)$ модельной трещины (при $-a \leq x < 0$) используем в (4) асимптотическое представление [20]:

$$v(x) = \frac{K_1}{G} \sqrt{\frac{-x}{2\pi}} (\kappa + 1), \quad K_1 = K_1^o + K_1^a > 0, \quad x \leq 0. \quad (7)$$

Здесь: κ — постоянная плоской задачи теории упругости, причем $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напряженного состояния, ν — коэффициент Пуассона; $G = E/(2(1 + \nu)) = \sigma_y/(2(1 + \nu)\varepsilon_0)$ — модуль сдвига материала, так как для идеального упругопластического материала $E = \sigma_y/\varepsilon_0$, где E — модуль Юнга, ε_0 — максимальное упругое относительное удлинение. С помощью представления (7) запишем уравнение (4) в виде:

$$\frac{\kappa + 1}{G} K_1 \sqrt{\frac{a}{2\pi}} = v_c. \quad (8)$$

Чтобы воспользоваться критерием Новожилова (3), (4), нужно знать КИН для короткой трещины длиной a , выходящей из V-образного выреза. Такое выражение отсутствует в литературе, но может быть построено методом весовых функций, см., например, формулу КИН для трещины при V-образном вырезе в бесконечной пластине, нагруженной парой сосредоточенных сил, приложенных к ее берегам ([14], Рис.4). Хотя такая геометрия далека от геометрии рассматриваемого образца (Рис. 3), тем не менее решение для последней будет стремиться к решению из [14] в случае достаточно коротких трещин ($a \ll w$). При исследовании трещин, длины которых сопоставимы с шириной пластины, в разрешающие соотношения необходимо вводить поправку типа $Y_0 = Y_0(\xi)$. Для КИН K_I^0 , обусловленного напряжениями σ_0 , в [14] получено:

$$K_I^0 = K_I^n \frac{a^{\lambda-1/2}}{(2\pi)^{1-\lambda}} \psi(\omega), \quad (9)$$

где

$$\psi(\omega) = \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{F(t, \alpha)}{t^{1-\lambda}} dt, \quad F(t, \alpha) = \frac{f(\alpha) + t g(\alpha) + t^2 h(\alpha)}{\sqrt{1-t}}, \quad t = \frac{x}{a},$$

$$f(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad g(\alpha) = -1 - 3f(\alpha) + f_1(\alpha), \quad h(\alpha) = 2 + 2f(\alpha) - f_1(\alpha),$$

$$f_1(\alpha) = \frac{6,142 + 2,04\alpha^2 - 0,129\alpha^3}{\alpha^{3/2}}.$$

Через α и λ функция ψ зависит только от угла раскрытия выреза ω . КИН K_I^0 является функцией обобщенного КИН K_I^n V-образного выреза, угла раскрытия выреза ω и длины трещины a . Выражение (9) включает в себя предельные случаи краевой трещины и заранее организованной трещины. При $\omega = \pi$, $\lambda = 1$ вырез переходит в полуплоскость, трещина длиной a становится краевой. Тогда $\psi(\pi) = 1,12\sqrt{\pi}$, $K_I^0 = 1,12 \sigma_0 \sqrt{\pi a} Y_n(\xi, \pi)$, где $Y_n(\xi, \pi) = (1/1,12) Y_0(\xi)$. При $\omega = 0$, $\lambda = 1/2$ вырез превращается в трещину, $\psi(0) = \sqrt{2\pi}$, откуда $K_I^0 = K_I^0 = \sigma_0 \sqrt{\pi l} Y_n(\xi, 0)$, где $Y_n(\xi, 0) = Y_0(\xi)$, K_I^0 — классический КИН краевой трещины. Последний результат согласуется с предположением $a \ll d$. Действительно, так как длина a трещины много меньше глубины d выреза, то при вырезе, становящемся трещиной, имеем $K_I^0(l) \equiv K_I^0(d)$.

Анализ размерности приводит к следующему выражению для обобщенного КИН:

$$K_I^n = \sigma_0 (\pi l)^{1-\lambda} Y_n, \quad (10)$$

где $Y_n = Y_n(\xi, \omega)$ — безразмерный коэффициент, а множитель π введен для обеспечения предельного перехода к КИН острой трещины. Для определения K_I^n методом конечных элементов была решена задача о растяжении образца с вырезом при единичной нагрузке. Вследствие симметрии моделировалась явно только половина образца, показанного на рисунке 3. В окрестности вершины выреза для точного вычисления K_I^n использовалось крайне мелкое разбиение. Типичная сетка содержала 15002 8-узловых элементов с квадратичной аппроксимацией и 45551 узлов. Коэффициент K_I^n находился путем сопоставления вычисленных смещений с даваемыми асимптотическими формулами (1), в частности, на основе компоненты смещений u_y вдоль боковых поверхностей выреза $\theta = \pm \alpha$. Методом наименьших квадратов находился коэффициент c в представлении $u_y(\theta = \alpha) = C r^\lambda$, где λ установлена из (2) в результате асимптотического анализа. Затем вычислялся K_I^n по формуле: $K_I^n = c / g_y^1(\theta = \alpha)$, где $g_y^1(\theta = \alpha)$ также определен асимптотическим анализом из (1). После того как K_I^n стал известен, вычислялось значение $Y_n = Y_n(\xi, \omega)$ из уравнения (10). Тот же метод конечных элементов и уже не зависящий от пути интегрирования H -интеграл применялись в работах [25, 26] для отыскания обобщенного КИН. Функции $Y_n = Y_n(\xi, \omega)$ для образцов различных геометрий в испытаниях на растяжение, сдвиг и трехточечный изгиб были рассчитаны и протабулированы в работах [3, 27–29].

Для КИН K_I^n , обусловленного постоянными сжимающими напряжениями σ_y , на основе решения из [14] имеем:

$$K_I^n = -\sigma_Y \sqrt{a} \varphi(\omega) Y_s, \quad \varphi(\omega) = \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} F(t, \alpha) dt, \quad (11)$$

где функция φ зависит только от угла раскрытия выреза ω (через α и λ). Уравнение (11) включает в себя предельные случаи краевой трещины и заранее организованной трещины. При $\omega = 0$, $\lambda = 1/2$ вырез превращается в краевую трещину длиной $l = d + a$ с частично нагруженными берегами в полуплоскости ([24], стр. 117), $\varphi(0) = 2\sqrt{2/\pi}$, поправочный коэффициент для полуплоскости составляет: $Y_s = Y_s(\xi) = (1/1,12) Y_0(\xi)$. При $\omega = \pi$, $\lambda = 1$ вырез переходит в полуплоскость с краевой трещиной длиной $l = a$. Тогда $\varphi(\pi) = 1,12113\sqrt{\pi}$, и в этом случае поправочный коэффициент равняется: $Y_s = Y_s(\xi) = (1/1,12) Y_0(\xi)$.

Отождествим поперечник b зоны предразрушения с диаметром пластической зоны $2r_p(\theta)$ при плоской деформации в вершине V-образного выреза [28]:

$$b = 2r_p \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{K_I^n}{\sigma_Y} f_c \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) \right]^{1/(1-\lambda)}, \quad (12)$$

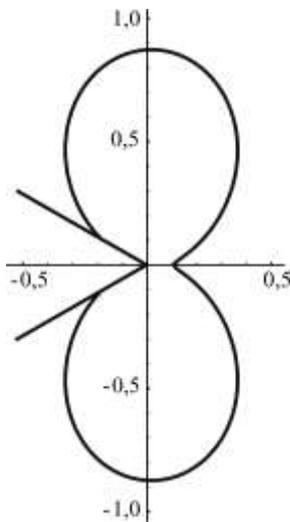


Рис. 6. Форма пластической зоны в окрестности вершины V-образного выреза

Здесь эквивалентное по Мизесу напряжение, основанное на асимптотическом упругом решении, выражается как $\sigma_e = K_I^n (2\pi r)^{\lambda-1} f_c$, где $f_c = f_c(\theta, \alpha, \lambda, \nu)$, и вычисляется через компоненты напряжений по формулам (1) стандартным образом. На рисунке 6 показана форма пластической зоны в окрестности вершины V-образного выреза, описываемая формулой (12), для $\omega = 60^\circ$. Построение выполнено в полярных координатах с использованием безразмерного радиус-вектора $\rho = 2\pi r_p / (K_I^n / \sigma_Y)^{1/(1-\lambda)}$.

Параметр максимального неупругого относительного удлинения $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ определяется на основе $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграммы материала (см. Рис. 4). Тогда критическая величина раскрытия трещины v_c , при которой разрушается ближайший к вершине модельной трещины структурный элемент в зоне предразрушения, вычисляется по формуле:

$$v_c = m (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) b, \quad (13)$$

где m — поправочный коэффициент. Конечно, границы реальных пластических зон в окрестности вершины V-образного выреза лишь приближенно похожи на изображенные в [12, 20]. При плоском напряженном состоянии с увеличением нагрузки узкая область пластических деформаций распространяется от вершины трещины по ее оси прямолинейно и приближенно принимает форму узкого вытянутого вдоль оси трещины прямоугольника. Такую форму пластической зоны, особенно при поперечном сдвиге, и преимущественное направление распространения трещины вдоль ее оси можно наблюдать как в численных, так и в лабораторных экспериментах. Пластическая зона в окрестности вершины трещины в условиях плоской деформации имеет вид двух лепестков и плохо аппроксимируется прямоугольником. В связи с этим в работе [22] для уточнения выражения для поперечника зоны предразрушения обосновано введение в соотношение (13) поправочного коэффициента m . Для определения величины этого коэффициента необходимо использовать непосредственно данные численного либо лабораторного эксперимента.

Теперь систему уравнений (6), (8), учитывая (9)–(13), можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \left[\sigma_s l^{1-\lambda} a^{\lambda-1/2} 2^{\lambda-1} Y_n \psi(\omega) - \sqrt{a} Y_s \varphi(\omega) \right] &= (1 - Y_r \sigma_s) \beta, & 1 \\ \left[\sigma_s l^{1-\lambda} a^{\lambda-1/2} 2^{\lambda-1} Y_n \psi(\omega) - \sqrt{a} Y_s \varphi(\omega) \right] \sqrt{a} &= h \sigma_s^{1/(1-\lambda)}, & 2 \end{aligned} \quad (14)$$

где $\sigma_s = \sigma_0 / \sigma_Y$ — безразмерная критическая нагрузка, $\beta = \sqrt{\pi r_0 / 2}$, $h = \sqrt{2\pi} m \chi \kappa_2^{-1} (Y_n \tilde{f}_c)^{1/(1-\lambda)}$, $\tilde{f}_c = f_c(\pi/2, \alpha, \lambda, \nu)$, $\kappa_2 = 2(1 + \kappa)(1 + \nu)$, в частности, $\kappa_2 = 8(1 - \nu^2)$ для плоской деформации и $\kappa_2 = 8$

для плоского напряженного состояния. Исключая выражение в квадратных скобках из системы уравнений (14), находим точное выражение для критической длины зоны предразрушения:

$$\sqrt{a} = \frac{lh\sigma_s^{1/(1-\lambda)}}{(1 - Y_r\sigma_s)\beta}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в уравнение (14), получаем:

$$\sigma_s^{\lambda/(1-\lambda)} (1 - Y_r\sigma_s)^{2-2\lambda} \left(\frac{l}{r_0}\right)^\lambda A - \sigma_s^{1/(1-\lambda)} \frac{l}{r_0} B = (1 - Y_r\sigma_s)^2, \quad (16)$$

где $A = (2h)^{2\lambda-1} \pi^{-\lambda} Y_n \Psi(\omega)$, $B = 2h\pi^{-1} Y_s \Phi(\omega)$. Уравнение (16) является алгебраическим с трансцендентным показателем степени ≥ 2 ; его решение может быть найдено методами компьютерной алгебры. В случае трещины ($\omega = 0^\circ$) оно становится квадратным. Таким образом, уравнение (16) устанавливает зависимость критической нагрузки от безразмерной длины обобщенной трещины $\sigma_s = \sigma_s(l/r_0)$.

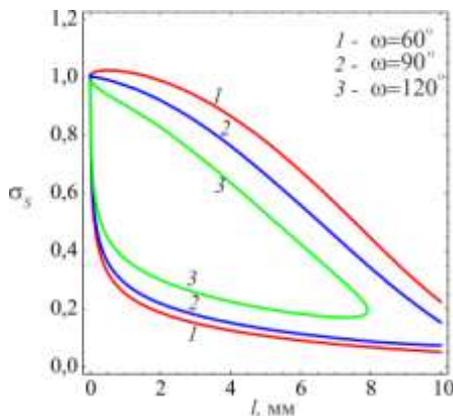


Рис. 7. Действительные решения уравнения (16) для различных углов ω

На рисунке 7 показаны действительные решения уравнения (16) для углов $\omega = 60^\circ$, 90° и 120° . Видно что, (16) имеет два действительных корня. В качестве критической нагрузки необходимо брать меньший корень. Приведенные зависимости $\sigma_s = \sigma_s(l/r_0)$ получены для $\chi = 2$ и $r_0 = 0,2$ мм. Рисунок свидетельствует, что для угла 120° уравнение (16) при $l > 8$ действительных решений не имеет. Существование действительных корней накладывает ограничение на значения параметра χ . Уравнение (16) хорошо описывает хрупкое и квазихрупкое разрушение ($\chi < 2$), но плохо — квазивязкое разрушение материалов с достаточно длинной площадкой текучести ($\chi > 2$), поэтому в случае квазивязких материалов для аппроксимации данных численного эксперимента оно неприменимо.

В соотношениях (15), (16) возможен предельный переход при $\chi \rightarrow 0$, что позволяет рассматривать разрушение хрупких материалов. В таких материалах зона предразрушения отсутствует: $a = 0$, $K_1^a = 0$, $K_1 = K_1^0 = K_1^n = \sigma_0 (\pi l)^{1-\lambda} Y_n$, распределение нормальных напряжений на продолжении выреза имеет вид:

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{K_1^n}{(2\pi x)^{1-\lambda}} + Y_r\sigma_0, \quad x \geq 0. \quad (17)$$

Осредняя напряжения (17) по интервалу r_0 при необходимом критерии разрушения (3), получаем критические напряжения в случае хрупкого разрушения:

$$\sigma_N = \left[Y_r + Y_n \frac{2^{\lambda-1}}{\lambda} \left(\frac{l}{r_0}\right)^{1-\lambda} \right]^{-1}. \quad (18)$$

Здесь $\sigma_N = \sigma_0/\sigma_Y$ — безразмерная критическая нагрузка по необходимому критерию. Аналитическое представление критической нагрузки (18) зависит только от одного параметра — характерного линейного размера r_0 элемента структуры. В уравнении (16) критическая нагрузка, полученная с использованием достаточного критерия разрушения (3), (4), зависит как от характерного линейного размера r_0 элемента структуры, так и от величины χ , характеризующей свойства материала в зоне предразрушения при пластическом деформировании.

Рассмотрим процесс деформирования при постепенном нагружении: $0 < \sigma_0/\sigma_Y < 1$. Если необходимый критерий (3) не выполняется, то нелинейные эффекты не проявляются, первоначальная глубина выреза d

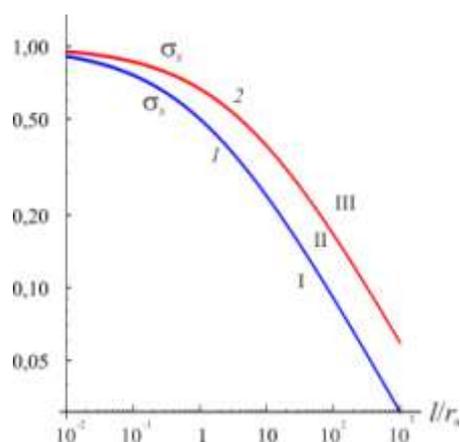


Рис. 8. Диаграммы квазихрупкого разрушения, полученные по необходимому критерию (кривая 1) и по достаточному критерию (кривая 2).

не меняется. Если же в достаточном критерии (3), (4) выполняется только условие (3), имеет место докритическое состояние системы, при котором наблюдается устойчивое увеличение длины обобщенной трещины $l = d + a$. Соотношение (3) в достаточном критерии (3), (4) определяет движение вершины трещины, выходящей из вершины V-образного выреза ($\sigma_0/\sigma_Y = \sigma_N$). При выполнении обоих условий система переходит в критическое состояние ($\sigma_0/\sigma_Y = \sigma_S$). Ближайшая к вершине трещины структура разрушается, поскольку длина зоны предразрушения достигает критического значения (15). Соотношение (4) описывает обрыв силовых связей в ближайшей к вершине углового выреза структуре зоны предразрушения. Таким образом, критические нагрузки, вычисленные по необходимому (18) и достаточному (16) критериям разрушения, являются нижней и верхней оценками критических нагрузок рассматриваемой нелинейной системы.

5. Компьютерное моделирование

Воспользуемся методом конечных элементов для численного моделирования реальной формы пластической зоны в окрестности вершины V-образного выреза. Рассмотрим пластину из оргстекла (ПММА) с односторонним угловым вырезом (Рис. 3) толщиной $t = 10$ мм, шириной $w = 20$ мм, длиной $L = 80$ мм в условиях плоского деформированного состояния, растягиваемую напряжениями σ_0 , приложенными на торцах. Глубину выреза d будем варьировать от 2 до 8 мм при значениях угла выреза $\omega = 60^\circ, 90^\circ$ и 120° . В силу симметрии расчетной области при конечно-элементном анализе ограничимся половиной пластины. Оргстекло является хрупким нелинейно-упругим материалом с диаграммой деформирования, показанной на рисунке 9 (кривая 1), и имеет характеристики: модуль Юнга $E = 3300$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,33$. При расчете будем считать оргстекло идеальным упругопластическим материалом с пределом текучести $\sigma_Y = 45$ МПа (Рис. 9, кривая 2). Предел текучести определяется из условия равенства площадей под кривыми 1 и 2. Кроме того, в аналитической модели используется относительная длина площадки текучести χ , которая тоже обуславливается аппроксимирующей кривой. Оргстекло — непластичный материал, поэтому замена нелинейно-упругого материала упругопластическим правомерна только на стадии активного нагружения. Однако даже для нелинейно-упругих материалов (оргстекло, эбонит) сравнение результатов вычисления разрушающей нагрузки по аналитической модели с лабораторными экспериментами показывает их качественное совпадение [30].

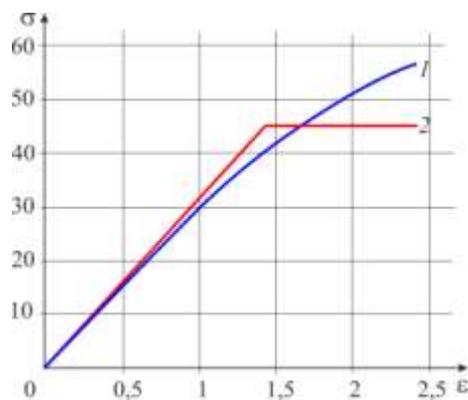


Рис. 9. Экспериментальная диаграмма деформирования полиметилметакрилата (ПММА) (1) и ее аппроксимация (2) [30].

Расчетная область покрывалась неравномерной сеткой из 15000 8-узловых четырехугольных элементов с квадратичной аппроксимацией перемещений. В окрестности вершины выреза производилось сгущение сетки так, что размер ближайшего к вершине элемента составлял 0,01 мм. Отношение размера элемента в окрестности вершины выреза к его глубине в случае $d = 2$ (самый короткий вырез) равнялось $1/200$, что соответствует рекомендациям, приведенным в [31]. В процессе нагружения внешняя нагрузка σ_0 монотонно возрастала по линейному закону от нуля до σ_Y . При уровнях нагружения $\sigma_0/\sigma_Y > 0,2$ в окрестности вершины выреза возникают большие пластические деформации, поэтому задача решалась в текущей лагранжевой постановке с учетом физической и геометрической нелинейностей

на основе общих уравнений механики деформируемого твердого тела [32] с использованием в качестве меры напряжений тензора напряжений Коши, а в качестве меры деформаций — тензора логарифмических деформаций Генки.

Численный расчет базировался на следующих определяющих соотношениях теории пластического течения, справедливых при больших деформациях. Пусть $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ — вектор скорости материальных частиц деформируемого тела, \mathbf{u} — вектор перемещения, \mathbf{d} — симметричный тензор скорости деформаций, \mathbf{s} — симметричный тензор напряжений Коши. Кинематические соотношения (связь тензора скорости деформаций с тензором градиента скорости) имеют вид: $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$, где $\nabla \mathbf{v}^T$ — тензор градиента скорости, ∇ — пространственный набла-вектор. Основная гипотеза теории пластического течения, позволяющая в определяющих соотношениях одновременно учесть упругие и пластические составляющие деформаций, состоит в аддитивном представлении тензора скорости деформаций: $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$, где \mathbf{d}^e и \mathbf{d}^p — упругая и пластическая составляющие тензора скорости деформаций, которые находятся из законов упругого и пластического деформирования. Для изотропных материалов эти составляющие следуют из закона Гука (для упругой составляющей тензора скорости деформаций) и ассоциированного закона пластичности:

$$\mathbf{s}^H = \mathbf{C}^E : \mathbf{d}^e = \mathbf{C}^E : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p), \quad \mathbf{d}^p = c\lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}}. \quad (19)$$

Здесь \mathbf{s}^H — объективная производная Хилла тензора напряжений Коши $\mathbf{s} : \mathbf{s}^H = \dot{\mathbf{s}} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w} + \text{tr} \mathbf{d} \mathbf{s}$, $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}^T - \nabla \mathbf{v})$ — кососимметричный тензор вихря, \mathbf{C}^E — тензор четвертого ранга, отвечающий закону Гука для изотропной упругой среды. Его компоненты в декартовой системе координат имеют вид:

$$\mathbf{C}_{ijkl}^E = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ij}\delta_{kl}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl} \right],$$

δ_{ij} — дельта-функция Кронекера, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. В (19) введена скалярная функция текучести $F(\mathbf{s})$ такая, что уравнение $F(\mathbf{s}) = 0$ описывает поверхность текучести в пространстве компонент тензора напряжений Коши. Параметр c определяет мгновенное состояние деформирования материала (упругое или пластическое):

$$c = \begin{cases} 0, & \text{если } F < 0 \text{ или } F = 0 \text{ и } \mathbf{n} : \mathbf{d} \leq 0, \\ 1, & \text{если } F = 0 \text{ и } \mathbf{n} : \mathbf{d} > 0. \end{cases}$$

Здесь \mathbf{n} — вектор внешней нормали единичной длины к поверхности текучести в пространстве компонент тензора напряжений \mathbf{s} :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{k} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}}, \quad k = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} : \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} \right)^{1/2}. \quad (20)$$

Скалярный параметр $\lambda > 0$, введенный в (19), находится в соответствии с заданным законом упрочнения. Окончательно формулы определяющих соотношений упругопластичности можно записать в виде:

$$\mathbf{s}^H = \mathbf{C}^{EP} : \mathbf{d}, \quad (21)$$

где $\mathbf{C}^{EP} = \mathbf{C}^E - c(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})g$ — тензор четвертого ранга, скалярная функция g зависит от модуля Юнга, коэффициента Пуассона, второго инварианта тензора напряжений и закона упрочнения [32]. Значение скалярного параметра $c = 0$ задает упругое деформирование материала (включая разгрузку от достигнутого пластического состояния), а значение $c = 1$ — пластическое течение материала.

Определяющие соотношения (21) являются нелинейными относительно тензора скорости деформаций \mathbf{d} , так как тензор четвертого ранга \mathbf{C}^{EP} зависит от \mathbf{d} . Запись определяющих соотношений пластичности в виде (21) позволяет в случае квазистатического деформирования дать вариационную формулировку задачи и получить симметричную матрицу касательной жесткости в конечно-элементных формулировках

уравнений. Для получения конкретного вида тензора четвертого ранга c^{EP} в (21) кроме функции g требуется задать выражение функции текучести $F(s)$, с помощью которой вычисляется тензор второго ранга n в (20). В модели упругопластического материала с условием текучести Мизеса эта функция записывается в виде: $F(s) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} - \sigma_Y$, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения тензора напряжений Коши s .

Расчет напряженно-деформированного состояния пластины выполнялся в пакете конечно-элементного анализа MSC.Marc 2017 [33]. Полученные в расчетах пластические зоны перед вершиной V-образного выреза показаны на рисунке 10 (представлено распределение эквивалентных пластических деформаций $\varepsilon^p = \sqrt{2\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p}/3$, где ε_{ij}^p — компоненты тензора пластических деформаций, при уровне нагружения $\sigma_0/\sigma_Y = 0,5$). Контурные полосы на рисунках ограничены диапазоном $10^{-4} \div 10^{-2}$ для более детальной прорисовки распределения эквивалентных пластических деформаций. Форма пластической зоны напоминает известный лепесток, приводимый в классических монографиях по теории пластичности для иллюстрации малых пластических деформаций [12, 20], только здесь он имеет больший размер и сильнее отклоняется к оси выреза. Видно, что с увеличением угла выреза пластическая зона начинает распространяться не только перед вершиной вдоль оси выреза, но и захватывает его берега.

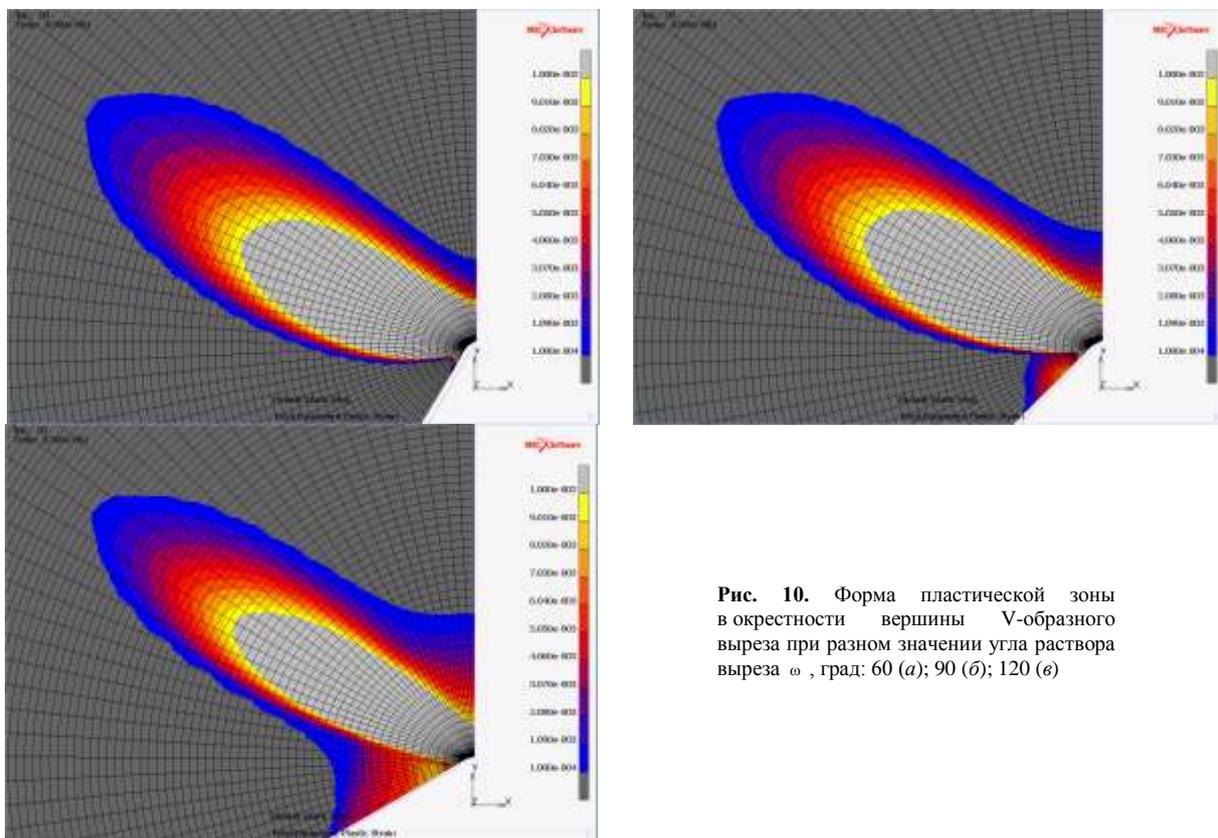


Рис. 10. Форма пластической зоны в окрестности вершины V-образного выреза при разном значении угла раствора выреза ω , град: 60 (а); 90 (б); 120 (в)

6. Сравнение результатов

Для обработки данных численного эксперимента зададимся значением параметра $\chi = 2$. На каждом шаге по нагрузке σ_0/σ_Y в результате анализа изолиний пластических зон найдем поперечник зоны предразрушения $b = b(\sigma_0/\sigma_Y)$, раскрытие трещины $v = v(\sigma_0/\sigma_Y)$ и длину зоны предразрушения $a = a(\sigma_0/\sigma_Y)$. В силу симметрии раскрытие трещины v положим равным удвоенному смещению узла сетки, ближайшего к точке K и расположенного на расстоянии поперечника b над вершиной трещины. Две симметричных точки K принадлежат границе зоны пластичности (Рис. 5б). Длину a пластической зоны определим как разность наибольшей из всех абсцисс граничных точек зоны пластичности и абсциссы вершины углового выреза. Критическое значение раскрытия трещины v_c вычислим по формуле: $v_c = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)b = \chi\varepsilon_0 b$, где $\varepsilon_0 = \sigma_Y/E$. Сделаем два последовательных шага по нагрузке, на одном из которых выполним неравенство $v < v_c$, а на другом — неравенство $v > v_c$. Путем интерполяции

установим нагрузку $\sigma_s = \sigma_0 / \sigma_Y$, при которой раскрытие трещины v становится равным критическому раскрытию v_c . Полученное значение $\sigma_s = \sigma_0 / \sigma_Y$ является критической нагрузкой по достаточному критерию (3), (4). Критическую нагрузку $\sigma_N = \sigma_0 / \sigma_Y$ по необходимому критерию (3) вычислим на таком шаге по нагрузке, когда ближайший к вершине трещины конечный элемент полностью перейдет в пластическое состояние. В вершине выреза выполним условие (4) деформационного критерия разрушения.

Результаты вычислений представлены в таблице, в которой теоретические значения критической нагрузки по достаточному критерию σ_s , полученные из решения уравнения (16), можно сравнить с данными численного расчета. Поправочный коэффициент m в соотношении (13) определялся из сопоставления размеров модельной (Рис. 6) и расчетной пластической зоны для трещины ($\omega = 0^\circ$). Этим объясняется совпадение данных в первой строке таблицы: решение для трещины принималось эталонным, по нему корректировались подгоночные параметры аналитического решения. Как видно, результаты аналитической модели и численного расчета качественно совпадают.

Таблица. К сравнению численных и аналитических результатов

ω	$d = 2$ мм			$d = 4$ мм		
	σ_s , теория	σ_s , расчет	погрешность, %	σ_s , теория	σ_s , расчет	погрешность, %
0°	0,179	0,179	0	0,119	0,119	0
60°	0,187	0,183	2,2	0,126	0,121	4,1
90°	0,219	0,201	9	0,152	0,134	13
120°	0,301	0,271	11	0,225	0,185	22

7. Заключение

Из приведенных в таблице данных следует, что результаты численных экспериментов хорошо согласуются с результатами расчетов по аналитической модели разрушения материалов со структурой при нормальном отрыве в режиме маломасштабной текучести. Осуществлена оценка размеров пластической зоны в окрестности вершины V-образного выреза. Методом конечных элементов получено выражение обобщенного КИН для трещины при остром V-вырезе. Построены структурные формулы для прогнозирования критической разрушающей нагрузки и длины зоны предразрушения при нагружении по I-й моде (нормальный отрыв) в структурированных упругопластических материалах при плоском напряженном состоянии и при плоской деформации. В частности, эти обобщенные формулы справедливы для пластин конечных размеров с краевыми или внутренними трещинами.

В целом предложенная аналитическая модель может быть полезной при исследовании деформирования и разрушения конструкций из низколегированных сталей, работающих при температурах ниже порога хладноломкости. Методика расчета на ее основе позволит уменьшить количество лабораторных или численных экспериментов, необходимых для предсказания уровня разрушающей нагрузки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-08-00483-а и 18-08-00528-а).

Литература

1. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
2. Seweryn A. Brittle fracture criterion for structures with sharp notches // Eng. Fract. Mech. – 1994. – Vol. 47, No.5 – P. 673-681.
3. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech. – 1952. – Vol. 19. – P. 526-528.
4. Seweryn A., Lukaszewicz A. Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches // Eng. Fract. Mech. – 2002. – Vol. 69. – P. 1487-1510. DOI
5. Berto F, Lazzarin P. A review of the volume-based strain energy density approach applied to V-notches and welded structures // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2009. – Vol. 52. – P. 183-194. DOI
6. Berto F, Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches // Materials Science and Engineering R. – 2014. – Vol. 75. – P. 1-48. DOI
7. Radaj D. State-of-the-art review on extended stress intensity factor concepts // Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. – 2014. – Vol. 37. – P. 1-28. DOI
8. Буледруа О., Элазизи А., Хадже Мельяни М., Плювинаж Ж., Матвиенко Ю.Г. Оценка T-напряжений в образце в окрестности надреза V-образной формы с использованием двухпараметрической модели // ПИМТФ. – 2017. – Т. 58, № 3. – С. 198-209. (English version DOI)
9. Васильев В.В., Турье С.А. Новое решение плоской задачи о равновесной трещине // Изв. АН, МТТ. – 2016. – №5. – С. 61-67. (English version DOI)

10. Корнев В.М., Кургузов В.Д. Достаточный дискретно-интегральный критерий прочности при отрыве // ПМТФ. – 2001. – Т. 42, № 2. – С. 161-170. (English version [DOI](#))
11. Корнев В.М., Кургузов В.Д. Достаточный критерий разрушения в случае сложного напряженного состояния при непропорциональном деформировании материала в зоне предразрушения // ПМТФ. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 153-163. (English version [DOI](#))
12. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. – Самара: Самарский университет, 2001. – 632 с.
13. Астапов Н.С., Корнев В.М., Кургузов В.Д. Модель расслоения разномодульного материала с трещиной // Физическая мезомеханика. – 2016. – Т. 19, №4. – С.49-57.
14. Carpinteri A., Cornetti P., Pugno N., Sapora A., Taylor D. A finite fracture mechanics approach to structures with sharp V-notches // Eng. Fract. Mech. – 2008. – Vol. 75. – P. 1736-1752. [DOI](#)
15. Pathak H., Singh A., Singh I.V. Three-dimensional quasi-static interfacial crack growth simulations in thermo-mechanical environment by coupled FE-EFG approach // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2016. – Vol. 86. – P. 267-283. [DOI](#)
16. Панин С.В., Тутков В.В., Любутин П.С. Влияние величины шага сетки векторного поля перемещений на оценку деформации в методе корреляции цифровых изображений // ПМТФ. – 2017. – Т. 58, № 3. – С. 57-67. (English version [DOI](#))
17. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикладная механика. – 1959. – Т. 5, № 4. – С. 391-401.
18. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. – 1960. – Vol. 8, no. 2. – P. 100-104. [DOI](#)
19. Панасюк В.В., Андreyкив А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения материалов. – Киев: Наукова думка, 1988. – 488 с.
20. Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения. – М.: Физматлит, 2006. – 328 с.
21. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ. – 1969. – Т. 33, вып. 2. – С. 212-222.
22. Кургузов В.Д., Астапов Н.С., Астапов И.С. Модель разрушения квазихрупких структурированных материалов // ПМТФ. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 173-185. (English version [DOI](#))
23. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Механика разрушения и прочность материалов / Под общ. ред. В.В. Панасюка. – Киев: Наукова думка, 1988. – Т. 2. – 619 с.
24. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х томах. Под ред. Ю. Мураками. Т. 1. – Москва: Мир, 1990. – 448 с.
25. Carpinteri A., Stern M., Soni M.L. On the computation of stress intensities at fixed-free corners // Int. J. Solid. Struct. – 1976. – Vol. 12. – P. 331-337.
26. Sinclair GB, Okajima M, Griffin JH. Path independent integrals for computing stress intensity factors at sharp notches in elastic plates // Int. J. Numer. Meth. Engng., – 1984. – Vol. 20. – P. 999-1008.
27. Dunn M.L., Suwito W, Cunningham S., May C.W. Fracture initiation at sharp notches under mode I, mode II, and mild mixed mode loading // Int. J. of Fracture. – 1997. – Vol. 84. – P. 367-381.
28. Dunn M.L., Suwito W. Fracture initiation at sharp notches: correlation using critical stress intensities // Int. J. Solid. Struct. – 1997. – Vol. 34, no. 29. – P. 3873-3883. [DOI](#)
29. Chen D-H. Stress intensity factors for V-notched strip under tension or in-plane bending // Int. J. of Fracture. – 1995. – Vol. 70. – P. 81-97.
30. Корнев В.М., Демешкин А.Г. Квазихрупкое разрушение компактных образцов при наличии острых надрезов и U-образных вырезов // ПМТФ. – 2018. – Т. 59, № 1. – С. 138-152. [DOI](#)
31. Кургузов В.Д. Выбор параметров сетки конечных элементов при моделировании роста трещин гидроразрыва // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2015. – Т. 8. – № 3. – С. 254-263. (English version [DOI](#))
32. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 262 с.
33. MARC Users Guide, Vol. A. – Santa Ana (CA): MSC.Software Corporation, 2017. – 980 p.

References

1. Morozov N.F. *Matematicheskiye voprosy teorii treshchin* [Mathematical problems in the theory of cracks]. Moscow: Nauka, 1984. 256 p.
2. Seweryn A. Brittle fracture criterion for structures with sharp notches. *Engineering Fracture Mechanics*, 1994, vol. 47, no. 5, pp. 673-681.
3. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J. Appl. Mech.*, 1952, vol. 19, pp. 526-528.
4. Seweryn A., Łukaszewicz A. Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches. *Eng. Fract. Mech.*, 2002, vol. 69, pp. 1487-1510. [DOI](#)
5. Berto F, Lazzarin P. A review of the volume-based strain energy density approach applied to V-notches and welded structures. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2009, vol. 52, no.3, pp. 183-194. [DOI](#)
6. Berto F, Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches. *Materials Science and Engineering R*, 2014, vol. 75, pp. 1-48. [DOI](#)
7. Radaj D. State-of-the-art review on extended stress intensity factor concepts. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 2014, vol. 37, pp. 1-28. [DOI](#)
8. Bouledroua O., Elazzizi A., Meliani M.H., Pluvinage G., Matvienko Y.G. T-stress estimation by the two-parameter approach for a specimen with a V-shaped notch. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2017, vol. 58, no. 3, pp. 546-555. [DOI](#)
9. Vasil'ev V.V., Lurie S.A. New solution of the plane problem for an equilibrium crack. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, no 5, pp. 557-561 [DOI](#)

10. Kornev V.M., Kurguzov V.D. Sufficient discrete-integral criterion of rupture strength. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2001, vol. 42, no. 2, pp. 328-336. DOI
11. Kornev V.M., Kurguzov V.D. Sufficient criterion of fracture in the case with a complex stress state and non-proportional deformation of the material in the pre-fracture zone. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2010, vol. 51, no.6, pp. 904-912. DOI
12. Astaf'ev V.I., Radaev Iu.N., Stepanova L.V. *Nelineinaiia mekhanika razrusheniia* [Non-linear fracture mechanics]. Samara: Samara University, 2001. 632 p.
13. Astapov N.S., Kornev V.M., Kurguzov V.D. *Model' rassloeniia raznomodul'nogo materiala s treshchinoi* [Model of the stratification of a non-modular material with a crack]. *Fizicheskaiia mezomekhanika*, 2016, vol. 19, no. 4, pp. 49-57.
14. Carpinteri A., Cornetti P., Pugno N., Sapora A., Taylor D. A finite fracture mechanics approach to structures with sharp V-notches. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, vol. 75, pp. 1736-1752. DOI
15. Pathak H., Singh A., Singh I.V. Three-dimensional quasi-static interfacial crack growth simulations in thermo-mechanical environment by coupled FE-EFG approach. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2016, vol. 86, pp. 267-283. DOI
16. Panin S.V., Titkov V.V., Lyubutin P.S. Effect of the mesh size of the vector displacement field on the strain estimate in the digital image correlation method. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2017, vol. 58, no. 3, pp. 425-434. DOI
17. Leonov M.Ia., Panasiuk V.V. Razvitiie mel'chaishikh treshchin v tverdom tele [Development of tiny cracks in the solid] *Prikladnaya mekhanika*, 1959, vol. 5, no. 4, pp. 391-401.
18. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, vol. 8, no. 2, pp. 100-104. DOI
19. Panasiuk V.V., Andreikiv A.E., Parton V.Z. *Osnovy mekhaniki razrusheniia materialov* [Fundamentals of mechanics of materials destruction]. Kiev: Naukova dumka, 1988. 488 p.
20. Matvienko Yu.G. *Modeli i kriterii mehaniki razrusheniia* [Models and criteria of fracture mechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2006. 328 p.
21. Novozhilov V.V. On the necessary and sufficient criterion of brittle strength. *Prikl. Mat. Mekh.* 1969, vol. 33, no 2, pp. 212-222.
22. Kurguzov V.D., Astapov N.S., Astapov I.S. Fracture model for structured quasibrittle materials. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 6, pp. 1055-1065. DOI
23. Savruk M.P. *Mekhanika razrusheniia i prochnost' materialov* [Fracture mechanics and strength of materials], ed. by V.V. Panasyuk. Kiev: Naukova Dumka, 1988, vol. 2. 619 p.
24. Stress intensity factors handbook. In 2 vols. Ed. J. Murakami. Vol.1. Moscow: Mir, 1990, 448 p.
25. Carpinteri A., Stern M, Soni M.L. On the computation of stress intensities at fixed-free corners. *Int. J. Solid. Struct.* 1976, vol. 12, pp. 331-337.
26. Sinclair G.B, Okajima M., Griffin J.H. Path independent integrals for computing stress intensity factors at sharp notches in elastic plates. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1984, vol. 20, pp. 999-1008.
27. Dunn M.L., Suwito W, Cunningham S., May C.W. Fracture initiation at sharp notches under mode I, mode II, and mild mixed mode loading. *Int. J. of Fracture*, 1997, vol. 84, pp. 367-381.
28. Dunn M.L., Suwito W. Fracture initiation at sharp notches: correlation using critical stress intensities. *Int. J. Solid Struct.* 1997, vol. 34, no. 29, pp. 3873-3883. DOI
29. Chen D-H. Stress intensity factors for V-notched strip under tension or in-plane bending. *Int. J. of Fracture*, 1995, vol. 70, pp. 81-97.
30. Kornev V.M., Demeshkin A.G. Quasi-brittle fracture of compact specimens with sharp notches and u-shaped cuts. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2018, vol. 59, no 1, pp. 120-131. DOI
31. Kurguzov V.D. Optimization of the finite element mesh in modeling of hydrofracturing crack growth. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no 3, pp. 254-263. DOI
32. Korobeinikov S.N. *Nelineynoe deformirovanie tverdyh tel* [Nonlinear deformation of solids]. Novosibirsk: SB RAS, 2000. 262 p.
33. *MARC Users Guide*. Vol. A. Santa Ana (CA): MSC.Software Corporation, 2017. 980 p.

Поступила в редакцию 30.01.2018; опубликована в электронном виде 05.07.2018

Сведения об авторах

Кургузов Владимир Дмитриевич, дфмн., проф, внс, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (ИГиЛ СО РАН), 630090, Новосибирск, пр-т Лаврентьева, 15; e-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru

Астапов Николай Степанович, кфмн., доц., снс, ИГиЛ СО РАН; e-mail: nika@hydro.nsc.ru