

DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.2.11
УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОСТИ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Е.А. Калентьев

Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, Ижевск, Российская Федерация

В настоящей статье предлагается аналитический метод исследования концентрации напряжений в окрестности щелевидных полостей. В основу метода положена гипотеза о возможности оценки влияния полости на перераспределение внутренних усилий путем включения в решение фиктивных сил. Для определения напряженно-деформированного состояния вводятся дополнительные силы, действующие на поверхности полости. Величина этих сил выбирается исходя из значения вектора напряжений на поверхности, ограничивающей объем полости (в дальнейшем потока тензора напряжений). При вычислении поверхностных интегралов используется замена выражений компонент тензора напряжений полиномами невысокой степени. Рассмотрено напряженно-деформированное состояние для наиболее общего – трехмерного – случая на примере упругого полупространства с полостью в форме «тонкого» прямоугольного параллелепипеда. Полупространство нагружено сосредоточенной силой, приложенной к его свободной поверхности. Полученные результаты всесторонне сравниваются с решением аналогичной задачи методом конечных элементов. Дополнительно изучена концентрация напряжений в окрестности полости в форме четырехугольной пирамиды, при этом основание пирамиды совпадает с гранью кубической полости. Построены распределения компонент тензора напряжений в окрестности этих полостей. Проведена оценка точности и эффективности предложенной модели, определена граница применимости предлагаемого решения, которое для полупространства дает приемлемые результаты в точках, расположенных вблизи основания полостей. Приведены возможные пути совершенствования расчетной методики. В связи с этим открывается перспектива возможного эффективного использования ресурса конструкционных материалов. Создавая в теле систему полостей требуемой формы и размеров, можно получать снижение напряжений в критических точках и тем самым повышать прочность изделия. Аналогично можно поступать, если необходимо перераспределить напряжения в объеме конструкции для более равномерного проявления несущей способности материала.

Ключевые слова: поток тензора напряжений, концентрация напряжений, поверхность полости, аналитическое решение, трехмерное упругое полупространство

STRESS CONCENTRATION AROUND CAVITY IN ELASTIC HALF-SPACE

E.A. Kalentev

Udmurt Federal Research Center UB RAS, Izhevsk, Russian Federation

This paper presents an analytical method for studying stress concentration around slit like cavities. The method is based on the assumption that the influence of the cavity on the redistribution of internal forces can be modeled by including fictitious forces in the solution. To determine the stress-strain state, additional forces acting on the cavity surface are used. The magnitude of these forces is chosen on the basis of the value of stress tensor flow through the examined surfaces limiting the cavity volume. In calculating surface integrals, we use the replacement of the expressions for the stress tensor components by the polynomials of a low degree. Research of stress-strain state for the most general three-dimensional case is done; an elastic half-space with a cavity in the form of a «thin» rectangular parallelepiped under the action of a concentrated force applied to a free surface is considered. The obtained results are comprehensively compared with the solution of a similar problem by the finite element method. In addition, the stress concentration in the vicinity of the cavity in the form of a quadrangular pyramid is investigated, while the base of the pyramid coincides with the face of the cubic cavity. Distributions of the stress tensor components in the vicinity of these cavities are constructed. The solution used for the half-space gives acceptable results at the points located near the base of these cavities. The estimation of accuracy and efficiency of the proposed calculation model is made, the applicability boundary of the proposed solution is determined. Possible ways of improving the calculation method are given. It therefore seems promising to use the resource of structural materials advantageously. That is, creating a cavity system of the required shape and size in the bodies, one can reduce stresses at critical points, thereby increasing the strength of the product. Similar technique can be applied to redistribute stresses in the volume of the structure in order to level the bearing capacity of the material.

Key words: stress tensor flow, stress concentration, cavity surface, analytical solution, three-dimensional elastic half-space

1. Введение

Многие тела окружающего нас мира имеют различные полости. Это могут быть полости в грунтах, деталях машин, строительных конструкциях, биологических материалах и другом. При воздействии нагрузок на такие тела концентрация напряжений локализуется вокруг полостей, здесь наблюдается резко выраженное изменение параметров напряженно-деформированного состояния (НДС). Для оценки целостности таких тел необходимы эффективные методы определения уровня напряжений в окрестности полостей.

В общем случае исследование концентрации напряжений может быть выполнено экспериментально, аналитически и с помощью численного анализа. Поскольку этому вопросу посвящено множество работ, так что даже краткий обзор дать проблематично, остановимся только на некоторых основных моментах и частных примерах аналитического решения. Отметим, что проведение экспериментов не всегда возможно и обычно трудоемко, а численные методы практически всегда требуют программной реализации и значительных вычислительных ресурсов.

Начало изучения концентрации напряжений принято связывать с работой [1], в которой рассматривалась бесконечная плита, ослабленная отверстием. Обширная информация по этому вопросу содержится в обзорных статьях [2] и [3]. В работах [4] и [5] получены решения для некоторых простых случаев. Распределение напряжений внутри и вокруг сфероидальных включений и пустот выполнено в [6]. Аналитические функции комплексного переменного Колосова–Мусхелишвили [7] применяются для решения задач плоской теории упругости, степенные ряды Фурье — для областей, ограниченных окружностью, интегралы типа Коши — для эллиптических отверстий. Также для решения пространственных задач теории упругости распространенным является метод интегральных уравнений, на его основе в работе [8] выполнено исследование напряженного состояния кусочно-односвязных и многосвязных тел и тел с разрезами. Путем распространения аппарата аналитических и обобщенно аналитических функций на пространственные задачи найдены решения некоторых задач, таких как пространство с тороидальной полостью, неосесимметричная задача для пространства со сферической полостью и других [9]. В работе [10] рассмотрены круговая и эллиптическая щели в упругой среде, малая сферическая полость в скрученном цилиндрическом стержне и некоторые другие задачи. Осесимметричные задачи решены, как правило, либо в перемещениях с использованием уравнений Ламе, либо при помощи функции Лява [11–14]. Отметим, что в конкретных краевых задачах возникают трудности при подчинении их решения граничным условиям. Так, при наличии в записи граничных условий функции Лява при заданных перемещениях появляются ее вторые производные, а в случае заданных напряжений — третьи производные. При применении же двух гармонических функций порядок их производных в выражениях для напряжений и перемещений ниже, но краевые задачи при этом не являются не зависящими от условий на границе. В обоих случаях решение строится в виде рядов по полиномам Лежандра. Кроме того, существующие аналитические методы имеют ограничения из-за формы полости или специфики задачи. Например, при кубической полости или полости с резкой границей между гранями возможны сингулярности в НДС, или рассматриваемая задача является симметричной. Несмотря на большое количество публикаций, не ослабевает интерес к задачам с концентрацией напряжений в окрестности различных полостей, включений, неоднородностей, возвратных углов и тому подобное. В относительно свежих работах [15–18] обсуждаются те или иные аспекты, связанные с концентрацией напряжений.

Не уменьшая важности фундаментальных исследований, можно утверждать, что существующие аналитические решения применимы только для полостей или включений с простыми вариантами геометрии и граничных условий. Также значительно упрощает получение решения плоская постановка задачи или симметрия НДС. В общем случае решения, если и могут быть получены в замкнутой форме, будут чрезвычайно громоздкими, и их использование в инженерной практике не представляется возможным. Поэтому создание эффективного и универсального метода определения НДС в окрестности полости щелевидной формы имеет самостоятельное значение.

Как правило, максимум напряжений наблюдается на границе полости. Например, в неограниченной упругой среде с однородной деформацией на бесконечности и шаровидной полостью наибольшие напряжения будут иметь место на поверхности вблизи экватора. При этом, как правило, не рассматриваются области с пониженными напряжениями, которые, безусловно, присутствуют. В среде с шаровой полостью такие области пониженных напряжений располагаются на полюсах и по объему заметно превышают области повышенных напряжений. Представляется перспективной возможность эффективного использования ресурса конструкционных материалов, а именно, создавать в телах системы полостей требуемой формы и размеров, получать снижение напряжений в критических точках и повышать тем самым прочность изделия. Аналогично можно поступать, если необходимо перераспределить напряжения в объеме конструкции для более равномерного проявления несущей способности материала. И в этом случае для реализации необходим эффективный аналитический подход.

2. Постановка задачи и основные соотношения

Рассмотрим упругое изотропное полупространство и связанные с ним координаты x_i . Свободная поверхность расположена в плоскости Ox_1x_2 , положительная полуось x_3 находится в среде. Задача определения деформаций упругой изотропной среды, ограниченной плоскостью, в поле сил, приложенных к ее свободной поверхности, решена в конце XIX века: в [19] для случая нормальной сосредоточенной силы, а в [20] для касательно действующих сил.

Воспользуемся уравнением равновесия вида

$$\text{grad div}(\mathbf{u}) + (1 - 2\nu)\Delta\mathbf{u} = 0,$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений, ν — коэффициент Пуассона, при возможных вариантах граничных условий на свободной поверхности: распределенной нагрузке или сосредоточенной силе

$$\sigma_{i3} = F_i(x_1, x_2) \quad \text{или} \quad F_i(x_1, x_2) = \delta(x_1)\delta(x_2)F_i,$$

а также при условии на бесконечности

$$F_i(x_1, x_2)\Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Для случая нагружения сосредоточенной силой \mathbf{F} произвольной ориентации, приложенной в начале координат ($r = 0$), перемещения u_i имеют вид [21]:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \left[\frac{x_1 x_3}{r^3} - \frac{(1-2\nu)x_1}{r(r+x_3)} \right] F_3 + \frac{2(1-\nu)r+x_3}{r(r+x_3)} F_1 + \frac{[2r(\nu r+x_3)+x_3^2]x_1}{r^3(r+x_3)^2} (x_1 F_1 + x_2 F_2) \right\}, \\ u_2 &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \left[\frac{x_2 x_3}{r^3} - \frac{(1-2\nu)x_2}{r(r+x_3)} \right] F_3 + \frac{2(1-\nu)r+x_3}{r(r+x_3)} F_2 + \frac{[2r(\nu r+x_3)+x_3^2]x_2}{r^3(r+x_3)^2} (x_1 F_1 + x_2 F_2) \right\}, \\ u_3 &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \left[\frac{2(1-\nu)}{r} + \frac{x_3^2}{r^3} \right] F_3 + \left[\frac{1-2\nu}{r(r+x_3)} + \frac{x_3}{r^3} \right] (x_1 F_1 + x_2 F_2) \right\}, \\ & \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Формулы (1) можно записать в компактной форме с использованием тензора Грина:

$$u_i = G_{ik}(x_1, x_2, x_3)F_k,$$

где G_{ik} — компоненты тензора Грина для уравнений равновесия бесконечного упругого полупространства. При $x_3 = 0$ из (1) получаем выражения для перемещений свободной поверхности:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \frac{1}{r} \left\{ \left[-\frac{(1-2\nu)x_1}{r} \right] F_3 + 2(1-\nu)F_1 + \frac{2\nu x_1}{r^2} (x_1 F_1 + x_2 F_2) \right\}, \\ u_2 &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \frac{1}{r} \left\{ \left[-\frac{(1-2\nu)x_2}{r} \right] F_3 + 2(1-\nu)F_2 + \frac{2\nu x_2}{r^2} (x_1 F_1 + x_2 F_2) \right\}, \\ u_3 &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \frac{1}{r} \left\{ 2(1-\nu)F_3 + (1-2\nu)\frac{1}{r} F_2 (x_1 F_1 + x_2 F_2) \right\}. \end{aligned}$$

Из известных соотношений Коши и закона Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \sigma_{ij} &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \varepsilon_{ii} \delta_{ij} + \frac{E}{(1+\nu)} \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{ii} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

здесь E — модуль упругости, δ_{ij} — дельта Кронекера, следуют выражения для компонент тензоров деформаций и напряжений. Например, ε_{33} и σ_{33} имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} &= -\frac{3}{2} \frac{(F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3)(1+\nu) \left(x_3^2 - \frac{2}{3} r^2 \nu \right)}{r^5 E \pi}, \\ \sigma_{33} &= -\frac{3}{2} \frac{x_3^2 (F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3) (r x_1^2 + r x_2^2 + 4 r x_3^2 + 3 x_1^2 x_3 + 3 x_2^2 x_3 + 4 x_3^3)}{\pi (r+x_3)^3 r^5}. \end{aligned} \quad (3)$$

Вырежем из полупространства часть среды произвольной формы и расположения. Пусть s — поверхность и V — объем получившейся полости. При нагружении сосредоточенной силой \mathbf{F} ,

приложенной в начале координат ($r = 0$), деформация на бесконечности будет равна нулю, и, соответственно, нулевым станет тензор напряжений. Также положим, что в результате деформации объем и форма полости меняются незначительно. Итак, требуется найти выражения для компонент тензора напряжений в окрестности этой полости.

3. Решение задачи

Не нарушая общности рассуждения, определим НДС полупространства с полостью в форме прямоугольного параллелепипеда, имеющего координаты e_i геометрического центра и $a_{1,2}, b_{1,2}, c_{1,2}$ граней (Рис. 1), при этом грани полости параллельны координатным плоскостям. Поверхность полости s составляют шесть граней S_1, \dots, S_6 .

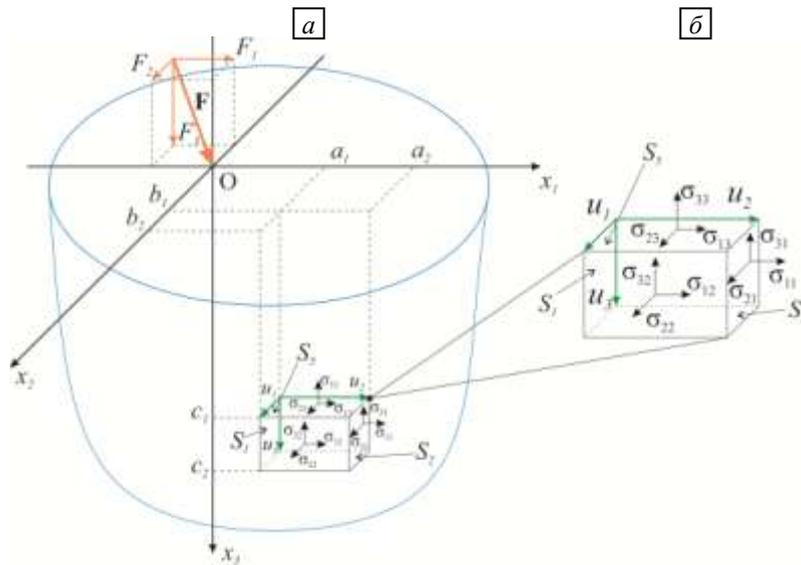


Рис. 1. Схема упругого полупространства с полостью (а), прямоугольная полость в увеличенном виде (б)

Первоначально рассмотрим поверхность полости без учета самой полости. Силы, действующие на этих гранях S_1, \dots, S_6 , в отсутствие полости определяются вектором напряжений на поверхности s (в дальнейшем — потоком тензора напряжений):

$$P = \iint_s \sigma \cdot n dS .$$

Компоненты этого вектора равны (свертка выполняется по вторым индексам тензора напряжений)

$$P_i = \iint_s \sigma_{ik} n_k dS = \iint_s (\sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2 + \sigma_{i3} n_3) dS .$$

При вычислении потока тензора напряжений требуется брать поверхностные интегралы от довольно громоздких функций, поэтому представим их в виде полиномов невысокой степени в окрестности центра полости e_i . Тогда с учетом дифференциального оператора вида

$$D = (x_1 - e_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - e_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_3 - e_3) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

имеем:

$$\sigma_{ij}^*(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{D^k \sigma_{ij}(e_1, e_2, e_3)}{k!} + R_m(x_1, x_2, x_3) ,$$

где $R_m(x_1, x_2, x_3)$ — остаточный член порядка $(m + 1)$, который в дальнейшем не учитываем.

Содержимое первого столбца тензора напряжений можем записать в таком виде:

$$\sigma_{n1}^*(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{4}K_1^n x_1^2 + \frac{1}{4}(6K_2^n x_2 + 6K_3^n x_3 + 8K_4^n)x_1 + \frac{3}{4}K_5^n x_2^2 + \frac{1}{4}(6K_6^n x_3 + 8K_7^n)x_2 + \frac{3}{4}K_8^n x_3^2 + 2K_9^n x_3 + 3K_{10}^n,$$

где K_m^n ($n = 1, 2, 3$; $m = 1, \dots, 10$) — некоторые постоянные, определяемые упругими характеристиками среды, действующей силой и расположением полости.

Компоненты вектора силы P_{nk} (k — номер грани), например, на грани S_1 полости, вычислим по формуле:

$$P_{n1} = \iiint \sigma_{n1}^* dS = \int_{c_1}^{c_2} \int_{b_1}^{b_2} \sigma_{n1}^* dx_2 dx_3 = \frac{1}{4}K_8^n (b_2 - b_1)(-c_1^3 + c_2^3) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}K_6^n (-b_1^2 + b_2^2) + \frac{3}{2}K_3^n a_1 (b_2 - b_1) \right) (-c_1^2 + c_2^2) + \frac{1}{4}K_5^n (-b_1^3 + b_2^3)(c_2 - c_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}K_2^n a_1 + 2K_7^n \right) (-b_1^2 + b_2^2)(c_2 - c_1) + \frac{3}{4}K_1^n a_1^2 (b_2 - b_1)(c_2 - c_1) + 2K_4^n a_1 (b_2 - b_1)(c_2 - c_1) + 3K_{10}^n (b_2 - b_1)(c_2 - c_1),$$

или в компактной форме относительно координаты a_1 грани S_1 :

$$P_{n1} = \frac{3}{4}C_1^{n1} a_1^2 + \frac{1}{4}C_2^{n1} a_1 + \frac{1}{8}C_3^{n1}.$$

Здесь C_i^{nk} ($i = 1, 2, 3$) определяются формой и размерами проекции полости на плоскость, перпендикулярную оси с координатой a_1 . Повторяя рассуждения аналогичным образом, для остальных граней полости получим:

$$P_{nk} = \frac{3}{4}C_1^{nk} a_1^2 + \frac{1}{4}C_2^{nk} a_1 + \frac{1}{8}C_3^{nk}, \quad n = 1, \dots, 3, \quad k = 1, \dots, 6. \quad (4)$$

Выделим в теле некоторый объем и рассмотрим действующую на него суммарную силу. Ее можно представить, с одной стороны, как $\int \mathbf{F} dV$, где \mathbf{F} — сила, приходящаяся на единицу объема, с другой стороны, как сумму сил, с которыми на данный объем через его поверхность влияют окружающие части тела. Тогда результирующая сила от окружающих объем V частей может быть записана как интеграл по всей его поверхности:

$$\int \mathbf{F}_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} df_k.$$

И, как известно, в сплошной среде отклик этого объема на воздействие от окружающих его частей, имеет обратный знак: $-\oint \sigma_{ik} df_k$.

При наличии полости силы P_{nk} , возникающие на поверхности S , не будут компенсироваться силами со стороны занимаемого ею объема в силу отсутствия в нем среды. Тогда, приложив к данной поверхности силу $-\oint \sigma_{ik} df_k$, можно приближенно описать картину НДС в окрестности полости. Это удобно представить как случай нагружения упругого полупространства распределенной силой. При этом, конечно же, надо помнить, что такое допущение вносит дополнительную погрешность в результаты, и, естественно, приводит к ожидаемому более быстрому росту напряжений в среде по мере удаления от границы полости. Также следует учесть, что используемое решение для полупространства дает приемлемые результаты в точках, расположенных вблизи основания этих полостей, но вдали от края основания. Тем не менее, цель данной работы заключается в демонстрации принципиальной возможности применения предлагаемого метода.

В общем случае распределение сил по поверхности полости может быть неравномерным, особенно это актуально при большом градиенте деформаций. Тогда деформация в результате нагружения распределенными силами опишется интегралом:

$$u_i = \iint G_{ik}(x_1 - x_1', x_2 - x_2', x_3) \sigma_{km}(x_1', x_2') dx_1' dx_2' . \quad (5)$$

Чтобы избежать громоздких вычислений при интегрировании компонент тензора Грина и напряжений, представим действие распределенных сил как системы сосредоточенных нагрузок (4).

Рассмотрим поверхность S_2 полости. В ее центр поместим декартову систему координат $O'y_1y_2y_3$ так, чтобы ее орты были сонаправлены с координатными осями Ox_i . Тогда перемещение u_i^y точек упругого полупространства в результате приложения в центре ($r = 0$) этой системы координат сосредоточенной силы P_{n_2} составит:

$$\begin{aligned} u_1^y &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \left(\left[\frac{2(1-\nu)}{r} + \frac{y_1^2}{r^3} \right] P_{12} + \left[\frac{1-2\nu}{r(r+y_1)} + \frac{y_1}{r^3} \right] (y_2 P_{22} + y_3 P_{32}) \right), \\ u_2^y &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \left(\left[\frac{y_1 y_2}{r^3} - \frac{(1-2\nu)y_2}{r(r+y_1)} \right] P_{12} + \frac{2(1-\nu)r+y_1}{r(r+y_1)} P_{22} + \frac{[2r(\nu r+y_1)+y_1^2]y_1}{r^3(r+y_1)^2} (y_2 P_{22} + y_3 P_{32}) \right), \\ u_3^y &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \left(\left[\frac{y_1 y_3}{r^3} - \frac{(1-2\nu)y_3}{r(r+y_1)} \right] P_{12} + \frac{2(1-\nu)r+y_1}{r(r+y_1)} P_{32} + \frac{[2r(\nu r+y_1)+y_1^2]y_3}{r^3(r+y_1)^2} (y_2 P_{22} + y_3 P_{32}) \right), \\ r &= \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя (2), легко получим соответствующие выражения для компонент тензоров деформации ε_{ij}^y и напряжений σ_{ij}^y . В частности,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^y &= \frac{\left(r^2 \nu - \frac{3}{2} y_1^2 \right) (P_{12} y_1 + P_{22} y_2 + P_{32} y_3) (1+\nu)}{r^5 E \pi}, \\ \sigma_{11}^y &= - \frac{6 \left(\left(y_1^2 + \frac{1}{4} y_2^2 + \frac{1}{4} y_3^2 \right) r + y_1 \left(y_1^2 + \frac{3}{4} y_2^2 + \frac{3}{4} y_3^2 \right) \right) (P_{12} y_1 + P_{22} y_2 + P_{32} y_3) y_1^2}{r^5 (r+y_1)^3 \pi}, \\ \varepsilon_{12}^y &= - \frac{3 y_1 y_2 (P_{12} y_1 + P_{22} y_2 + P_{32} y_3) \left(r y_1 + y_1^2 + \frac{1}{2} y_2^2 + \frac{1}{2} y_3^2 \right) (1+\nu)}{r^5 (r+y_1)^2 E \pi}, \\ \sigma_{12}^y &= - \frac{3 y_1 y_2 (P_{12} y_1 + P_{22} y_2 + P_{32} y_3) (2r y_1 + 2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)}{2 r^5 (r+y_1)^2 \pi}. \end{aligned} \quad (7)$$

Разобьём поверхность S_2 грани полости на n равных частей $S_2^{n(k,l)}$, при этом индексы (k,l) определяют номер и расположение конкретной части. Примем, что усилия P_{n_2} распределены равномерно, тогда к каждой части S_2^n поверхности приложена сила P_{n_2}/n . В центре S_2^n находится система с координатами $y_i(n)$, и деформация под действием силы P_{n_2}/n в этой системе имеет вид (6). Аналогичные рассуждения повторим для остальных граней полости.

Тогда в некоторой точке A окрестности полости напряжения могут быть представлены в виде суммы напряжений, возникающих в результате приложения сосредоточенной силы F и сил, имеющих на поверхности полости:

$$\sigma_{ij}^A = \sigma_{ij} + \sum_1^6 \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}^{y(n)}. \quad (8)$$

Однако, в зависимости от местоположения расчетной точки в полости, в двойной сумме выражения (8) необходимо учитывать не все слагаемые. Очевидно, что некоторые грани полости и соответствующие им силы отделены от расчетной точки пространством полости, и их действие можно считать незначительным. Повторяя аналогичные рассуждения, можно построить аддитивный ряд для любой точки из окрестности полости.

4. Численный пример

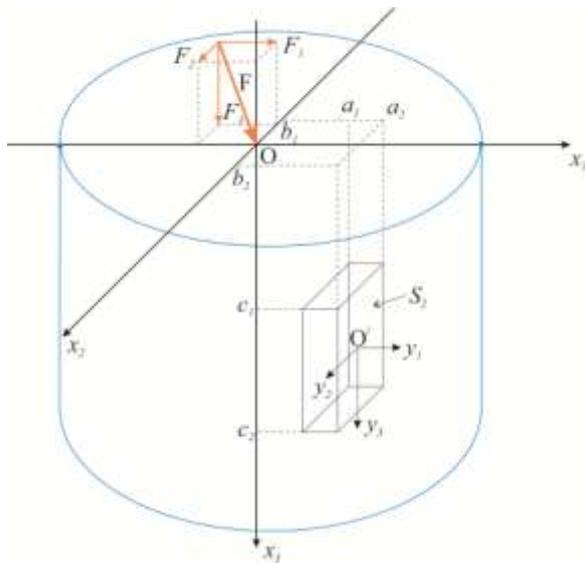


Рис. 2. Цилиндр с полостью под действием сосредоточенной силы

Расчетный метод, представленный выше, был реализован в отдельном программном коде. Для верификации решалась задача определения НДС упругого полупространства, представляющего собой цилиндр высотой $25 \cdot 10^{-3}$ м и диаметром основания $25 \cdot 10^{-3}$ м с полостью в форме прямоугольного параллелепипеда (Рис. 2). Боковая поверхность и нижнее основание цилиндра были закреплены от перемещений во всех направлениях. Модуль упругости и коэффициент Пуассона материала полагались следующими:

$$E = 2 \times 10^{11} \text{ Па}, \quad \nu = 0,3 .$$

Свободный торец цилиндра нагружался в центре сосредоточенной силой с компонентами

$$F_1 = 300 \text{ Н}, \quad F_2 = 400 \text{ Н}, \quad F_3 = 500 \text{ Н} .$$

Координаты центра полости и угловых точек грани составляли:

$$\begin{aligned} e_1 &= 0,505 \times 10^{-3} \text{ м}, & e_2 &= 0 \text{ м}, & e_3 &= 0,55 \times 10^{-3} \text{ м}, \\ a_1 &= 0,5 \times 10^{-3} \text{ м}, & a_2 &= 0,51 \times 10^{-3} \text{ м}, \\ b_1 &= -0,05 \times 10^{-3} \text{ м}, & b_2 &= 0,05 \times 10^{-3} \text{ м}, \\ c_1 &= 0,5 \times 10^{-3} \text{ м}, & c_2 &= 0,6 \times 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

Такая форма полости позволила в последующих расчетах пренебречь силами на перпендикулярных осям Ox_2, Ox_3 гранях полости, так как их площадь относительно S_2 мала и действующие на них силы, соответственно, незначительны.

Для верификации полученных результатов данная задача решена также в пакете ANSYS. При дискретизации расчетной области в модельной задаче использовано 1948560 элементов типа SOLID187 с общим числом узлов 2627248.

Рассмотрим окрестность полости, примыкающую к грани S_2 . Для описания концентрации напряжений построим распределение всех 6 независимых компонент тензора напряжений вдоль оси $O'y_1$, проходящей через ее центр и перпендикулярной ей.

Силы, имеющие место на поверхности грани S_1 , не будут входить в выражение (8), так как отделены от анализируемой области пространством полости. Таким образом, для определения концентрации напряжений требуется принять во внимание влияние сил, действующих только на грани S_2 , что значительно упрощает расчеты. Разбиение на части поверхности этой грани представлено на рисунке 3 при $n = 36$. Использование такого разбиения позволяет довольно просто записать выражение для распределения компонент тензора напряжений вдоль оси $O'y_1$ от сил $P_{n2}/36$, приложенных в центре каждой части S_2^{36} . Очевидно, что это простой сдвиг системы координат, и чтобы учесть его необходимо выполнить следующую замену координат в выражениях (7):

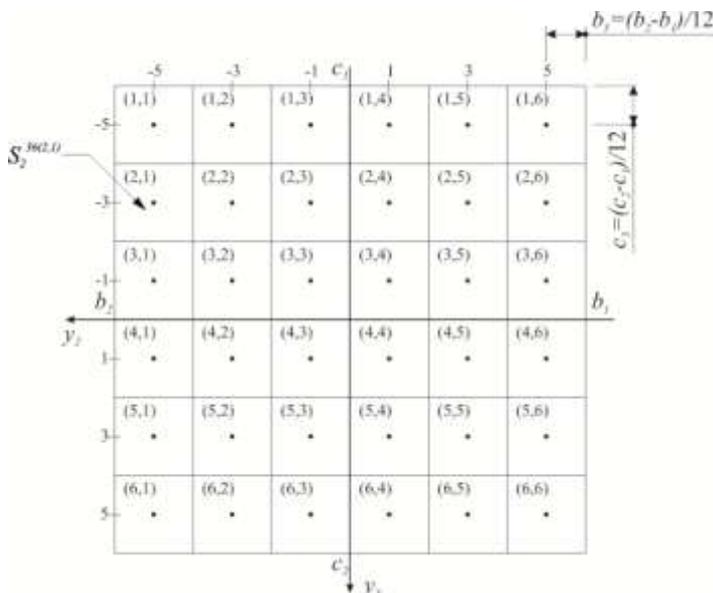


Рис. 3. Пример разбиения поверхности S_2 полости на части

$$\sigma_{ij}^{y(k,l)} \rightarrow \langle \sigma_{ij}^y \rangle \{ y_2 = ch_k \times b_3, y_3 = -ch_l \times c_3 \},$$

$$ch = [-5, -3, -1, 1, 3, 5],$$

$$b_3 = (b_2 - b_1)/12,$$

$$c_3 = (c_2 - c_1)/12.$$

В качестве примера покажем выражение распределения компоненты тензора напряжений σ_{12}^y от действия сосредоточенной силы, действующей на части $s_2^{36(2,1)}$:

$$\sigma_{12}^{y(2,1)} \rightarrow \langle \sigma_{12}^y \rangle \{ y_2 = -3b_3, y_3 = 5c_3 \},$$

$$\sigma_{12}^{y(2,1)} = -\frac{3}{2} \frac{y_1(-3b_3)(P_{12}y_1 + P_{22}(-3b_3) + P_{32}(5c_3))(2ry_1 + 2y_1^2 + (-3b_3)^2 + (5c_3)^2)}{r^5(r + y_1)^2 \pi},$$

$$r = \sqrt{y_1^2 + (-3b_3)^2 + (5c_3)^2}.$$

На рисунке 4 представлено распределение компонент тензора напряжений вдоль оси $o'y_1$. На всех графиках показаны кривые, соответствующие решениям: аналитическому без полости; МКЭ-решению без полости; МКЭ-решению с полостью; аналитическому решению для варианта с полостью; МКЭ-решению для варианта с полостью в форме пирамиды. Первые два — решение (3) и численное решение в ANSYS — приведены для оценки их соответствия друг другу. Практически полное совпадение результатов говорит о хорошем качестве примененной конечно-элементной сетки. Полученные данные для вариантов полупространства с полостью довольно хорошо согласуются с данными конечно-элементного анализа ANSYS. На этих графиках напряжений можно отметить несколько интересных моментов. Во-первых, как и ожидалось, в центре и на границе области концентрации напряжений некоторые компоненты тензора напряжений существенно превышают значения, полученные в ANSYS. Это можно объяснить как следствие способа учета влияния сил, приложенных на границе полости. Во-вторых, при приближении к границе полости расхождение между аналитическим решением и численным в ANSYS уменьшается. Действительно, решения для упругого полупространства не могут быть использованы здесь безоговорочно. Так, при разбиении поверхности грани s_2 полости на части выражения (6) будут хорошо отвечать действию сил только на центральных элементах ($\sigma_{ij}^{y(3,3)}, \sigma_{ij}^{y(3,4)}, \sigma_{ij}^{y(4,3)}, \sigma_{ij}^{y(4,4)}$). Для частей грани s_2 , расположенных ближе к ее периферии, соответствие ухудшается и достигает минимума на границе.

Распределение напряжений построим вдоль оси $o'y_1$, проходящей через центр грани s_2 . В этом случае при приближении к границе полости число частей с хорошо соотносящимися силами и перемещениями велико, а влияние сил, действующих на периферии, незначительно, и только непосредственно у границы полости наблюдается резкое изменение результатов. По мере удаления от границ полости к границам полупространства картина меняется: все части разбиения поверхности полости начинают вносить ощутимый вклад в решение, и это приводит к расхождению величин напряжений, найденных по предлагаемой методике и вычисленных в ANSYS. Для преодоления этого необходимо увеличить число

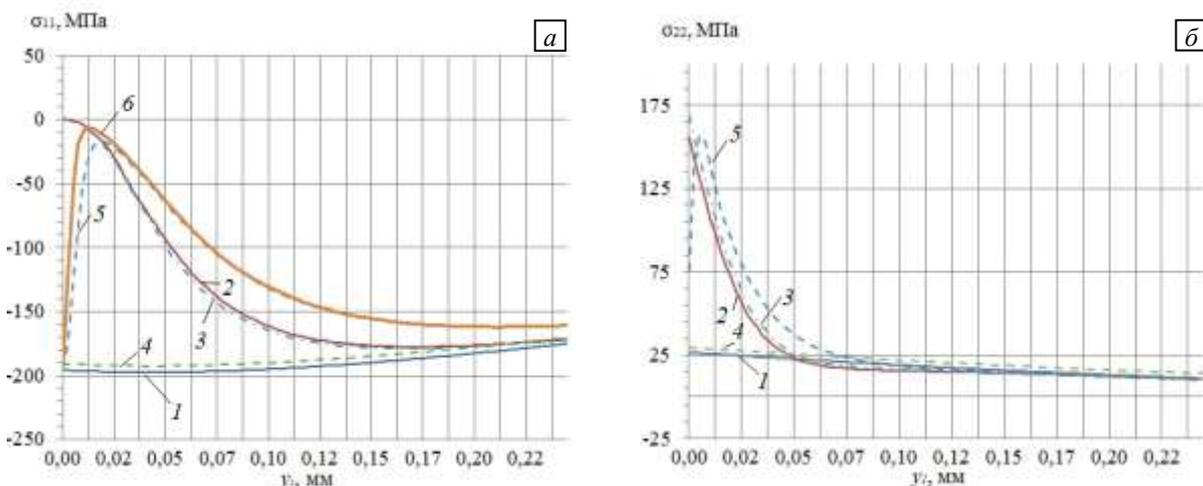


Рис. 4. Продолжение см. далее

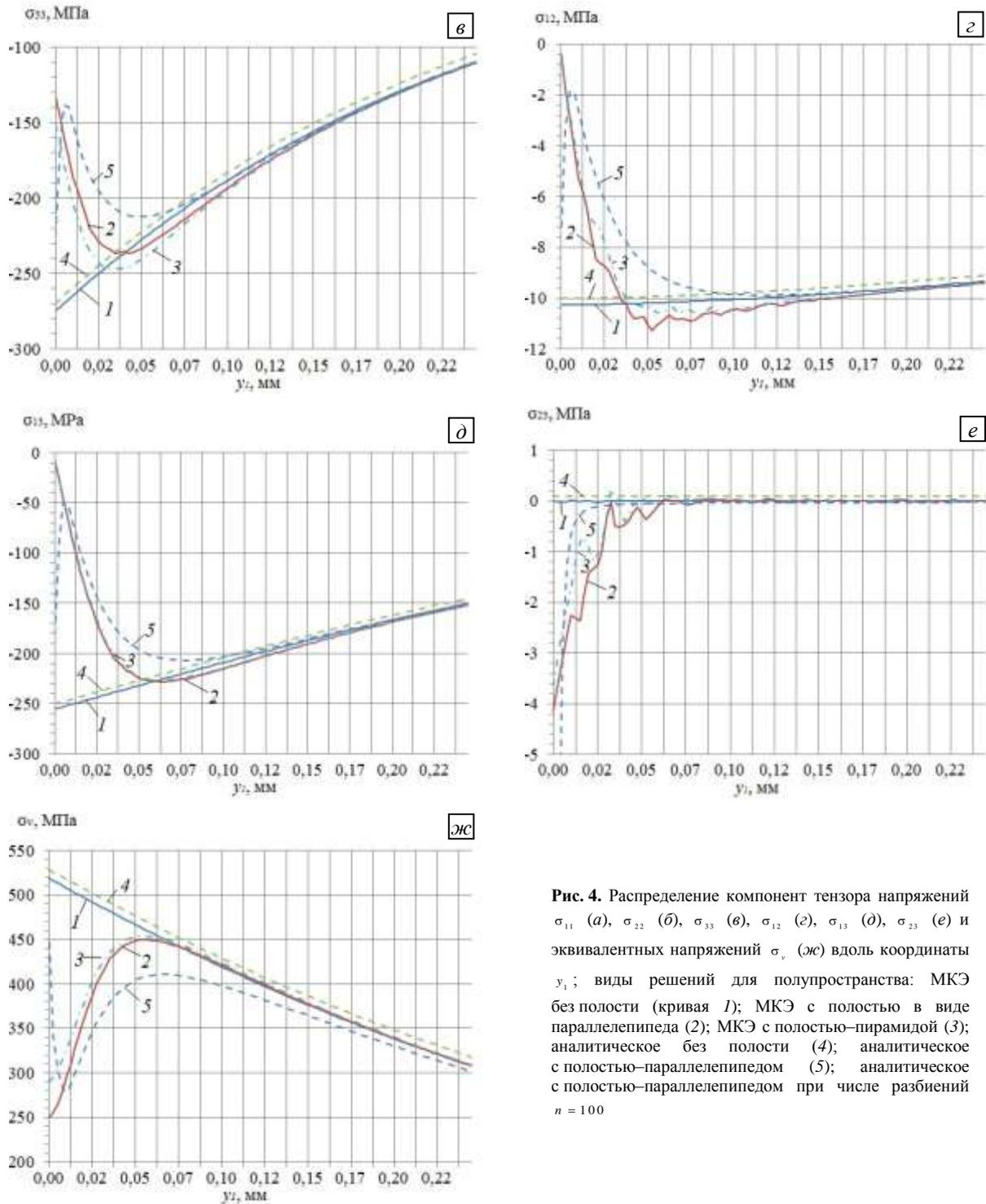


Рис. 4. Распределение компонент тензора напряжений σ_{11} (а), σ_{22} (б), σ_{33} (в), σ_{12} (г), σ_{13} (д), σ_{23} (е) и эквивалентных напряжений σ_v (ж) вдоль координаты y_1 ; виды решений для полупространства: МКЭ без полости (кривая 1); МКЭ с полостью в виде параллелепипеда (2); МКЭ с полостью-пирамидой (3); аналитическое без полости (4); аналитическое с полостью-параллелепипедом (5); аналитическое с полостью-параллелепипедом при числе разбиений $n = 100$

разбиений граней полости или же для их центральных частей использовать точное значение интеграла (5), а для периферических частей вводить эмпирические коэффициенты или же выбрать другой способ учета их воздействия на НДС. На первом графике, на распределении компоненты тензора напряжений σ_{11} , видно, что при разбиении $n = 100$ данное решение заметно лучше соответствует рассчитанному в ANSYS у границы полости.

Для оценки достоверности разработанного метода исследуем концентрацию напряжений в окрестности полости в форме четырехугольной пирамиды, при этом основание пирамиды совпадает с гранью s_2 ранее рассмотренной полости. Пусть высота пирамиды связана с длиной ребра грани s_2 формулой: $h = 0,7(c_2 - c_1)$. Тогда для построения распределения напряжения вдоль оси $O'y_1$ можем не учитывать силы, нагружающие боковые грани пирамиды. Таким образом, аналитическое решение для этого варианта

полости не изменится и будет совпадать с решением для полости в форме прямоугольного параллелепипеда. На представленных графиках (см. Рис. 4) хорошо видно, что распределение напряжений для случая полости в форме пирамиды почти полностью совпадает с таковым для полости–параллелепипеда.

5. Выводы

В настоящей работе выполнено исследование напряженного состояния в окрестности полостей разной формы. Для получения картины концентрации напряжений используется введение дополнительных фиктивных сил на поверхности полости. Величину этих сил определяет поток компонент тензора напряжений через поверхность, ограничивающую объем полости. В произвольной точке в окрестности полости НДС может быть представлено как результат воздействия внешней нагрузки и сил на поверхности полости. Предложенный подход был успешно применен для изучения концентрации напряжений в упругом полупространстве с полостями в форме прямоугольного параллелепипеда и четырехугольной пирамиды. Полупространство нагружалось произвольно ориентированной сосредоточенной силой, приложенной к его свободной поверхности. Построены распределения компонент тензора напряжений в окрестности полостей. Проведено сопоставление результатов вычисления по предложенной расчетной модели с аналитическим и численным (в пакете ANSYS) решениями.

Литература

1. Kirsch G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre // *Z. Ver. Dtsch. Ing.* – 1898. – Vol. 42. – P. 797-807.
2. Sternberg E. Three-dimensional stress concentrations in the theory of elasticity // *Appl. Mech. Rev.* – 1958. – Vol. 11. – P. 1-4.
3. Neuber H., Hahn H.G. Stress concentration in scientific research and engineering // *Appl. Mech. Rev.* – 1966. – Vol. 19. – P. 187-199.
4. Vorovich I., Malkina O. The state of stress in a thick plate // *J Appl Math Mech.* – 1967. – Vol. 31. – P. 252-264.
5. Sternberg E., Sadowsky M.A., Chicago I.L.L. Three-dimensional solution for the stress concentration around a circular hole in a plate of arbitrary thickness // *J. Appl. Mech.* – 1949. – Vol. 16. – P. 27-36.
6. Tandon G.P., Weng G.J. Stress Distribution in and Around Spheroidal Inclusions and Voids at Finite Concentration // *J. Appl. Mech.* – 1986. – Vol. 53, № 3. – P. 511-518. DOI
7. Muskhelishvili N.I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. – Dordrecht: Springer Netherlands, 1977. – 732 p. DOI
8. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. – М.: Мир, 1982. – 303 с.
9. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). – М.: Наука, 1978. – 464 с.
10. Lurie A.I., Belyaev A. Theory of Elasticity. – Springer Berlin Heidelberg. – 2010. – 1050 p. DOI
11. Love A.E.H. Treatise on mathematical theory of elasticity. 4th edition. – Dover Publications, 1944. – 643 p.
12. Edwards R.H. Stress concentrations around spherical inclusions and cavities // *J. Appl. Mech.* – 1951. – Vol. 18. – P. 19-30.
13. Noda N.-A., Ogasawara N., Matsuo T. Asymmetric problem of a row of revolutional ellipsoidal cavities using singular integral equations // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – Vol. 40, № 8. – P. 1923-1941. DOI
14. Noda N.-A., Moriyama Y. Stress concentration of an ellipsoidal inclusion of revolution in a semi-infinite body under biaxial tension // *Arch. Appl. Mech.* – 2004. – Vol. 74, № 1–2. – P. 29-44. DOI
15. Mi C., Kouris D. Stress concentration around a nanovoid near the surface of an elastic half-space // *Int. J. Solids Struct.* – 2013. – Vol. 50, № 18. – P. 2737-2748. DOI
16. Yang Q., Liu J.X., Fang X.Q. Dynamic stress in a semi-infinite solid with a cylindrical nano-inhomogeneity considering nanoscale microstructure // *Acta Mech.* – 2012. – Vol. 223, № 4. – P. 879-888. DOI
17. Yang Z. et al. The concentration of stress and strain in finite thickness elastic plate containing a circular hole // *Int. J. Solids Struct.* – 2008. – Vol. 45, № 3–4. – P. 713-731. DOI
18. Paskaramoorthy R., Bugarin S., Reid R.G. Analysis of stress concentration around a spheroidal cavity under asymmetric dynamic loading // *Int. J. Solids Struct.* – 2011. – Vol. 48, № 14–15. – P. 2255-2263. DOI
19. Boussinesq J. Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans ces solides, des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface. – Paris: Gauthier-Villars, 1885. – 734 p.
20. Cerruti V. Acc. Lincei. Mem. fis. Mat. – Roma, 1882. – 241 p.
21. Landau L.D., Lifshitz E.M. Theory of Elasticity. – Pergamon Press Ltd, 1989. – 188 p.

References

1. Kirsch G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. *Z. Ver. Dtsch. Ing.*, 1898. vol. 42. pp. 797–807.
2. Sternberg E. Three-dimensional stress concentrations in the theory of elasticity. *Appl. Mech. Rev.*, 1958, vol, 11, pp. 1-4.

3. Neuber H., Hahn H.G. Stress concentration in scientific research and engineering. *Appl. Mech. Rev.*, 1966, vol. 19, pp. 187-199.
4. Vorovich I., Malkina O. The state of stress in a thick plate. *J Appl Math Mech.*, 1967, vol. 31, pp. 252-264.
5. Sternberg E., Sadowsky M.A., Chicago I.L.L. Three-dimensional solution for the stress concentration around a circular hole in a plate of arbitrary thickness, *J. Appl. Mech.*, 1949, vol. 16, pp. 27-36.
6. Tandon G.P., Weng G.J. Stress Distribution in and Around Spheroidal Inclusions and Voids at Finite Concentration, *J. Appl. Mech.*, 1986, vol. 53, no. 3, pp. 511-518. DOI
7. Muskhelishvili N.I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1977. 732 p.
8. Parton V.Z., Perlin P.I. Integral'nye uravneniya teorii uprugosti. Moscow, Mir., 1982, 303 p.
9. Aleksandrov A.Y., Solovyev Y.I. Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primenenie metodov teorii funktsij kompleksnogo peremennogo)., Moscow, Nauka (in Russian), 1978, 464 p.
10. Lurie A.I., Belyaev A. *Theory of Elasticity*. Springer Berlin Heidelberg, 2010. 1050 p. DOI
11. Love A.E.H. *Treatise on mathematical theory of elasticity 4th edition*. Dover Publications, 1944. 643 p.
12. Edwards R.H. Stress concentrations around spherical inclusions and cavities. *J. Appl. Mech.*, 1951, vol. 18, pp. 19-30.
13. Noda N.-A., Ogasawara N., Matsuo T. Asymmetric problem of a row of revolutional ellipsoidal cavities using singular integral equations. *Int. J. Solids Struct.*, 2003, vol. 40, № 8, pp. 1923-1941. DOI
14. Noda N.-A., Moriyama Y. Stress concentration of an ellipsoidal inclusion of revolution in a semi-infinite body under biaxial tension. *Arch. Appl. Mech.*, 2004, vol. 74, № 1-2, pp. 29-44. DOI
15. Mi C., Kouris D. Stress concentration around a nanovoid near the surface of an elastic half-space. *Int. J. Solids Struct.*, 2013, vol. 50, no. 18, pp. 2737-2748. DOI
16. Yang Q., Liu J.X., Fang X.Q. Dynamic stress in a semi-infinite solid with a cylindrical nano-inhomogeneity considering nanoscale microstructure. *Acta Mech.*, 2012, vol. 223, no. 4, pp. 879-888. DOI
17. Yang Z. et al. The concentration of stress and strain in finite thickness elastic plate containing a circular hole. *Int. J. Solids Struct.*, 2008, vol. 45, no. 3-4, pp. 713-731. DOI
18. Paskaramoorthy R., Bugarin S., Reid R.G. Analysis of stress concentration around a spheroidal cavity under asymmetric dynamic loading. *Int. J. Solids Struct.*, 2011, vol. 48, no. 14-15, pp. 2255-2263. DOI
19. Boussinesq J. *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans ces solides, des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface* [Application of the potentials to the study of the equilibrium and the movement of the elastic solids, mainly to the computation of the deformations and the pressures that produce in these solids any efforts exerted on a small part of their surface]. Paris: Gauthier-Villars, 1885. 734 p.
20. Cerruti V. *Acc. Lincei, Mem. fis. Mat.* Roma, 1882. 241 p.
21. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Theory of Elasticity*. Pergamon Press Ltd, 1986. 188 p.

Поступила в редакцию 01.02.2018; опубликована в электронном виде 05.07.2018

Сведения об авторе

Калентьев Евгений Александрович, ктн, снс., Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук (УдмФИЦ УрО РАН), 426067, Ижевск, ул. им. Татьяны Барамзиной, д.34; e-mail: EugeneKalentev@gmail.com