

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.1.7](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.1.7)

УДК 539.42

ЧИСЛЕННЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РОСТА И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТРЕЩИН

Е.А. Каспарова, П.С. Шушпанников

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Российская Федерация

Изучение процессов зарождения и эволюции трещин и систем трещин в упругих средах представляет теоретический и практический интерес в различных областях научного знания. Это связано с тем, что наличие подобного рода структур влияет не только на прочностные характеристики объектов из них, но и на многие другие свойства. При этом аналитические модели роста и взаимодействия трещин, как правило, весьма громоздки и имеют ограниченную область приложения. В работе предложен численный итерационный метод и выполнено исследование квазистатического роста трещин в линейно-упругих плоских телах. Моделирование осуществлялось методом конечных элементов с перестройкой сетки на каждой итерации созданной вычислительной процедуры. Для корректного описания особенности напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины использовались сингулярные конечные элементы. Направление роста трещины на каждой итерации определялось согласно критерию максимальных окружных напряжений. На основе разработанного численного подхода рассмотрена задача распространения трещины в окрестности двух близко расположенных круговых пор и подробно исследованы траектории продвижения двух взаимодействующих параллельных трещин одинаковой длины в пластине в условиях растяжения. Для последнего случая представлено также аналитическое решение, которое строилось на основе теории потенциалов Колосова–Мусхелишвили. Получены формулы для коэффициентов разложения Вильямса для полей напряжений вблизи вершины одной из трещин, необходимые для установления их траекторий. В рамках границ применимости аналитической модели наблюдается хорошее совпадение результатов аналитического и численного решений.

Ключевые слова: метод конечных элементов, квазистатический рост трещин, разложение Вильямса, уравнение траектории трещины

NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODS FOR SIMULATION OF GROWTH AND INTERACTION OF CRACKS

E.A. Kasparova and P.S. Shushpannikov

Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

The problem of predicting the trajectories of cracks or a system of interacting cracks in elastic bodies is of theoretical and practical interest in multiply fields, as the presence of such structures affects not only the strength characteristics, but also many other properties of the material under consideration. However, the calculating of the growth paths of cracks is a complex challenge analytically because every increment of crack growth modifies the stress field globally and changes the stress intensity factors at all other cracks. A numerical iterative method is presented and used for the simulation of quasi-static crack growth in linear elastic plane bodies. The modeling of crack growth is performed using a finite element method in conjunction with a remeshing algorithm carried out on each iteration. To describe properly the stress-strain state in the vicinity of the crack tip, the singular elements are used. The crack growth and its direction are determined by the maximum hoop stress criterion. Using the developed numerical method, some basic problems are considered, namely, the problem on growth of a crack in the vicinity of two closely spaced pores, and also a detailed research of the trajectories of two interacting collinear cracks of equal length in a plate subjected to tension load. An analytical solution of the latter problem is also considered. Using the Kolosov-Muskhelishvili potentials approach, the coefficients of the Williams expansion are obtained which are necessary for cracks trajectories calculation. Within the region of the analytical model applicability, the numerical and analytical results are in good agreement.

Key words: finite element method, quasi-static crack growth, Williams set, crack trajectory equation

1. Введение

Известно, что процесс разрушения кусочно-однородных материалов (сред) сопровождается образованием и эволюцией в них сложных структурных дефектов (структур разрушения, см. [1]), а сценарий, по которому процесс происходит, во многом определяет эффективную прочность материала. Вследствие этого разработка подходов к моделированию эволюции трещин в кусочно-однородных материалах и их реализация имеют большую практическую значимость.

Для моделирования используются как аналитические зависимости [2–7], так и численные процедуры [8–11]. При аналитическом описании возникают трудности, обусловленные, в частности, сложным характером взаимодействия трещин, образующихся в материалах, изменением напряженно-деформированного состояния (НДС) материалов, а значит, и коэффициентов интенсивности напряжений на каждом этапе эволюции их структуры. Даже в тех случаях, когда аналитическое представление процесса разрушения возможно, расчеты весьма громоздки, а их результаты зачастую имеют ограниченную область применимости.

В настоящей работе для ряда практически важных ситуаций выполнено моделирование процессов квазистатического роста трещин. При этом использовался подход, основанный на методе конечных

элементов с перестройкой сетки на каждой итерации численной процедуры [12]. Он, наряду с расширенным методом конечных элементов [9, 10], не требующим перестройки сетки, является одним из наиболее распространенных при моделировании эволюции структур разрушения и может быть использован для решения широкого класса задач, характеризующихся произвольной геометрией тела и трещин.

Далее в качестве иллюстрации рассматривается задача распространения трещины в окрестности двух близко расположенных круговых пор, а также подробно исследуются траектории двух параллельных трещин одинаковой длины в пластине при растяжении. В последнем случае представлено и аналитическое решение задачи. На основе методов, предложенных в [4, 13], получены формулы для коэффициентов разложения Вильямса [14] для полей напряжений вблизи вершин трещин, которые необходимы для вычисления траекторий роста трещин.

Выполнено сравнение результатов аналитических расчетов и численного моделирования. Установлен диапазон параметров, при которых указанные траектории совпадают.

2. Постановка задачи

Рассмотрим изотропное линейно-упругое тело, занимающее ограниченную область Ω в двумерном пространстве. На внешней границе тела $\partial\Omega$ заданы произвольные корректные граничные условия (Рис. 1).

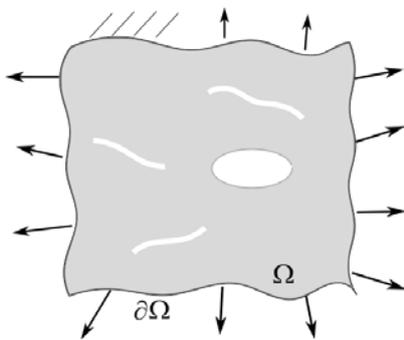


Рис. 1. Схема к постановке задачи

Для определенности предположим, что возникающее в теле НДС является плоским. Будем считать, что в общем случае тело содержит конечное число криволинейных трещин, берега которых не нагружены. Тело с трещинами может быть кусочно-однородным, а также содержащим поры. Далее, не ограничивая общности используемого метода решения, рассмотрим только однородные упругие тела, модуль Юнга и коэффициент Пуассона которых обозначим как E и ν соответственно. Также предположим, что известна трещиностойкость тела K_{Ic} .

При заданном критерии роста трещин и условии квазистатического нагружения требуется определить изменение как начальной конфигурации трещин, так и связанное с этим изменение НДС в изучаемом теле.

3. Численный метод решения

Выражения для напряжений вблизи вершины трещины могут быть записаны в виде разложения Вильямса [14]:

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n}{2} f_{ij}(n, \theta) r^{\frac{n-1}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{m}{2} g_{ij}(m, \theta) r^{\frac{m-1}{2}}, \quad i, j \in \{x, y\}. \quad (1)$$

Здесь: (r, θ) — полярная система координат с началом в рассматриваемой вершине; $f_{ij}(n, \theta)$, $g_{ij}(m, \theta)$ — известные функции; A_n , B_m — коэффициенты разложения. Первые члены разложения (1) описывают асимптотическое поведение решения вблизи вершины трещины (при $r \rightarrow 0$) и играют важную роль в механике разрушения. Коэффициенты при них принято нормировать следующим образом:

$$A_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}, \quad B_1 = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (2)$$

где K_I , K_{II} — коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).

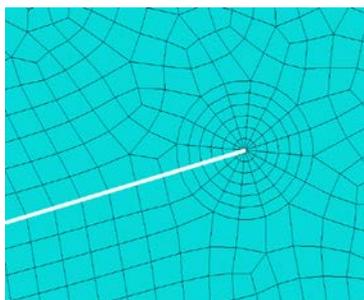


Рис. 2. Конечно-элементная сетка вблизи вершины трещины

Численная процедура, позволяющая моделировать изменения как конфигурации трещин, так и НДС в теле, состоит в следующем:

1. Методом конечных элементов вычисляется НДС в теле с заданной конфигурацией трещин. Особенность напряженно-деформированного состояния в вершине трещины (1) описывается с помощью сингулярных конечных элементов [15], на которые разбивается окрестность вершины (Рис. 2). Сингулярные элементы представляют собой треугольные квадратичные элементы, у которых узлы на сторонах, примыкающих к вершине трещины, смещены от середины сторон на четверть их длин по направлению к вершине трещины.

2. Рассчитываются величины коэффициентов K_I и K_{II} для всех трещин. Заметим, что основные методы нахождения КИН, как правило, предполагают или вычисление характеристик, связанных со скоростью высвобождения энергии при продвижении трещины, или применение экстраполяции упругих полей вблизи вершины трещины (см, к примеру, [11]). Используемый в настоящей работе метод относится к первой группе. Он предложен в [16] и основывается на вычислении так называемого J -интеграла от суперпозиции реального и вспомогательного упругих полей. При этом выбор вспомогательных полей I-й или II-й мод позволяет рассчитать, соответственно, K_I и K_{II} , входящие в выражение для J -интеграла.

3. С учетом полученных значений K_I и K_{II} и в соответствии с существующими критериями [17] устанавливается направление возможного роста трещины. В настоящей работе в качестве критерия выбран критерий максимальных окружных напряжений [18]. При этом предполагается, что трещина распространяется как трещина нормального отрыва.

Направление роста трещины θ_0 определяется следующими выражениями:

$$\left. \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} < 0. \quad (3)$$

Окончательная формула для угла θ_0 , вытекающая из (1)–(3), имеет вид:

$$\theta_0 = 2 \arctan \left[\frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} - \operatorname{sgn}(K_{II}) \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right]. \quad (4)$$

4. Осуществляется проверка выполнения условия страгивания трещины в направлении θ_0 . Согласно выбранному критерию оно следующее [17]:

$$K_{Ic} \leq \left[K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right] \cos \frac{\theta_0}{2}. \quad (5)$$

При этом трещина получает малое приращение длины Δl в направлении θ_0 . Если (5) не выполняется ни для одной из трещин, происходит догружение пластины при сохранении неизменной конфигурации трещин, и процедура повторяется, начиная с пункта 1.

Для верификации описанного подхода приведем пример моделирования роста двух прямолинейных трещин в прямоугольной пластине с размерами $b = 40$ мм и $w = 20$ мм при ее одноосном растяжении (Рис. 3а). В начальной конфигурации трещины имеют одинаковую длину $l_0 = 0,1$ мм и выходят на контур кругового отверстия радиусом $R = 2,5$ мм. Здесь и далее в расчетах полагаем, что упругие модули и трещиностойкость материала пластины равны $E = 297,2$ ГПа, $\nu = 0,23$, $K_{Ic} = 799,2$ МПа·мм^{1/2}, нагрузка составляет $\sigma = 200$ МПа, а размер стороны сингулярного элемента $r_1 = 2\Delta l/15$.

Расчеты выполнялись в конечно-элементном комплексе Abaqus, причем для реализации представленной численной процедуры были написаны специальные программы на языке Python. Моделирование напряженно-деформированного состояния в пластине осуществлялось при помощи

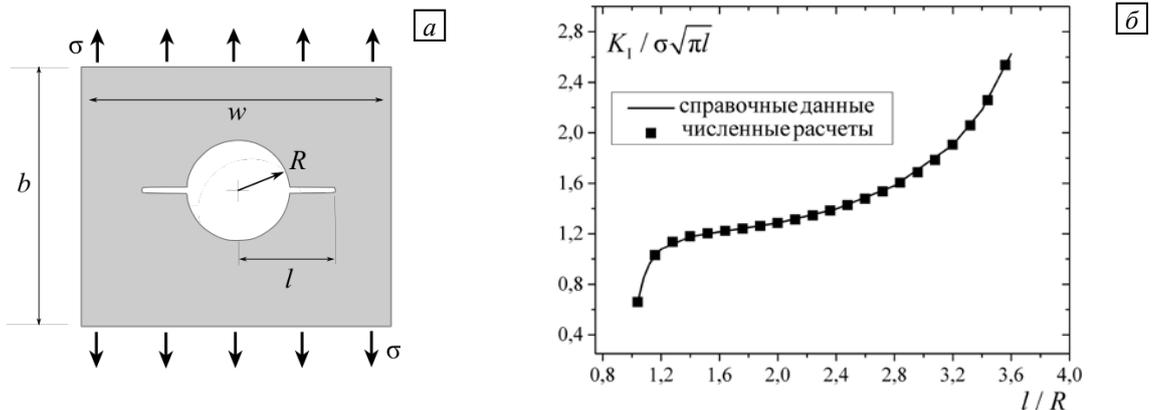


Рис. 3. Геометрия пластины с трещинами (а); зависимость КИН от длины трещины (б)

8-узловых четырехугольных элементов «CPS8R». Типичная конечно-элементная сетка содержала около 85 тысяч элементов и перестраивалась на каждой итерации.

Величина приращения длины трещины Δl , в связи с необходимостью ее уменьшения в случае роста трещин в областях с высокой концентрацией напряжений, указывалась отдельно для каждой из рассматриваемых задач. Во всех случаях величина Δl задавалась соизмеримой с размером конечного элемента, в данном случае $\Delta l = 0,1$ мм, так что на 65-й итерации длина каждой трещины составляла 6,5 мм. По мере роста трещин в направлении, перпендикулярном оси нагружения, выполнялся расчет K_I . Полученные значения K_I сравнивались с имеющимися справочными данными [19]. Результаты, представленные на рисунке 3б, демонстрируют соответствие численных (маркеры) и справочных данных (сплошная кривая).

3.1. Задача роста трещины в окрестности пор

Рассмотрим пример, в котором трещина растет в пространстве между двумя круговыми порами одинакового радиуса в квадратной пластине в условиях одноосного растяжения (Рис. 4а). Выберем размер пластины $b = 49$ мм, радиусы пор $R = 0,5$ мм, расстояние между их центрами $d = 1,6$ мм. В исходной конфигурации прямолинейная трещина длиной $l_0 = 0,1$ мм выходит на границу одного из отверстий. Величину приращения возьмем $\Delta l = 0,1R$.

На рисунке 4б, в представлены полученные траектории трещин, а на рисунке 4з, д — графики изменения КИН K_I , K_{II} (МПа·мм^{1/2}) в зависимости от длины трещины l для различных значений угла α между линией, соединяющей центры пор, и горизонтальной осью. Как видно из рисунка 4б, в, при значениях угла α выше некоторой пороговой величины трещина растет без выхода на границу второй поры (Рис. 4в). При этом отклонение трещины от прямолинейной траектории в обоих случаях обусловлено упругим взаимодействием пор. Показанные сценарии роста трещины в окрестности круговых пор согласуются с экспериментальными и численными данными, известными из литературы [5, 7, 10, 11]. Графики на рисунке 4з, д, демонстрируют, что в процессе роста трещины значение K_{II} близко к нулю, что соответствует выбранному критерию роста трещины (4). Заметные отклонения K_{II} от нуля наблюдаются в областях, характеризующихся большими градиентами полей напряжений.

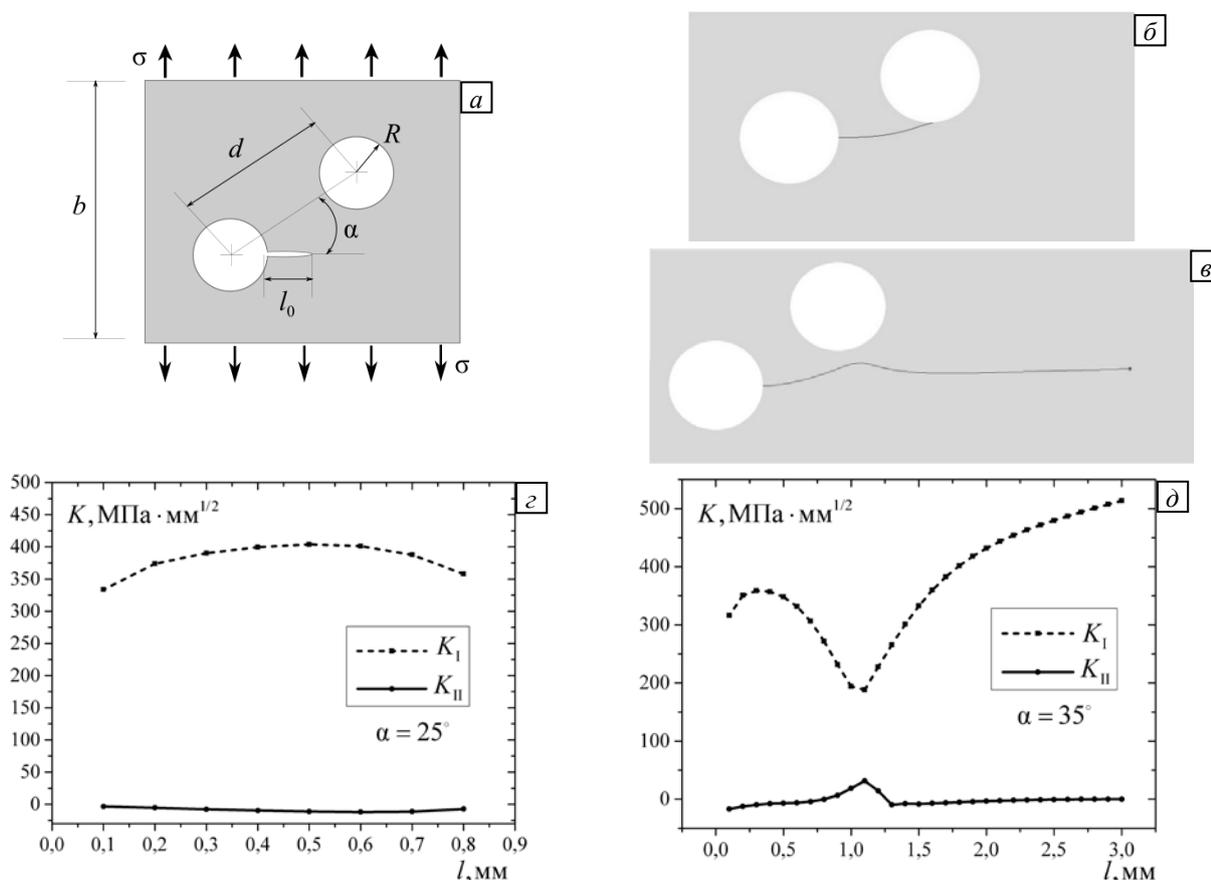


Рис. 4. Пластина с двумя круговыми порами при одноосном растяжении (а), траектории роста трещин в пространстве между порами (б, в) и соответствующие зависимости КИН от длины трещин (з, д)

3.2. Задача встречного роста двух трещин

Рассмотрим пример, в котором две изначально прямолинейных параллельных трещины растут навстречу друг другу (Рис. 5а). Обозначим через σ_1 и σ_2 однородную горизонтальную и вертикальную нагрузки, действующие на пластину. Выберем размер пластины $b = 56$ мм. В исходной конфигурации трещины имеют одинаковую длину $2a = 1$ мм. Величину приращения возьмем $\Delta l = 0,06$ мм. Для описания взаимного расположения трещин используем следующие параметры: расстояние между ближайшими вершинами трещин по горизонтали — S , и вертикали — H , расстояние между центрами трещин — $d = \sqrt{S^2 + (H + 2a)^2}$.

На рисунке 5б представлены траектории роста, полученные при различных значениях параметра S и фиксированном расстоянии между центрами трещин $d = 2,56$ мм (что соответствует $S = 1,6$ мм и $H = 1$ мм) для случая одноосного растяжения пластины. Из рисунка видно, что при малых расстояниях между линиями ($S = 0,2; 0,5; 0,6$ мм) трещины на начальных этапах роста отклоняются друг от друга, а при больших расстояниях ($S = 0,8; 1,2; 1,6$ мм) трещины растут по направлению друг к другу.

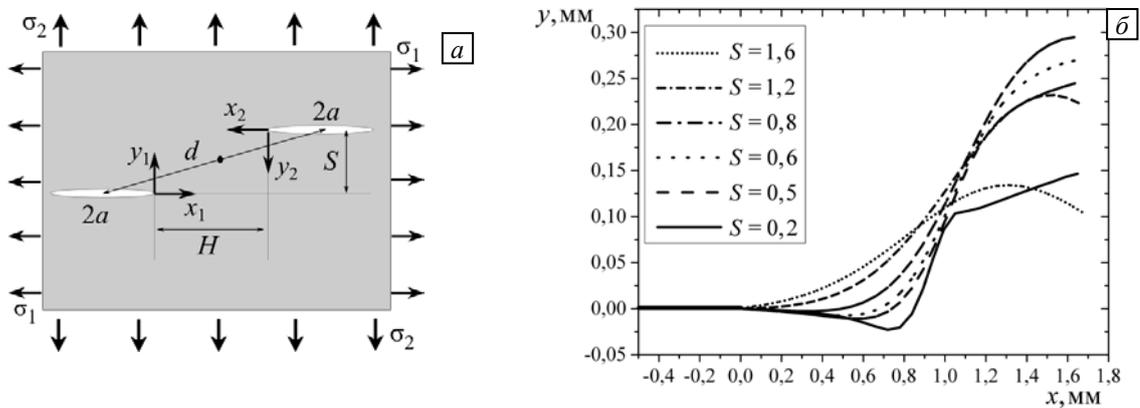


Рис. 5. Схема к постановке задачи (а) и траектории трещин (б) при их различном первоначальном взаимном расположении

Представляют интерес результаты для случая двухосного растяжения пластины с трещинами. На рисунке 6 показаны траектории трещин, соответствующие различным значениям параметра $\eta = \sigma_1 / \sigma_2$, характеризующего двухосность НДС, при фиксированном взаимном расположении трещин: $S = 1,6$ мм; $H = 1$ мм. Как можно видеть, по мере увеличения параметра η отклонение трещины от прямолинейной траектории становится все более выраженным. При этом для значений $\eta = 0,9; 1,0$ траектории трещин пересекаются, в результате в пространстве между ними формируется выколотый фрагмент материала.

При слабом взаимодействии трещин можно получить в аналитическом виде уравнение траекторий трещин в случае их роста навстречу друг другу в нагруженной на бесконечности пластине [6]. Это позволит сравнить аналитические результаты с рассчитанными методом конечных элементов для пластины достаточно больших размеров.

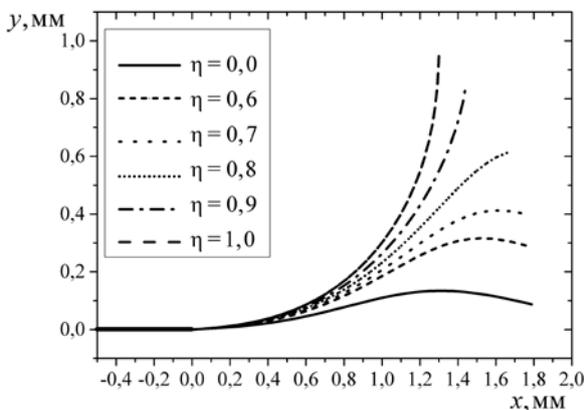


Рис. 6. Траектории трещин, полученные при различных значениях параметра $\eta = \sigma_1/\sigma_2$

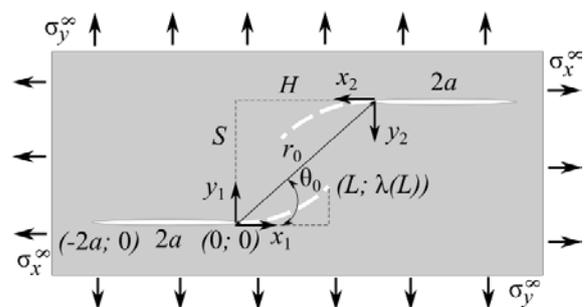


Рис. 7. Две изначально параллельных трещины равной длины $2a$, растущие по кривой $\lambda(x)$ вследствие приложенных на бесконечности растягивающих напряжений σ_x^∞ и σ_y^∞

Согласно [3, 6] уравнение траектории j -й трещины ($j = 1, 2$) имеет вид:

$$\lambda(x_j) = \alpha x_j + \beta x_j^{3/2} + \gamma x_j^2 + O(x_j^{5/2}), \quad \lambda(L)/L \ll 1, \quad (6)$$

где (x_j, y_j) — локальные координаты в системе с центром в вершине j -й трещины ($j = 1, 2$), L — длина подросшей части трещины (см. Рис. 7), α, β, γ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Отклонение каждой из трещин от прямолинейной траектории предполагается малым, о чем свидетельствует второе из соотношений (6).

Выражения для коэффициентов α, β, γ уравнения траектории трещин, полученные на основе предложенного в работе [6] метода, выглядят так:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{2k_{II}}{k_I}, \\ \beta &= -\frac{16\sqrt{2\pi}k_{II}T - 8\pi \left(k_{II}P_{0/2}\sqrt{2\pi} - k_I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n/2)!Q_{n/2}}{\sqrt{2}(n/2+1/2)!} \right)}{3(\pi k_I^2 + (3\pi + 8/3)k_{II}^2)}, \\ \gamma &= \frac{8}{8k_I - 9\alpha k_{II}} \left(\frac{15\beta^2 k_{II}}{4\pi} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \beta T + \frac{\alpha b_I}{4} - \frac{b_{II}}{2} - \frac{3\beta}{\sqrt{2\pi}} P_{0/2} - \beta \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} P_{n/2} \left[\frac{n(n/2+1/2)!}{2(n/2+1/2)!} - \frac{(n/2-1/4)(n/2)!}{(n/2)!} \right] \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь: $P_{n/2}, Q_{n/2}$ — неизвестные коэффициенты, которые являются решением системы нелинейных уравнений, описывающих взаимодействие двух криволинейных трещин в процессе их роста вдоль траектории $\lambda(x)$ (**Приложение 1**); k_I, k_{II} — коэффициенты интенсивности напряжений около ближайших вершин двух соответствующих прямолинейных параллельных трещин; b_I, b_{II}, T — последующие члены разложения Вильямса (1) для полей напряжений вблизи вершин трещин вдоль оси x_j (см. [3]):

$$\sigma_{xx}(x_j, 0) = \frac{k_I}{\sqrt{2\pi x_j}} + T + b_I \sqrt{\frac{x_j}{2\pi}}, \quad \sigma_{yy}(x_j, 0) = \frac{k_I}{\sqrt{2\pi x_j}} + b_I \sqrt{\frac{x_j}{2\pi}}, \quad \sigma_{xy}(x_j, 0) = \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi x_j}} + b_{II} \sqrt{\frac{x_j}{2\pi}}. \quad (8)$$

Формулы (7) уточняют аналогичные аналитические формулы из [6]. Выражения для коэффициентов k_I, k_{II}, T имеют вид [2, 4]:

$$\begin{aligned} k_I &= \sqrt{\pi a} \left[(\sigma_y^\infty + P_0) + \sum_{m=1}^{\infty} (P_{2m} + P_{2m-1}) \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \right], \\ k_{II} &= \sqrt{\pi a} \left[Q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (Q_{2m} + Q_{2m-1}) \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \right], \\ T &= \sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty, \end{aligned} \quad (9)$$

где P, Q — коэффициенты, которые являются решением системы линейных уравнений, описывающих взаимодействие прямолинейных трещин. Выражения для b_I, b_{II} получены в настоящей работе с помощью метода, предложенного в [4] (**Приложение 2**), в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} b_I &= \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{a}} \left[3(\sigma_y^\infty + P_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} ((16m+3)P_{2m} + (16m-1)P_{2m-1}) \right], \\ b_{II} &= \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{a}} \left[3Q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} ((16m+3)Q_{2m} + (16m-1)Q_{2m-1}) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

На рисунке 8б представлены траектории роста изначально параллельных трещин, рассчитанные методом конечных элементов (сплошная кривая) и аналитически по формулам (6), (7) с учетом (9), (10) (пунктирная кривая). Кривые соответствуют случаю одноосного растяжения пластины с двумя

трещинами, имевшими первоначальную длину $2a = 1$ мм (каждая), параметры, определяющие конфигурацию трещин, были следующими: $S = 1,6$ мм, $H = 1$ мм (Рис. 8а). Для осуществления численных расчетов использовалась пластина размером $b = 56$ мм, приращение длины трещины на каждой итерации составило $\Delta l = 0,06$ мм. При выполнении аналитических расчетов в формулах (7) под знаком суммирования удерживался 31 коэффициент, таким образом, для вычисления уравнения траектории решалась система из 62 нелинейных уравнений относительно неизвестных $P_{n/2}, Q_{n/2}$, выражающих взаимодействие криволинейных трещин, и трех уравнений относительно α, β, γ (Приложение 1). Система решалась методом Ньютона, причем в качестве начального приближения были выбраны нулевые значения неизвестных. Кроме того, предварительно рассчитывались коэффициенты разложения Вильямса (9), (10).

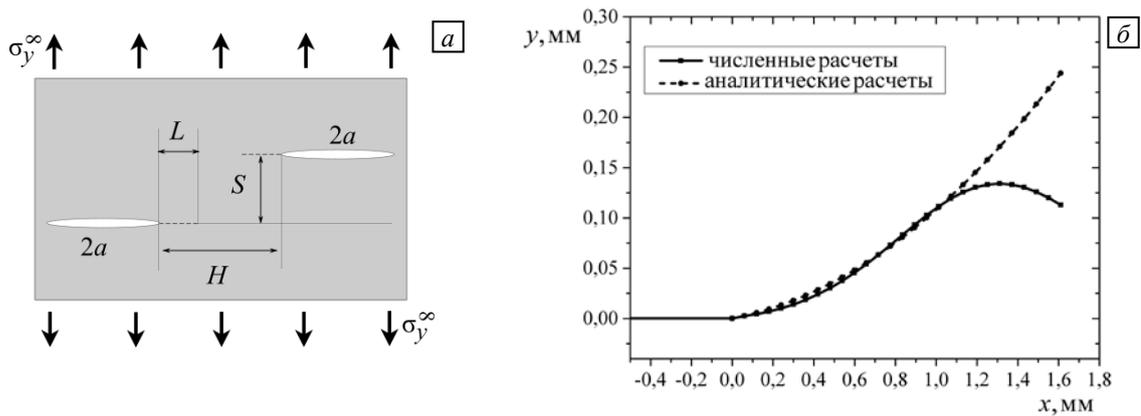


Рис. 8. Схема к постановке задачи слабого взаимодействия двух трещин (а) и траектории одной из них (б), полученные численным и аналитическим путем

Представленные на рисунке 8 результаты показывают, что на небольших расстояниях от вершины трещины (Рис. 8б) наблюдается совпадение траекторий, полученных численным и аналитическим путем, далее результаты расходятся, что объясняется выходом за пределы применимости аналитической теории, то есть влиянием прямолинейных участков трещин на вид траекторий, что не учитывается в аналитической модели (Приложение 1).

4. Заключение

В настоящей работе развит численный подход к моделированию образования и развития структур разрушения в плоских кусочно-однородных линейно-упругих телах, основанный на использовании метода конечных элементов и на перестройке дискретизирующей расчетную область сетки по мере развития разрушения. Описанный выше способ численного моделирования роста трещин можно применять для решения широкого класса задач плоской механики разрушения с произвольной геометрией трещин.

В качестве примера для приложения разработанного конечно-элементного подхода рассмотрена задача роста трещины в пространстве между двумя близко расположенными круговыми порами в плоской пластине при ее растяжении. Полученные численно траектории трещин при различном взаимном расположении круговых отверстий оказались хорошо согласующимися с известными из литературы экспериментальными данными и результатами численных расчетов других авторов [5, 7, 10, 11].

Рассматриваемый численный подход использован также для моделирования роста двух взаимодействующих параллельных трещин конечной длины в пластине при ее растяжении. Результаты численных расчетов сравнивались с аналитическим решением соответствующей задачи. Для того чтобы получить уравнение траектории одной из двух параллельных трещин в аналитическом виде, потребовалось знание не только коэффициентов интенсивности напряжений, но и вид последующих членов разложения Вильямса для полей напряжений вблизи вершин трещин для этой задачи. Формулы для них получены в настоящей работе на основе метода, предложенного в [4].

В рамках границ применимости аналитической модели (не учитывается влияние прямолинейных частей двух трещин на траекторию их роста и взаимодействия; отклонение трещины от прямолинейной траектории считается малым, что предполагает, что трещины расположены не близко по отношению друг к другу) наблюдается хорошее совпадение численных результатов с аналитическими.

Авторы выражают благодарность К.Б. Устинову за советы и ценные замечания при работе над статьей.

Литература

1. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Структуры разрушения (Условия формирования. Эшелоны трещин). – ИИМех РАН, 1978. – Препринт №110. – 59 с.
2. Cotterell B., Rice J.R. Slightly curved or kinked cracks // *Int. J. Fract.* – 1980. – Vol. 16, no. 2. – P. 155-169. [DOI](#)
3. Sumi Y., Nemat-Nasser S., Keer L.M. On crack branching and curving in a finite body // *Int. J. Fract.* – 1983. – Vol. 21, no. 1. – P. 67-79. [DOI](#)
4. Horii H., Nemat-Nasser S. Elastic fields of interacting inhomogeneities // *Int. J. Solids Structures.* – 1985. – Vol. 21, no. 7. – P. 731-745. [DOI](#)
5. Valentini M., Serkov S.K., Bigoni D., Movchan A.B. Crack propagation in a brittle elastic material with defects // *J. Appl. Mech.* – 1999. – Vol. 66, no. 1. – P. 79-86. [DOI](#)
6. Ghelichi R., Kamrin K. Modeling growth paths of interacting crack pairs in elastic media // *Soft Matter.* – 2015. – Vol. 11. – P. 7995-8012. [DOI](#)
7. Misseroni D., Movchan A.B., Movchan N.V., Bigoni D. Experimental and analytical insights on fracture trajectories in brittle materials with voids // *Int. J. Solids Struct.* – 2015. – Vol. 63. – P. 219-225. [DOI](#)
8. Кургузов В.Д., Демешкин А.Г. Зарождение трещин на поверхности концентраторов напряжений в виде круговых отверстий при сжатии образцов из квазихрупкого материала // *Известия вузов. Строительство.* – 2015. – № 9. – С. 91-98.
9. Moes N., Dolbow J., Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing // *Int. J. Num. Meth. Eng.* – 1999. – Vol. 46, no.1. – P. 131-150. [DOI](#)
10. Haboussa D., Gregoire D., Elguedj T., Maigre H., A. Combescure A. X-FEM analysis of the effects of holes or other cracks on dynamic crack propagation // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 2011. – Vol. 86. – P. 618-636. [DOI](#)
11. Boulenouar A., Benseddiq N., Mazari M. Strain energy density prediction of crack propagation for 2D linear elastic materials // *Theor. Appl. Fract. Mec.* – 2013. – Vol. 67-68. – P. 29-37. [DOI](#)
12. Kuna M. *Finite elements in fracture mechanics.* Vol. 201. – Springer, Dordrecht, 2013. – 447 pp. [DOI](#)
13. Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // *Int. J. Solids Struct.* – 2012. – Vol. 49. – P. 556-566. [DOI](#)
14. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // *J. Appl. Mech. (ASME).* – 1957. – Vol. 24. – P. 109-114.
15. Barsoum R.S. On the use of isoparametric finite element in linear fracture mechanics // *J. Numer. Meth. Eng.* – 1976. – Vol. 10, no.1. – P. 25-37. [DOI](#)
16. Yau J.F., Wang S.S., Corten H.T. A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity // *J. Appl. Mech.* – 1980. – Vol.47, no.2. – P. 335-341. [DOI](#)
17. Petrovic J.J. Mixed-mode fracture of ceramics. Bradt R.C., Evans A.G., Hasselman D.P.H., Lange F.F. (eds) *Fracture Mechanics of Ceramics.* – Springer, Boston, MA. – 1986. – Vol.8. – P. 127-135. [DOI](#)
18. Erdogan F., Sih G.C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // *J. Basic Eng. T-ASME.* – 1963. – Vol. 85, no. 4. – P. 519-527.
19. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. – М.: Мир, 1990. – Т. 1 – 1016 с.
20. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
21. Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1962. – 250 с.

References

1. Goldstein R.V., Osipenko N.M. Structure razrusheniya (Usloviya formirovaniya. Eshelony treshin) [The structures of fracture (Prerequisites for formation. Echelons of cracks)]. – *IPMech RAS*, 1978. – Preprint №110 – 59 p.
2. Cotterell B., Rice J.R. Slightly curved or kinked cracks. *Int. J. Fract.*, 1980, vol. 16, no. 2, pp 155-169. [DOI](#)
3. Sumi Y., Nemat-Nasser S., Keer L.M. On crack branching and curving in a finite body. *Int. J. Fract.*, 1983. vol. 21 no. 1. P. 67-79. [DOI](#)
4. Horii H., Nemat-Nasser S. Elastic fields of interacting inhomogeneities. *Int. J. Solids Structures*, 1985, vol. 21, no.7, pp. 731-745. [DOI](#)
5. Valentini M., Serkov S.K., Bigoni D., Movchan A.B. Crack propagation in a brittle elastic material with defects. *J. Appl. Mech.*, 1999, vol. 66, no.1, pp. 79-86. [DOI](#)
6. Ghelichi R., Kamrin K. Modeling growth paths of interacting crack pairs in elastic media. *Soft Matter*, 2015, vol. 11, pp. 7995-8012. [DOI](#)
7. Misseroni D., Movchan A.B., Movchan N.V., Bigoni D. Experimental and analytical insights on fracture trajectories in brittle materials with voids. *Int. J. Solids Struct.*, 2015, vol. 63, pp. 219-225. [DOI](#)
8. Kurguzov V.D., Demeshkin A.G. Cracks initiation on a surface of stress concentrators in the form of circular openings at compression of samples from quasi-brittle material. *Izvestia vuzov. Stroitel'stvo*, 2015, no. 9, pp. 91-98.
9. Moes N., Dolbow J., Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1999, vol. 46, no.1, pp. 131-150. [DOI](#)
10. Haboussa D., Gregoire D., Elguedj T., Maigre H., A. Combescure A. X-FEM analysis of the effects of holes or other cracks on dynamic crack propagation. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2011, vol. 86, pp. 618-636. [DOI](#)
11. Boulenouar A., Benseddiq N., Mazari M. Strain energy density prediction of crack propagation for 2D linear elastic materials. *Theor. Appl. Fract. Mec.*, 2013, vol. 67-68, pp. 29-37. [DOI](#)
12. Kuna M. *Finite elements in fracture mechanics.* Vol. 201. Springer, Dordrecht, 2013, 447 pp. [DOI](#)
13. Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *Int. J. Solids Struct.*, 2012, vol. 49, pp. 556-566. [DOI](#)
14. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech. (ASME)*, 1957, vol. 24, pp. 109-114.
15. Barsoum R.S. On the use of isoparametric finite element in linear fracture mechanics. *J. Numer. Meth. Eng.*, 1976, vol. 10, no. 1, pp 25-37. [DOI](#)

16. Yau J.F., Wang S.S., Corten H.T. A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *J. Appl. Mech.*, 1980, vol. 47, no. 2, pp. 335-341. DOI
17. Petrovic J.J. *Mixed-mode fracture of ceramics*. Bradt R.C., Evans A.G., Hasselman D.P.H., Lange F.F. (eds) Fracture Mechanics of Ceramics. Springer, Boston, MA, 1986, vol. 8, pp. 127-135. DOI
18. Erdogan F., Sih G.C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J. Basic Eng. T-ASME*, 1963, vol. 85, no. 4, pp. 519-527.
19. Murakami Y. *Stress intensity factors handbook*. Oxford [Oxfordshire]; New York: Pergamon Pr. 1987, vol. 1, 1464 pp.
20. Muskhelishvili N.I. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Noordhoff, 1952, 732 pp.
21. Kuznetsov D.S. *Special'nye funktsii* [Special functions]. – Moscow.: Vysshaya shkola, 1962, 250 c.

Приложение 1. Аналитический подход к вычислению уравнения траектории трещины

Рассмотрим аналитический метод вычисления коэффициентов α, β, γ уравнения траекторий роста (6) двух изначально параллельных трещин равной длины в плоской изотропной пластине, нагруженной на бесконечности (Рис. 7). Отклонение каждой из трещин от прямолинейной траектории предполагается малым, так что в первом приближении выполняются соотношения $\theta_j(x_j) = \lambda'(x_j)$, $j = 1, 2$, где θ_j — угол между касательной к траектории j -й трещины и осью x_j , штрих здесь и далее означает производную функции по координате.

Поле напряжений в окрестности двух трещин, подросших вдоль неизвестной траектории $\lambda(x)$ в плоской нагруженной на бесконечности пластине, можно получить на основании принципа суперпозиции полей напряжений из трех более простых задач [6] (Рис. 9): А — задачи для соответствующей пластины с двумя прямолинейными трещинами, в которой находятся усилия T^j ($j = 1, 2$) вблизи ближайших вершин вдоль пунктирной кривой $\lambda(x_j)$; В и С — двух задач для пластины с j -й ($j = 1, 2$) криволинейной трещиной, вдоль которой задаются найденные из задачи А усилия T^j , а также неизвестные T_p^{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2; i \neq j$), называемые псевдоусилиями, которые обусловлены взаимодействием трещин и подлежат определению совместно с кривой $\lambda(x)$.

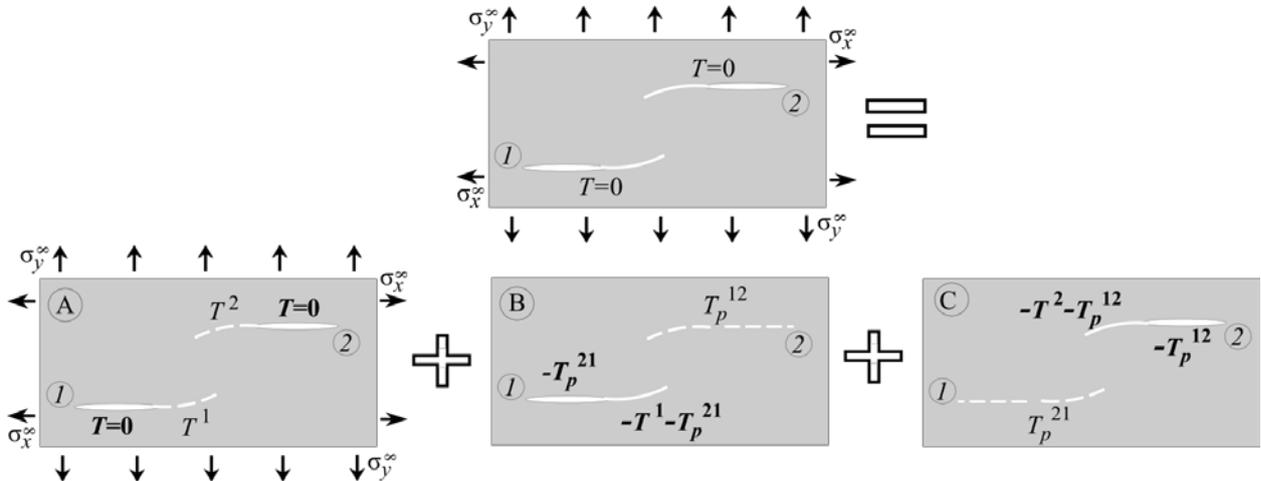


Рис. 9. Схема к решению задачи взаимодействия двух криволинейных трещин в нагруженной на бесконечности пластине

Следует отметить, что при решении задач В и С псевдоусилия T_p^{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2; i \neq j$), как и усилия T^j , задаются вдоль криволинейной части j -й трещины, при этом их значения вдоль прямолинейной границы трещины считаются пренебрежимо малыми, и вследствие этого не учитывается вклад прямолинейных участков во взаимодействие трещин в процессе их роста, что еще больше ограничивает область применимости аналитической модели.

Задача А решена в [4] (см. Приложение 2). Для усилий T^j ($j = 1, 2$), согласно [3], вдоль кривой $\lambda(x_j)$ имеем выражения:

$$\begin{aligned}
 T_n^j(x_j) &= \left(k_I - \frac{3}{2}\alpha k_{II}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi x_j}} - \frac{5\beta k_{II}}{2\sqrt{2\pi}} + \left(b_I - \frac{7}{2}\gamma k_{II} - \frac{5}{2}\alpha b_{II}\right) \sqrt{\frac{x_j}{2\pi}} + O(x_j), \\
 T_s^j(x_j) &= \left(k_{II} + \frac{\alpha}{2}k_I\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi x_j}} + \left(-\alpha T + \frac{\beta k_I}{2\sqrt{2\pi}}\right) + \left(b_{II} - 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\beta T + \frac{\gamma k_I}{2} - \frac{\alpha b_I}{2}\right) \sqrt{\frac{x_j}{2\pi}} + O(x_j),
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

где $k_1, k_{II}, b_1, b_{II}, T$ — коэффициенты разложения Вильямса для полей напряжений вблизи ближайших вершин параллельных трещин вдоль оси x_j (см. Рис. 7 и выражения (9), (10)).

Решение задач В и С (Рис. 9) — поля напряжений в окрестности двух криволинейных трещин — получено в [6] с помощью комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили [20]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2[\phi(z) + \overline{\phi(z)}], \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} - 2i\sigma_{xy} &= 2\left[2(z - \bar{z})\overline{\phi'(z)} + \Omega(\bar{z}) - \overline{\phi(z)}\right],\end{aligned}\quad (12)$$

где $z = x + iy$; черта над символами означает комплексное сопряжение. Каждая из бигармонических комплексных функций $\phi(z)$ и $\Omega(z)$ является суперпозицией двух комплексных потенциалов, представляющих решения задач В, С и обозначаемых верхними индексами 1 и 2 соответственно:

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \phi^1(z_1) + \phi^2(z_2), & \Omega(z) &= \Omega^1(z_1) + \Omega^2(z_2), \\ z_1 &= x_1 + iy_1, & z_2 &= x_2 + iy_2 = z_0 - z_1, & z_0 &= r_0 e^{i\theta_0},\end{aligned}\quad (13)$$

где r_0, θ_0 — параметры, характеризующие взаимное расположение изначально параллельных трещин (Рис. 7).

Каждый из потенциалов $\phi^j(z), \Omega^j(z)$, при условии малых отклонений $\lambda(x_j)$ j -й трещины от прямолинейной траектории, можно записать в виде приближения [2, 6]:

$$\phi^j(z_j) = \phi_0^j(z_j) + \phi_1^j(z_j) + O(\lambda^2), \quad \Omega^j(z_j) = \Omega_0^j(z_j) + \Omega_1^j(z_j) + O(\lambda^2).\quad (14)$$

Для функций $\phi_0^j(z_j), \phi_1^j(z_j), \Omega_0^j(z_j), \Omega_1^j(z_j)$ справедливы формулы [6]:

$$\begin{aligned}\phi_0^j(z_j) = \Omega_0^j(z_j) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{z_j - L}} \int_0^L (T_n^j(t) - iT_s^j(t)) \frac{\sqrt{L-t}}{z_j - t} dt, \\ \phi_1^j(z_j) + \Omega_1^j(z_j) &= \frac{1}{\pi\sqrt{z_j - L}} \int_0^L (\eta(t)T_s'^j(t) + 2\eta'(t)T_s^j(t) - i\eta(t)T_n'^j(t)) \frac{\sqrt{L-t}}{z_j - t} dt,\end{aligned}\quad (15)$$

где $\eta(t) = \lambda(t) - \lambda(L)$, $T_n^j(t)$, $T_s^j(t)$ — нормальные и сдвиговые усилия, заданные на криволинейной границе трещины в точке $z_j = t$ для задачи В (при $j = 1$) и для задачи С (при $j = 2$), которые выражаются через суперпозицию усилий, определяемых из задачи А для прямолинейных трещин T^j ($j = 1, 2$) (см. соотношения (11)), и неизвестных псевдоусилий T_p^{kj} ($k = 1, 2; j = 1, 2; k \neq j$), обусловленных взаимодействием криволинейных трещин:

$$T_n^j(t) - iT_s^j(t) = T_n^j(t) - iT_s^j(t) + T_{n(p)}^{kj}(t) - iT_{s(p)}^{kj}(t) \quad (k = 1, 2; k \neq j), \quad 0 \leq t \leq L, \quad (16)$$

причем, вследствие симметрии, $T_p^{12}(t) = T_p^{21}(t) \equiv T_p(t)$, $\phi^1(z) = \phi^2(z)$, $\Omega^1(z) = \Omega^2(z)$. Псевдоусилия T_p^{kj} ($k = 1, 2; j = 1, 2; k \neq j$) можно искать в виде ряда:

$$T_{n(p)}(x_j) - iT_{s(p)}(x_j) = \sum_{n=0}^{\infty} (P_{n/2} - iQ_{n/2})(x_j/L)^{n/2}, \quad (17)$$

где $P_{n/2}, Q_{n/2}$ — неизвестные коэффициенты, которые подлежат установлению совместно с коэффициентами α, β, γ уравнения траектории трещины (6).

Таким образом, поле напряжений, обусловленное наличием криволинейной трещины 1 (Рис. 9, задача В), на границе трещины 2 (пунктирная линия) определяет усилия T_p^{12} , в результате чего имеем соотношение [6]:

$$-(T_{n(p)}^{12}(x_2) - iT_{s(p)}^{12}(x_2)) = \phi_0^1(z_0 - x_2) + \Omega_0^1(z_0 - x_2) + \phi_1^1(z_0 - x_2) + \Omega_1^1(z_0 - x_2) +$$

$$+i\eta(x_2)\left[\phi_0^1(z_0-x_2)+\Omega_0^1(z_0-x_2)\right]'+2i\left[\eta(x_2)\left(\overline{\phi_0^1(z_0-x_2)}-i\Omega_0^1(z_0-x_2)\right)\right]'. \quad (18)$$

Аналогично для коэффициентов интенсивности напряжений вблизи ближайших вершин криволинейных трещин, подросших на длину L вдоль траектории $\lambda(x)$, имеем выражение [6]:

$$K_I^j(L)-iK_{II}^j(L)=\lim_{r_j\rightarrow 0}\sqrt{2\pi r_j}\left[2\phi_0^j(L+r_j)(1-i\omega)+2i\omega\overline{\phi_0^j(L+r_j)}+2i\omega r_j\overline{\phi_0^j(L+r_j)}+\phi_1^j(L+r_j)+\Omega_1^j(L+r_j)\right], \quad (19)$$

где $\omega=\lambda'(L)$. Выбирая в качестве критерия роста трещины равенство $K_{II}^1(L)=K_{II}^2(L)\equiv K_{II}(L)=0$, которое соответствует критерию (3), использованному при численном моделировании, получим выражение для $K_{II}(L)$:

$$K_{II}(L)=\lim_{r\rightarrow 0}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^L(\eta(t)T_n'(t)+T_s(t))\frac{\sqrt{L-t}}{L+r-t}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda'(L)\int_0^LT_n(t)\frac{\sqrt{L-t}}{L+r-t}dt\right], \quad (20)$$

где для $T_n(t)$, $T_s(t)$ справедливы формулы (16). Исходя из этого окончательно имеем:

$$\begin{aligned} K_{II} &= \left(\frac{\alpha k_1}{2}+k_{II}\right)+\left(\frac{3\beta k_1}{4}-\frac{\alpha\beta k_{II}}{\pi}-\frac{9\alpha\beta k_{II}}{8}-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha T+\alpha P_{0/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n/2)!Q_{n/2}}{\sqrt{2}(n/2+1/2)!}\right)\sqrt{L}+ \\ &+ \left(-\frac{\alpha b_1}{4}+\frac{b_{II}}{2}+\gamma k_1-\frac{9\alpha\gamma k_{II}}{8}-\frac{15\beta^2 k_{II}}{4\pi}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\beta T+\frac{3\beta}{\sqrt{2\pi}}P_{0/2}+\right. \\ &\left.+\beta\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}P_{n/2}\frac{(n/2+1/2)!}{(n/2+1)!}-\beta\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n/2-1/4)P_{n/2}\frac{(n/2)!}{(n/2+1/2)!}\right)L+O(L^{3/2}). \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, если в формуле (17) удержать $2N+1$ коэффициентов $P_{n/2}$ и $Q_{n/2}$ (то есть суммировать от 0 до $2N$), то, учитывая три неизвестных α, β, γ , будем иметь $4N+5$ неизвестных и систему из $4N+5$ нелинейных уравнений ($4N+2$ уравнения из формулы (18) и три уравнения из формулы (21), получаемые путем приравнивания нулю каждого из трех коэффициентов разложения). Из (21) следуют выражения (7) для коэффициентов уравнения траектории трещин.

Приложение 2. Вычисление коэффициентов разложения Вильямса

Рассмотрим задачу нахождения НДС в растягиваемой пластине при наличии двух прямолинейных параллельных трещин одинаковой длины (Рис. 10). Ее решение предложено в [4] и строится на основе принципа суперпозиции решений трех более простых задач об НДС: в однородной бесконечной пластине без трещин, подверженной растяжению, и в двух бесконечных пластинах, содержащих по одной трещине ($j=1$ и $j=2$), вдоль поверхности C^j которой заданы граничные условия:

$$\sigma_y^j=-(\sigma_y^{\infty j}+\sigma_y^{pj}), \quad \sigma_{xy}^j=-\sigma_{xy}^{pj} \quad \text{на } C^j \quad (j=1, 2), \quad (22)$$

где $\sigma_y^{p1}, \sigma_y^{p2}, \sigma_{xy}^{p1}, \sigma_{xy}^{p2}$ — неизвестные псевдоусилия, которые описывают взаимодействие прямолинейных трещин и находятся в ходе решения задачи.

Поля напряжений вблизи j -й трещины (Рис. 10, задачи В и С), нагруженной вдоль берегов усилиями (22), можно получить с помощью теории потенциалов Колосова–Мусхелишвили [20]:

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=2\left[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}\right], \quad \sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\sigma_{xy}=2\left[\overline{z}\Phi'(z)+\Psi(z)\right], \quad (23)$$

где

$$\Psi(z)=\overline{\Phi(\overline{z})}-\Phi(z)-z\Phi'(z). \quad (24)$$

Тогда для потенциала Мусхелишвили в задаче с j -й трещиной справедливо выражение [4, 20]:

$$\Phi^j(z_j) = -\frac{1}{2\pi i(z_j^2 - a^2)^{1/2}} \int_{-a}^a \frac{(t^2 - a^2)^{1/2}}{t - z_j} [\sigma_y^{\infty j} + \sigma_y^{pj} - i\sigma_{xy}^{pj}] dt, \quad (25)$$

где $z_j = x_j + iy_j$ ($j = 1, 2$). Исходя из требования соответствия трех более простых задач исходной задаче (Рис. 10), упругое поле, обусловленное присутствием одной из трещин, должно давать на границе другой трещины псевдоусилия

$$\begin{aligned} \sigma_y^{p2} - i\sigma_{xy}^{p2} &= \Phi^1(z_1) + \overline{\Phi^1(z_1)} + z_1 \overline{\Phi^{1'}(z_1)} + \overline{\Psi^1(z_1)}, \\ \sigma_y^{p1} - i\sigma_{xy}^{p1} &= \Phi^2(z_2) + \overline{\Phi^2(z_2)} + z_2 \overline{\Phi^{2'}(z_2)} + \overline{\Psi^2(z_2)}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $z_1 = de^{i\phi_{21}} + x_2$, $z_2 = de^{i\phi_{12}} + x_1$, $\phi_{12} = \phi_{21} + \pi$, $-a < x_1, x_2 < a$ (Рис.7, 10).

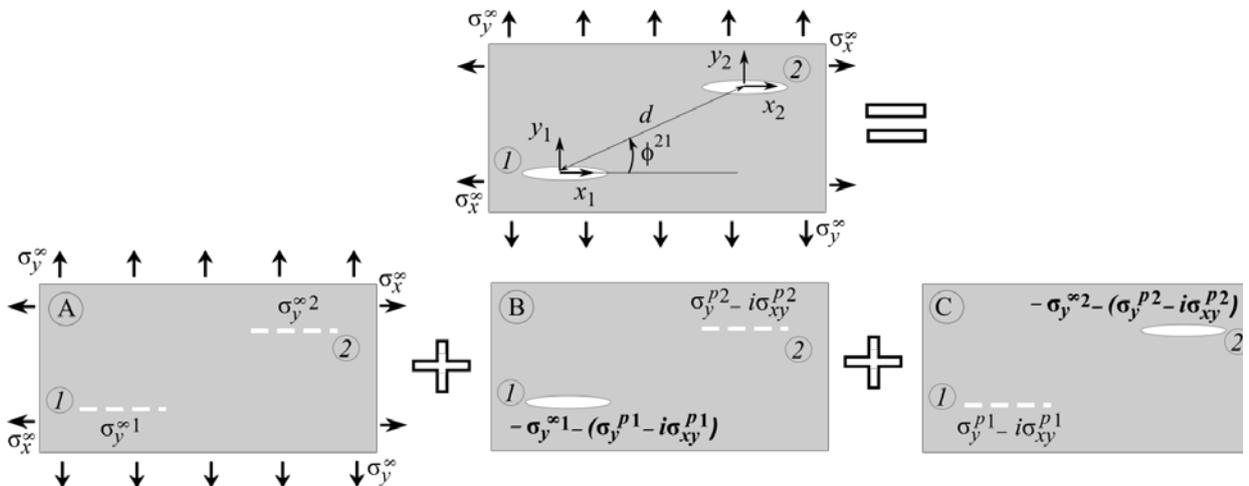


Рис. 10. Схема к решению задачи об НДС в нагруженной на бесконечности пластине с двумя прямолинейными трещинами

Псевдоусилия $\sigma_y^{pj}, \sigma_{xy}^{pj}$ представим в виде ряда с неизвестными коэффициентами:

$$\sigma_y^{pj} - i\sigma_{xy}^{pj} = \sum_{n=0}^{\infty} (P_n^j - iQ_n^j) (x^j/a^j)^n \quad (j = 1, 2). \quad (27)$$

Разлагая функции $\Psi^j(z_j), \Phi^j(z_j)$, определяемые выражениями (24), (25), в ряд по степеням (x^j/a^j) , а также подставляя (27) в (26), из последних можно получить систему алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов разложения P_n^j, Q_n^j [4].

Далее, после подстановки (27) в интегральное представление (25), имеем

$$\Phi^j(z^j) = -\frac{1}{2\pi(z^{j2} - a^j)^{1/2}} \int_{-a^j}^{a^j} \frac{(a^{j2} - t^2)^{1/2}}{t - z^j} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n^j \left(\frac{t}{a^j}\right)^n + \sigma_y^{\infty j} \right) - i \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^j \left(\frac{t}{a^j}\right)^n \right] dt, \quad (28)$$

где $z_j = x_j + iy_j$ ($j = 1, 2$), индекс « j » можно опустить вследствие симметрии задачи. Интеграл (28) после обращения в нуль интегралов от слагаемых с нечетными степенями t запишется в виде суммы:

$$\Phi^j(z^j) = I_0 + I_1 + I_2 - i(I_1' + I_2') \quad (j = 1, 2), \quad (29)$$

где

$$I_0 = \frac{(\sigma_y^{\infty} + P_0)(a/z)^2}{4(1 - (a/z)^2)^{1/2}} F\left(1; \frac{1}{2}; 2; \left(\frac{a}{z}\right)^2\right),$$

$$I_1 = \frac{(a/z)^3}{(1-(a/z)^2)^{1/2}} \sum_{m=1}^{\infty} P_{2m-1} \frac{(2m)!}{2^{2m+2} m!(m+1)!} F\left(1; m + \frac{1}{2}; m + 2; \left(\frac{a}{z}\right)^2\right), \quad (30)$$

$$I_2 = \frac{(a/z)^2}{(1-(a/z)^2)^{1/2}} \sum_{m=1}^{\infty} P_{2m} \frac{(2m)!}{2^{2m+2} m!(m+1)!} F\left(1; m + \frac{1}{2}; m + 2; \left(\frac{a}{z}\right)^2\right).$$

В формулах (30) $F(a_0, b_0, c_0; z_0)$ — гипергеометрическая функция Гаусса следующего вида [20]:

$$F(a_0, b_0, c_0; z_0) = \frac{\Gamma(c_0)}{\Gamma(b_0)\Gamma(c_0 - b_0)} \int_0^1 t^{b_0-1} (1-t)^{c_0-b_0-1} (1-tz_0)^{-a_0} dt,$$

где $c_0 - a_0 - b_0 > 0$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. В формуле (29) интегралы I'_1, I'_2 получены из соответствующих интегралов I_1, I_2 путем замены P_n^j на Q_n^j .

Далее, согласно (23), имеем значения напряжений на оси x ($z = \bar{z}$) вблизи вершины трещины:

$$\sigma_{xx}(x) = \sigma_{yy}(x) = 2 \operatorname{Re}[\Phi(x)], \quad \tau_{xy} = -2 \operatorname{Im}[\Phi(x)]. \quad (31)$$

Рассмотрим асимптотику функции $\Phi(z)$ и полей напряжений вблизи вершины трещины $z = x = a + r$, где r — достаточно малое расстояние от вершины трещины вдоль оси x . Подставляя $z = a + r$ в (29) и принимая во внимание (30), получим:

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & -\frac{1}{2} \left\{ \sigma_y^\infty + \sum_{n=0}^{\infty} (P_n - iQ_n) \right\} + \frac{1}{4} (\sigma_y^\infty + P_0 - iQ_0) \left\{ \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{r}} + \frac{3}{2\sqrt{2a}} \sqrt{r} + O(r^{3/2}) \right\} + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (P_{2m} - iQ_{2m}) \frac{(2m)!}{2^{2m+2} m!(m+1)!} \left\{ \frac{(m+1)\sqrt{2a}}{\sqrt{r}} + \frac{(16m+3)(m+1)\sqrt{2}}{4\sqrt{a}} \sqrt{r} + O(r) \right\} + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (P_{2m-1} - iQ_{2m-1}) \frac{(2m)!}{2^{2m+2} m!(m+1)!} \left\{ \frac{(m+1)\sqrt{2a}}{\sqrt{r}} + \frac{(16m-1)(m+1)\sqrt{2}}{4\sqrt{a}} \sqrt{r} + O(r) \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

При суперпозиции решений однородной задачи и двух задач с одиночными трещинами, благодаря наличию в (32) свободного члена $-\left\{ \sigma_y^\infty + \sum_{n=0}^{\infty} (P_n - iQ_n) \right\} / 2$, в асимптотике результирующих напряжений $\sigma_{xx}(x, 0)$ будет присутствовать свободный член $T = \sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty$. С учетом формул (31) и (32) для коэффициентов k_I, k_{II}, b_I, b_{II} имеем:

$$k_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yy} \sqrt{2\pi r}) = \sqrt{\pi a} \left[(\sigma_y^\infty + P_0) + \sum_{m=1}^{\infty} (P_{2m} + P_{2m-1}) \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \right],$$

$$k_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{xy} \sqrt{2\pi r}) = \sqrt{\pi a} \left[Q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (Q_{2m} + Q_{2m-1}) \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \right],$$

$$b_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\left(\sigma_{yy} - \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{a}} \left[3(\sigma_y^\infty + P_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} (P_{2m}(16m+3) + P_{2m-1}(16m-1)) \right],$$

$$b_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\left(\sigma_{xy} - \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \right) \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{a}} \left[3Q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} (Q_{2m}(16m+3) + Q_{2m-1}(16m-1)) \right].$$

Поступила в редакцию 01.12.2017; опубликована в электронном виде 30.03.2018

Сведения об авторах

Каспарова Елена Аркадьевна, программист, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН), 119526, Москва, пр-т Вернадского, д.101, корп.1; e-mail: korserpentis@mail.ru

Шушпанников Павел Сергеевич, кфмн, снс, ИПМех РАН; e-mail: shushpan@ipmnet.ru