

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.1.6](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.1.6)

УДК 532.5.032

РАССЛОЕНИЕ ПОТОКА ЖИДКОСТИ С НЕМОНОТОННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ НАПРЯЖЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ ОТ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ

Ю.Л. Кузнецова, О.И. Скульский

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Рассмотрена задача о напорном течении жидкости в плоском канале со встречным движением одной из стенок. Жидкость характеризовалась немонотонной кривой течения, состоящей из трех участков: левого (возрастающая ветвь), среднего (ниспадающая ветвь), правого (возрастающая ветвь). Реологические свойства жидкости описывались модифицированной моделью Виноградова–Покровского. Константы модели определялись по результатам реологических испытаний расплава полиэтилена высокой плотности на лазерном доплеровском вискозиметре. Получены все точные аналитические решения этой задачи в параметрическом виде для одномерного случая. Построены профили скорости, эффективной вязкости и градиента скорости по высоте канала для различных значений параметров реологической модели. Показано, что при одном и том же заданом поле напряжений в диапазоне скоростей сдвига, отвечающих средней ветви кривой течения, существуют три решения. Одно из них неустойчиво и физически не реализуемо, два других решения устойчивы, но которое из них будет иметь место, зависит от предыстории нагружения. Решение, соответствующее левой ветви, монотонно, а решение, согласующийся с правой ветвью, демонстрирует расслоение потока на «полосы» с различными как скоростями деформаций, так и физико-механическими свойствами. В то же время зависимость эффективной вязкости от скорости деформации, являясь монотонно убывающей функцией, допускает собственное представление в виде экспоненциального ряда. Эта же задача о напорном течении решена в двумерной постановке методом конечных элементов с использованием полуслабой формулировки Галёркина и аппроксимирующей функции для вязкости. Сравнение численных и аналитических результатов показало, что они с достаточной степенью точности близки. В том и другом случае при стремлении встречного перепада давления к нулю предельный переход к куэттовскому течению не возможен.

Ключевые слова: немонотонная кривая течения, мезоскопическая реологическая модель, напорное течение, плоский канал с подвижной стенкой, аналитическое и численное решения, неединственность, расслоение потока на полосы

SHEAR BANDING OF THE FLUID WITH A NONMONOTONIC DEPENDENCE OF FLOW STRESS UPON STRAIN RATE

Yu.L. Kuznetsova and O.I. Skul'skiy

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

The problem of the pressure flow of a fluid in a flat channel with the counter motion of one of the walls is considered. The fluid is characterized by a non-monotonic flow curve consisting of three segments: left segment (ascending branch), middle segment (descending branch) and right segment (ascending branch). The rheological properties of the fluid are described by a modified model of Vinogradov–Pokrovsky. The constants of the model are determined using the results of rheological tests of high-density polyethylene melt performed with a laser Doppler viscometer. All exact analytical solutions of this problem are obtained in parametric form. The profiles of velocity, effective viscosity and velocity gradient along the channel height are constructed for different parameters of the rheological model. It is shown that at the same prescribed stress field, in the range of shear rates corresponding to the descending branch of the flow curve, there are three solutions, of which one is unstable and not physically realizable and the other two are stable; which of them is realized depends on the loading prehistory. One of these solutions, corresponding to the left branch of the flow curve, is monotone, and the solution corresponding to the right branch of the curve demonstrates the stratification of the flow into strips with different physico-mechanical properties and at different strain rates. At the same time, the dependence of the effective viscosity on the strain rate is a monotonically decreasing function. The same problem is solved for a two-dimensional case by the finite element method using a weak Galerkin formulation. Comparison of the numerical results with the analytical solution shows that the results coincide with a sufficient degree of accuracy. In either case, as the counter pressure drop approaches zero, the limiting transition to the Couette flow is impossible.

Keywords: non-monotonic flow curve, mesoscopic rheological model, pressure flow, flat channel with movable wall, analytical and numerical solutions, nonuniqueness, shear banding

1. Введение

В последнее десятилетие экспериментальная и теоретическая реология обогатилась новыми знаниями о мезоструктуре растворов и расплавов полимеров, ее эволюции и влиянии на процессы течения в элементах технологического оборудования. В частности, было показано [1–3], что некоторые мицеллярные растворы и расплавы полимеров с изменяющейся в процессе течения внутренней структурой демонстрируют немонотонность (наличие экстремумов напряжений) и зависимость формы экспериментальных кривых течения от предыстории нагружения. Немонотонность кривой течения является отражением расслоения потока на полосы с различными скоростями сдвига и структурно механическими свойствами в реометрических течениях. В англоязычной литературе это явление получило название «shear banding» [4–6], в русскоязычных источниках используется термин «полосы сдвига».

Термин «полосы сдвига» широко применяется в механике деформируемых твердых тел для обозначения областей с очень высокой деформацией сдвига, которые наблюдаются в металлах и сплавах в виде полос при прокатке. В механику жидкости этот термин введен относительно недавно для обозначения неоднородного течения жидкости, в котором существует две или более полосы сдвига с различными структурно-механическими свойствами. В последнее десятилетие, с приходом вискозиметрии высокого разрешения, появилась возможность осуществить серию экспериментов, которые демонстрируют существование полос сдвига в запутанных полимерах. Полосы сдвига наблюдаются как в растворах синтетических полимеров [7], так и в дезоксирибонуклеиновой кислоте (ДНК) [8].

Существование полос сдвига меняет процедуру перехода от исходных экспериментальных данных, измеряемых ротационным реометром в терминах «момент – скорость вращения», к зависимости «напряжение сдвига – скорость сдвига». Это обусловлено тем, что в стандартных формулах, по которым осуществляется расчет скорости сдвига на стенке по угловой скорости, заложена однородность поля скорости и постоянство скорости сдвига поперек течения. В режиме полос сдвига стандартные соотношения становятся некорректными. Ситуация усложняется тем, что положенное в основу работы ротационных вискозиметров предположение об установившемся ламинарном сдвиговом течении в щели, осуществляющемся за счет движения одной из пластин (куэттовское течение), не позволяет установить связь исследуемых переменных с поперечной координатой и, как следствие, определить количество, ширину полос сдвига и корректность перехода от угловой скорости к скорости сдвига.

В капиллярной вискозиметрии, где реализуется течение Пуазейля, также может наблюдаться расслоение потока. При движении жидкости, характеризуемой немонотонной кривой течения, профили скорости непрерывны, но в некотором диапазоне задаваемых внешних параметров они могут иметь тангенциальные разрывы, что свидетельствует об образовании слоев с отличающимися структурно-механическими свойствами.

Таким образом, проблема исследования поведения жидкостей с немонотонной кривой течения, возникающая в ротационных и капиллярных вискозиметрах, является важной и актуальной задачей.

Для математического описания течения высокомолекулярных жидкостей в настоящее время разработано огромное количество определяющих соотношений, опирающихся на феноменологический, структурный и мезоскопический подходы. Наиболее математически строгие многоуровневые определяющие соотношения с учетом эволюции микроструктуры вязкоупругопластических материалов разработаны П.В. Трусковым с соавторами в [9–11].

На развитие моделей на мезоскопическом уровне существенное влияние оказала концепция рептилии, введенная Де Женном [12, 13] для представления динамики макромолекул, обобщенная в дальнейшем Дои и Эдвардсом [14, 15]. В модели Дои–Эдвардса каждая полимерная молекула рассматривается как гибкая не меняющая своей длины цепь, движущаяся внутри трубки, образованной другими молекулами. Благодаря исследованиям Марручи и Гриззути [16], модель Дои–Эдвардса была модифицирована, и стал возможен учет не только ориентации, но и удлинения каждого сегмента полимерной цепи. Результирующая модель (DEMG-модель) наиболее полно описывает динамику макромолекул, но очень сложна для численных расчетов реальных течений. В работах Реммелгаса, Харриссона и Лиля [17, 18] предложена относительно простая дифференциальная векторная модель (RHL-модель), с высокой степенью точности аппроксимирующая мезоскопическую модель DEMG.

В RHL-модели растворов полимеров движение невзаимодействующего клубка макромолекул в потоке растворителя представляется как движение ориентирующей и удлиняющей «гантели», состоящей из двух бусинок, соединенных упругой пружинкой. Основным допущением RHL-модели является предположение, что ориентация и удлинение гантели происходят на разных масштабах времени, что характерно для сильно переплетенных макромолекул. В связи с этим процессы ориентации и удлинения рассматриваются независимо друг от друга. Аналогичный подход использовался ранее в работах Ольбрихта и др. [19]. Эволюционное уравнение среднестатистического удлинения макромолекулы, фактически, аналогично широко известным уравнениям моделей FENE [20, 21].

Модифицированная модель Виноградова–Покровского (mVP-модель) получена как нулевое приближение в молекулярной теории вязкоупругости и представлена в работах [22–26]. В ней пружинка деформируется по линейному закону Гука, как и в RHL-модели, но, в отличие от нее, учитывается анизотропия гидродинамического поля, вызванная воздействиями на выделенную макромолекулу других макромолекул, искажающих внешнее гидродинамическое поле. На ее основе были исследованы вискозиметрические функции при простом сдвиге и одноосном растяжении, а также продемонстрировано взаимное соответствие теоретических зависимостей и экспериментальных данных для растворов и расплавов линейных полимеров различных молекулярных весов и концентраций. Обзор работ этого направления можно найти в [27–29].

В предыдущих исследованиях на основе RHL-модели [30, 31] и mVP-модели [32–35] показано, что они обладают хорошей работоспособностью в различных течениях. В частности, в установившемся сдвиговом течении обе модели качественно правильно описывают нелинейные эффекты, наблюдаемые в растворах и расплавах полимеров.

Однако ранее сравнение предсказаний моделей с экспериментальными данными проводилось, как правило, только при монотонно возрастающих кривых течения. Мезоскопические модели дают возможность математического моделирования процессов течения жидкостей с немонотонными кривыми течения, но экспериментальное определение материальных констант, входящих в выбранную реологическую модель и конкретизирующих свойства исследуемого материала, является нетривиальной и нерешенной задачей. Определение материальных констант по заданным и измеряемым в эксперименте интегральным характеристикам: «моменту вращения – угловой скорости» в ротационных вискозиметрах, «перепаду давления – расходу» в капиллярных вискозиметрах, требует решения обратной задачи. Это решение для жидкостей с немонотонными кривыми течения может быть получено численно на основе динамического программирования. При наличии точных аналитических решений задач плоскопараллельных течений эта проблема существенно облегчается.

Целью данной работы является получение аналитического и численного решений задачи течения жидкости с немонотонной кривой течения при «сложном сдвиге» — при напорном течении в плоском канале со встречным движением одной из стенок.

2. Постановка задачи плоскопараллельного течения жидкости с немонотонной кривой течения

В общем случае краевая задача исследования течения включает в себя:

– уравнения движения

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}; \quad (1)$$

– условие несжимаемости

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad (2)$$

– реологическое уравнение модифицированной модели Виноградова–Покровского

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \eta_s \mathbf{D} + 3 \frac{\eta_{po}}{\tau_0} \mathbf{A}, \quad (3)$$

$$\mathbf{A} + \frac{1 + (\kappa - \beta) I_1}{\tau_0} \mathbf{A} = \frac{2}{3} \mathbf{D} - 3 \frac{\beta}{\tau_0} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}; \quad (4)$$

– кинематические соотношения

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T). \quad (5)$$

В уравнениях (1)–(5) приняты обозначения: t — время; \mathbf{v} — вектор скорости; ∇ — оператор набла; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; ρ — плотность жидкости; P — давление; \mathbf{I} — единичный тензор; \mathbf{D} — тензор скоростей деформаций; η_s — вязкость растворителя; η_{po} — вязкость полимера; τ_0 — время релаксации; $\mathbf{A} = \langle \mathbf{R}\mathbf{R} \rangle / \langle \mathbf{R}^2 \rangle_0 - \mathbf{E}/3$ — тензорный параметр порядка, где \mathbf{R} — вектор, соединяющий концы гантели, $\langle \mathbf{R}^2 \rangle_0$ — равновесное значение выражения $\langle R_x^2 \rangle + \langle R_y^2 \rangle + \langle R_z^2 \rangle$; κ и β — феноменологические параметры модели; I_1 — первый инвариант тензора анизотропии; символ $\langle \cdot \rangle$ означает среднестатистическое значение, символ $\langle \Gamma \rangle$ — операцию транспонирования.

В случае стационарного плоскопараллельного течения при малых числах Рейнольдса ($\frac{\partial^*}{\partial t} = 0$, а V_x является функцией одной координаты, а именно y , $V_y = V_z = 0$, $\mathbf{A} = a_{ij} \mathbf{e}^{ij}$, $\mathbf{L} = (\nabla \mathbf{v})^T \Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial y} \equiv \dot{\gamma}$) уравнения движения и реологические уравнения в декартовых координатах имеют следующий вид:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d\sigma_{xy}}{dy}, \quad (6)$$

$$\sigma_{xy} = \eta_s \dot{\gamma} + 3 \frac{\eta_{po}}{\tau_0} a_{xy}, \quad (7)$$

$$\sigma_{xx} = 3 \frac{\eta_{po}}{\tau_0} a_{xx}, \quad \sigma_{yy} = 3 \frac{\eta_{po}}{\tau_0} a_{yy}, \quad \sigma_{zz} = 3 \frac{\eta_{po}}{\tau_0} a_{zz}, \quad (8)$$

$$a_{xx} \left(1 + (\kappa - \beta)(a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}) \right) + 3\beta(a_{xx}^2 + a_{xy}^2) = 2\tau_0 \dot{\gamma} a_{xy}, \quad (9)$$

$$a_{xy} \left(1 + (\kappa - \beta)(a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}) \right) + 3\beta a_{xy} (a_{xx} + a_{yy}) = \tau_0 \dot{\gamma} (a_{yy} + 1/3), \quad (10)$$

$$a_{yy} \left(1 + (\kappa - \beta)(a_{xx} + a_{yy}) \right) + 3\beta(a_{xy}^2 + a_{yy}^2) = 0, \quad (11)$$

$$a_{zz} = \frac{(\beta - \kappa)(a_{xx} + a_{yy}) - 1}{2\beta + \kappa}, \quad (12)$$

$$a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} = \frac{3\beta(a_{xx} + a_{yy}) - 1}{2\beta + \kappa}, \quad (13)$$

где предполагается, что $a_{xz} = a_{yz} = 0$.

Разрешая систему (6)–(13), все неизвестные можно выразить через a_{yy} . Тогда зависимость касательных напряжений σ_{xy} от скорости сдвига $\dot{\gamma}$ примет следующий параметрический вид:

$$\sigma_{xy} = \eta_{ef} (a_{yy}) \dot{\gamma} (a_{yy}), \quad (14)$$

$$\eta_{ef} = \eta_s + \eta_{po} \frac{(1 + 3a_{yy})(\beta + a_{yy}(\beta + 2\kappa))}{\beta(1 + a_{yy}(4\beta + 2\kappa - 3))}, \quad (15)$$

$$\dot{\gamma} = \pm \frac{\beta}{\tau_0} \sqrt{\frac{3a_{yy}(1 + a_{yy}(\beta + 2\kappa))(1 + a_{yy}(4\beta + 2\kappa - 3))^2}{(1 + 3a_{yy})(\beta + a_{yy}(\beta + 2\kappa))^3}}, \quad (16)$$

где в качестве параметра используется компонента тензора анизотропии a_{yy} . Как показано в [33], при $\kappa < \beta$ значения a_{yy} изменяются в диапазоне $-1/3 < a_{yy} \leq 0$.

Профиль скорости определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} V = \int \dot{\gamma} dy + C, \\ y = \frac{\sigma_{xy}}{dP/dx}, \end{cases} \quad (17)$$

а неизвестная константа интегрирования C — из условия прилипания на границах.

3. Аналитическое решение задачи течения при сложном сдвиге

Для жидкости с немонотонной кривой течения в стационарном случае в области ниспадающей ветви задание скорости на границе не определяет однозначно возникающее касательное напряжение, распределение скорости деформации и профиль скорости, так как известно, что задача имеет множество неустойчивых решений [2–8]. В то же время задача движения такой жидкости под действием заданного перепада давления имеет не более трех решений, два из которых устойчивы, а третье неустойчиво и не воспроизводимо. Которое из двух устойчивых решений реализуется, зависит от предыстории нагружения [34, 35].

Рассмотрим далее задачу определения профиля скорости для жидкости, характеризующейся немонотонной реологической кривой течения, в зазоре высотой $2h$ и длиной L между параллельными

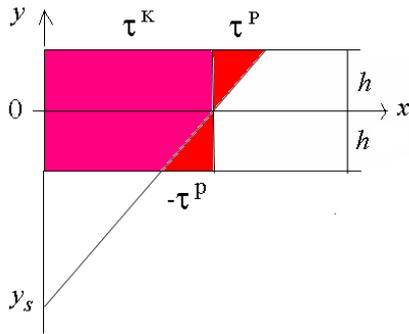


Рис. 1. Система координат и схема распределения касательных напряжений

плоскостями, верхняя из которых движется навстречу потоку со скоростью V_0 . Против сдвигового течения действует заданный градиент давления dP/dx .

Будем считать, что полное касательное напряжение на подвижной стенке известно и равно σ_{xy}^s , а скорость на ней V_0 определим из решения задачи. Интегрируя уравнение движения (6), получим: $\sigma_{xy} = \tau^P y + \tau^K$. Пуазейлевская составляющая есть линейная функция координаты y с максимумом $\tau^P = h dP/dx$, а $\tau^K = \text{const}$. Суммарное напряжение σ_{xy} удобно записать как линейную функцию y с началом, отстоящим от оси

симметрии канала Ox на расстоянии $y_s = \frac{\tau^K}{dP/dx}$

(см. Рис.1). Тогда задача течения жидкости при сложном сдвиге сведется к задаче для течению Пуазейля в канале большей высоты [33], а искомое решение будет находиться в интервале $y_s - h \leq y \leq y_s + h$. Таким образом, вместо (17) имеем

$$\begin{cases} V = \int \dot{\gamma} \frac{dy}{da_{yy}} da_{yy} + C, \\ y - y_s = \frac{\sigma_{xy}}{dP/dx}, \end{cases} \quad (18)$$

а неизвестную константу интегрирования C определим из условия прилипания на границе: при $y_s - h \Rightarrow V = 0$.

Недостатком предложенного алгоритма аналитического решения является невозможность учесть предысторию нагружения и определить, какое из стационарных решений реализуется. При уменьшении перепада давления до нуля на бесконечном удалении от оси симметрии (при $y_s \rightarrow \infty$) задача не сводится к чистому сдвигу.

4. Численное решение задачи течения при сложном сдвиге

Численное решение поставленной задачи проводилось методом конечных элементов с использованием полуслабой вариационной формулировки Галёркина и аппроксимирующей зависимости для эффективной вязкости от скорости деформации:

$$\begin{cases} \int_V \{-P(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \eta_{ef} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) : \nabla \mathbf{u}\} dV = \int_{S_\sigma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dS, \\ \int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) H dV = 0, \end{cases} \quad (19)$$

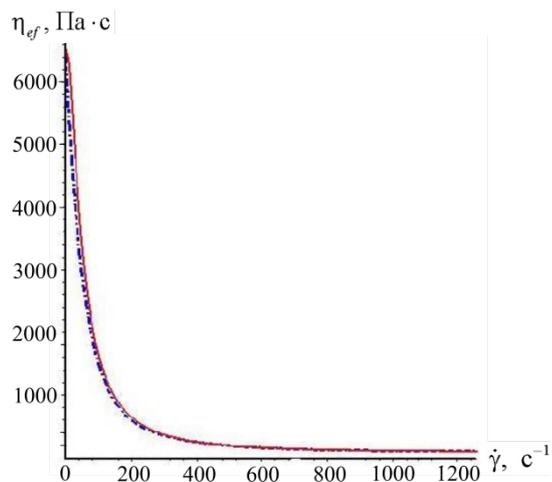


Рис 2. Зависимость эффективной вязкости от скорости деформации; сплошная линия – расчет по модели (15), (16), пунктирная – аппроксимация нелинейно вязкой жидкостью

где \mathbf{u}, H — взвешивающие функции, \mathbf{g} — поверхностная нагрузка, численно равная давлению на границе, η_{ef} — функция, аппроксимирующая эффективную вязкость по закону: $\eta_{ef} = 5600e^{-0.02\dot{\gamma}} + 100e^{-0.005\dot{\gamma}} + 100$. Для сравнения зависимости эффективной вязкости, вычисленной по точным зависимостям (15), (16) и аппроксимирующей формуле, представлены на рисунке 2.

Решение полученной нелинейной системы сводится к последовательности линеаризованных задач, в которых нелинейные члены рассчитываются по результатам предыдущих итераций. На каждой итерации дискретизация линеаризованных задач

осуществляется треугольными конечными элементами с линейной аппроксимацией компонент вектора скорости, а давление принимается кусочно-постоянным в пределах четырехугольников, состоящих из двух треугольных элементов. Сходимость итерационного процесса контролируется по эффективной вязкости.

5. Сравнение аналитических и численных решений

В качестве примера реальной немонотонной кривой течения выбрана зависимость, построенная по экспериментальным данным из работы [36], в которой исследовалось напорное течение полиэтилена высокой плотности в щели при заданном расходе. Аппроксимация экспериментальных данных модифицированной моделью Виноградова–Покровского с параметрами $\eta_0 = 6500$ Па·с, $\eta_s = 100$ Па·с, $\tau_0 = 0,023$ с, $\kappa = 0,078$, $\beta = 0,77$ позволяет построить немонотонную кривую течения ($\sigma_{xy} - \dot{\gamma}$) и расходно-напорную характеристику ($\Delta P - Q$). (представлены на рисунках 3 и 4).

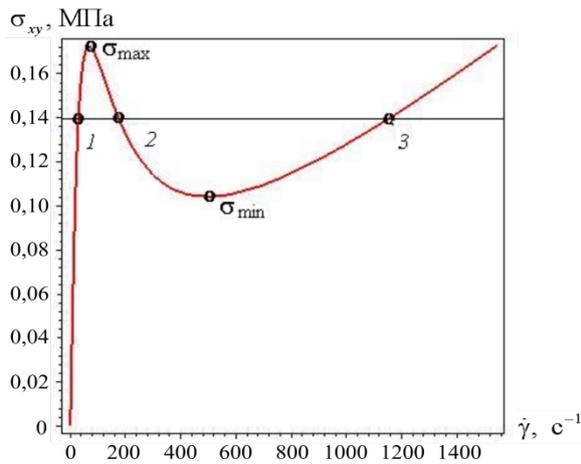


Рис. 3. Кривая течения, построенная по модели (15), (16)

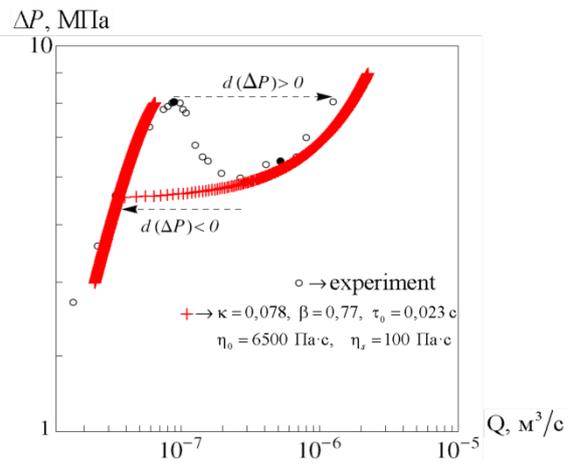


Рис. 4. Экспериментальные данные из работы [33] и рассчитанные по модели (15), (16)

Поскольку эксперимент проводился в режиме заданного расхода (см. Рис. 4), экспериментальные точки образуют непрерывную немонотонную кривую с максимумом и минимумом. Теоретические точки рассчитывались в режиме растущего и снижающегося перепада давления. С увеличением перепада давления расход плавно достигает максимума, а затем резко возрастает и переходит на правую ветвь (см. стрелку вправо). При уменьшении перепада давления расход снижается до минимума и переходит на левую ветвь кривой (см. стрелку влево). При значениях перепада давления ниже минимального и выше максимального экспериментальные и теоретические значения совпадают с достаточной степенью точности.

Рассмотрим пример аналитического и численного решения поставленной задачи для канала с полувысотой $h = 0,0005$ м, длиной $L = 0,024$ м. На рисунке 5 приведены профили скорости для напряжения, приложенного ниже точки минимума, и параметров $\tau^P = 0,005$ МПа, $\tau^K = 0,09$ МПа,

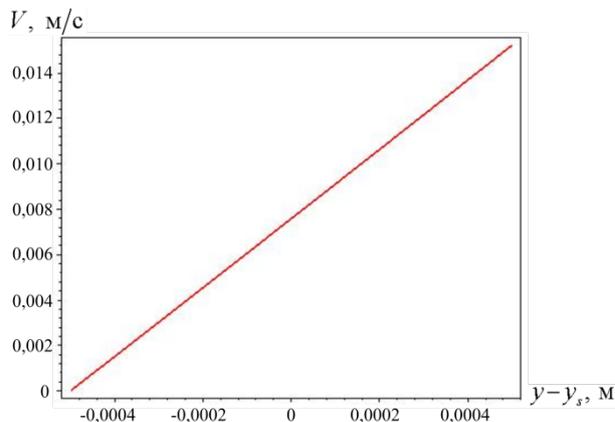


Рис. 5. Профиль скорости при напряжении, приложенном ниже точки минимума.

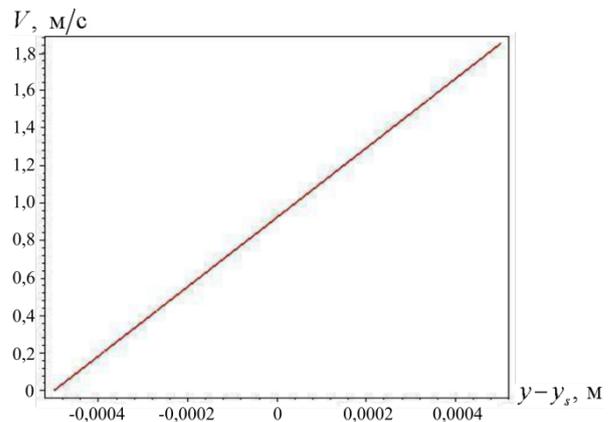


Рис. 6. Профиль скорости при напряжении, приложенном выше точки максимума.

$y_s = 0,09$ м, а на рисунке 6 — для напряжения выше точки максимума и параметров $\tau^P = 0,005$ МПа, $\tau^K = 0,09$ МПа, $y_s = 0,2$ м. Как видим, профили скорости в том и другом случае монотонны, но значения скорости на границе отличаются более чем на два порядка.

При параметрах $P = 1,5$ МПа, $dP/dx = 62,4$ МПа, $\tau^P = 0,0312$ МПа, $\tau^K = 0,11$ МПа, $y_s = 2,0$ м напряжение лежит в промежутке между точками минимума и максимума, и задача имеет три решения. Первое устойчивое решение, соответствующее левой ветви кривой (точка 1 на Рис. 3.), дает монотонные профили скорости, скорости деформации и эффективной вязкости (см. Рис. 7–9).

Третье решение, соответствующее правой ветви кривой (точка 3 на Рис. 3), имеет замкнутые петли в профиле скорости и разрыв в производной. Для третьего случая построены профили скорости деформации, эффективной вязкости и касательного напряжения (на рисунках 10–14 серым цветом показана область, выходящая за пределы канала).

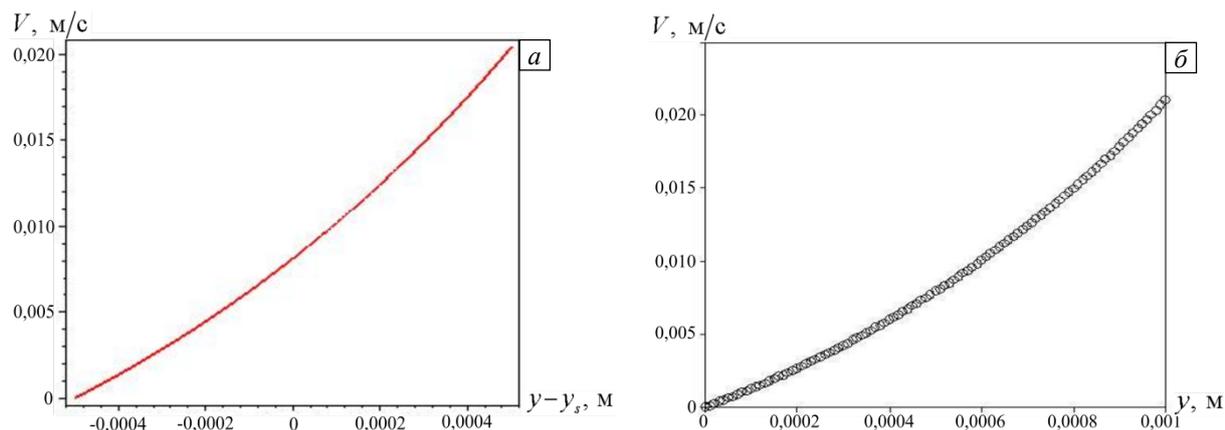


Рис. 7. Профили скорости: аналитическое (а) и численное (б) решения

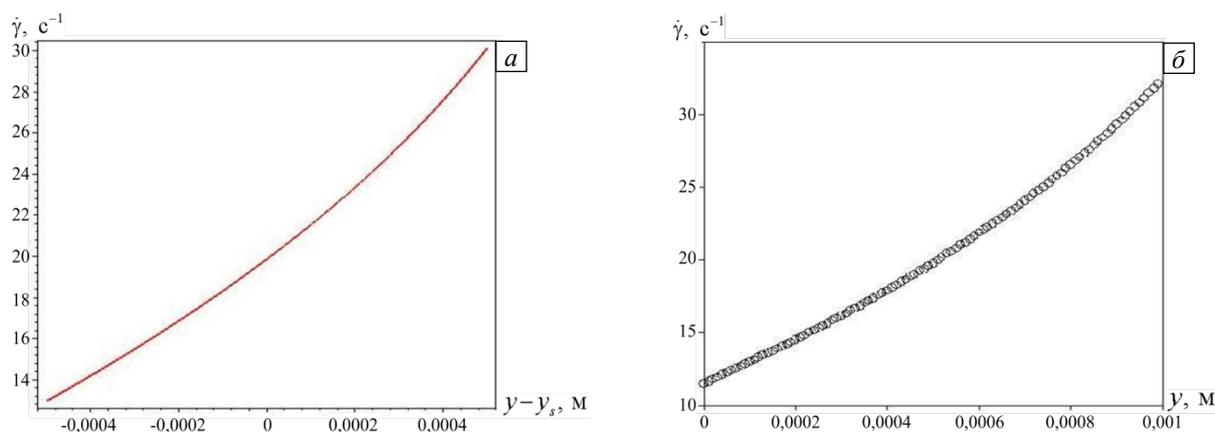


Рис. 8. Профили скорости деформации: аналитическое (а) и численное (б) решения

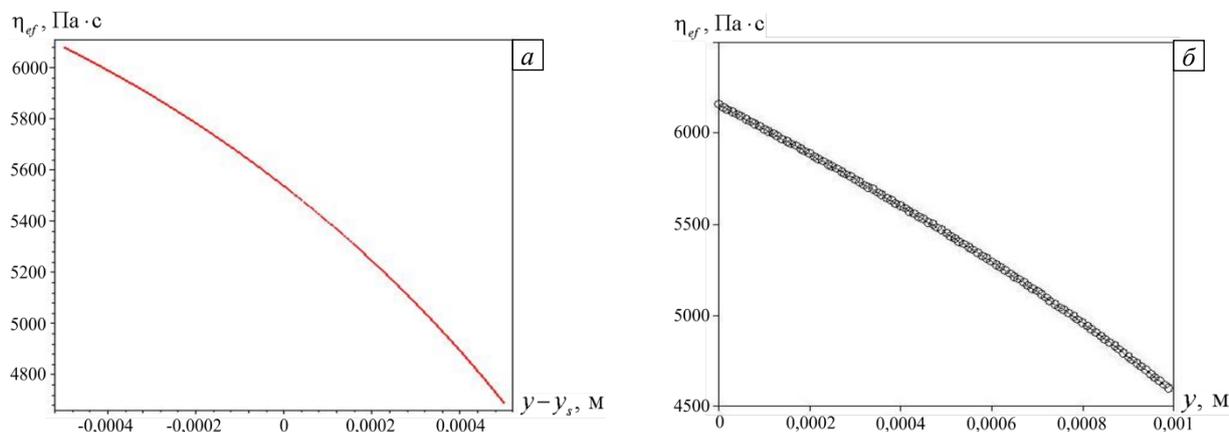


Рис. 9. Профили эффективной вязкости: аналитическое (а) численное (б) решения

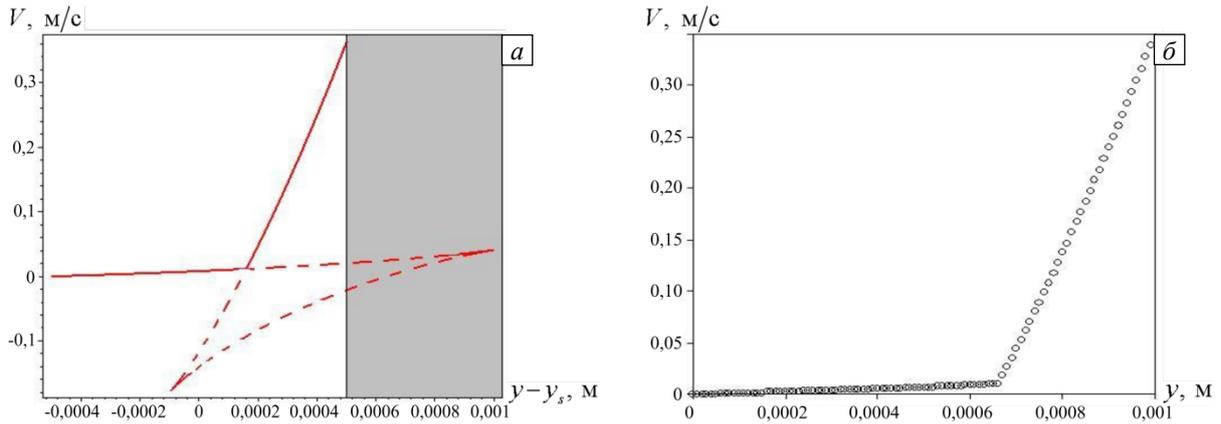


Рис. 10. Профили скорости: аналитическое (а) и численное (б) решения

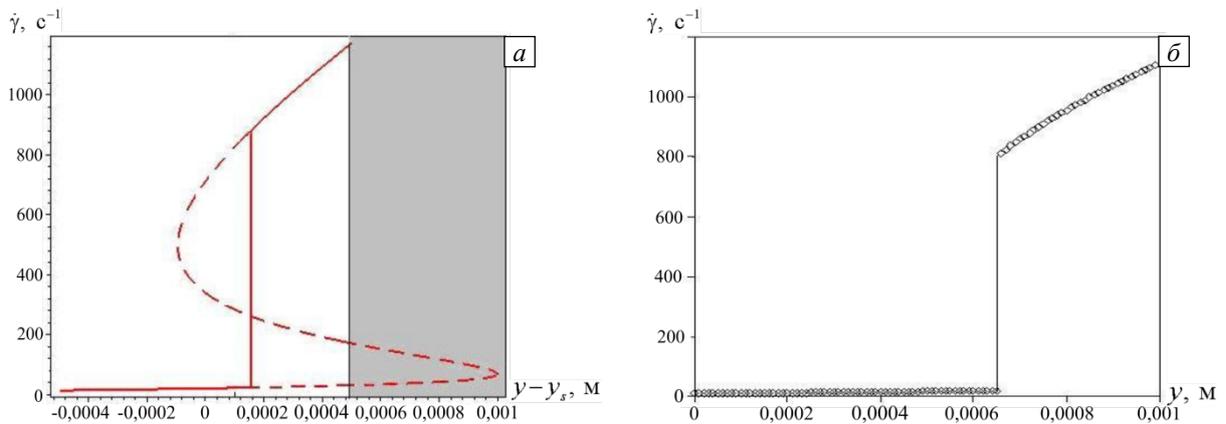


Рис. 11. Профили скорости деформации: аналитическое (а) и численное (б) решения

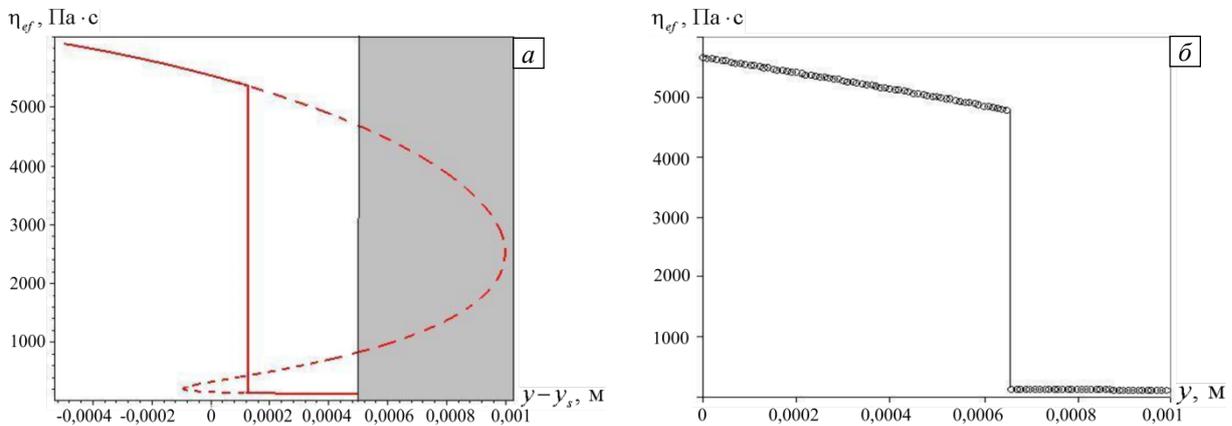


Рис. 12. Профили эффективной вязкости: аналитическое (а) и численное (б) решения

Как видно из графиков, профили скорости деформации и эффективной вязкости немонотонны, но их произведение, определяющее полное напряжение, монотонно и линейно (Рис. 13). На рисунке 14 представлены профили скоростей при постоянной скорости подвижной стенки и ступенчатом уменьшении приложенного противодействия.

Из графиков, приведенных на рисунке 14, следует, что в зависимости от величины противодействия поток жидкости с немонотонной кривой течения может расслаиваться на 2 полосы и более, у которых различны скорости деформации и эффективные вязкости, при этом значение полного напряжения сдвига остается линейным для всех номинальных скоростей сдвига. Уменьшение противодействия ведет к ухудшению сходимости итерационного процесса. В отсутствие противодействия решение стационарной задачи получить невозможно.

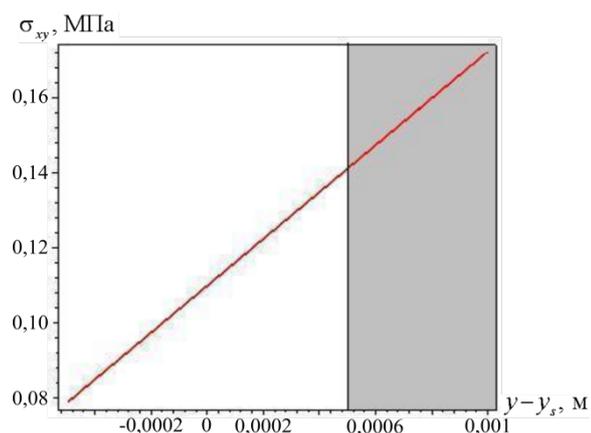


Рис. 13. Профиль полного напряжения

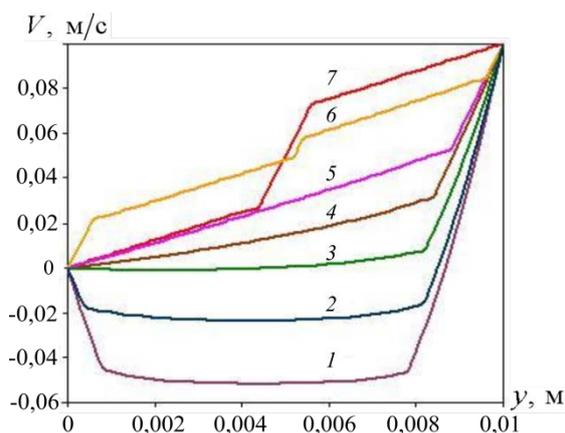


Рис. 14. Профили скоростей для $V_0 = 0,1$ и различных противодавлениях P , МПа: 0,9 (кривая 1); 0,8 (2); 0,50 (3); 0,1 (4); 0,01 (5); 0,007 (6); 0,0005 (7):

6. Заключение

Рассмотрена задача о напорном течении жидкости с немонотонной кривой течения в плоском канале со встречным движением одной из стенок. Реологические свойства жидкости описывались модифицированной моделью Виноградова–Покровского. Константы модели определялись по результатам реологических испытаний расплава полиэтилена высокой плотности на лазерном доплеровском вискозиметре. Для одномерного случая получены все точные аналитические решения этой задачи в параметрическом виде. Построены профили скорости, эффективной вязкости и градиента скорости по высоте канала для различных параметров реологической модели. Показано, что при одном и том же заданном поле напряжений в диапазоне значений скорости сдвига, отвечающем ниспадающей ветви кривой течения, существуют три решения, одно из которых неустойчиво и физически не реализуемо. Два других устойчивы, а которое из них будет иметь место — зависит от предыстории нагружения. Одно из этих решений, соответствующее левой ветви кривой течения, монотонно, а решение, соотносящееся с правой ветвью кривой, демонстрирует расслоение потока на две полосы с различными скоростями деформаций и физико-механическими свойствами. В то же время зависимость эффективной вязкости от скорости деформации является монотонно убывающей функцией, что позволяет представить ее в виде экспоненциального ряда.

Эта же задача решена в двумерной постановке методом конечных элементов на основе полуслабой формулировки Галёркина и аппроксимирующей функции для вязкости. Сравнение численного и аналитического решений показало, что числовые данные с достаточной степенью точности совпадают. В том и другом случае, при стремлении встречного перепада давления к нулю, предельный переход к куэттовскому течению невозможен.

Предложенные подходы к решению задач течения жидкостей с немонотонной кривой течения при сложном сдвиге и полученные результаты могут использоваться при моделировании технологических процессов экструзии, пультрузии и волочения в режиме гидродинамического трения.

Литература

1. *Cates M. E., Fielding S. M.* Rheology of giant micelles // *Adv. Phys.* – 2006. – Vol.55, no.7-8. – P. 799-879. [DOI](#)
2. *Olmsted P.D.* Perspectives on shear banding in complex fluids. // *Rheol. Acta.* – 2008. – Vol.47, no.3. – P.283–300. [DOI](#)
3. *Tapadia P., Wang S.-Q.* Nonlinear flow behavior of entangled polymer solutions: Yieldlike entanglement-disentanglement transition // *Macromolecules.* – 2004. – Vol.37, no.24. – P. 9083–9095. [DOI](#)
4. *Ravindranath S., Wang S.-Q.* Large amplitude oscillatory shear behavior of entangled polymer solutions: Particle tracking velocimetric investigation // *J. Rheol.* – 2008. – Vol.52, no.2. – P. 341–358. [DOI](#)
5. *Adams, J. M., Olmsted P. D.* Nonmonotonic models are not necessary to obtain shear banding phenomena in entangled polymer solutions // *Phys. Rev. Lett.* – 2009. – Vol.102, no.6. – P. 067801. [DOI](#)
6. *Adams, J. M., Olmsted P. D.* Adams and Olmsted reply // *Phys. Rev. Lett.* – 2009a. – Vol.103, no.21. – P. 219802. [DOI](#)
7. *Ravindranath, S., Wang S.-Q., M. Olechnowicz, Quirk R. P.* Banding in simple steady shear of entangled polymer solutions // *Macromolecules.* – 2008. – Vol.41, no.7. – P. 2663–2670. [DOI](#)
8. *Boukany, P. E., Wang S.-Q.* Shear banding or not in entangled DNA solutions depending on the level of entanglement, // *J. Rheol.* – 2009. – Vol.53, no.1. – P. 73–83. [DOI](#)
9. *Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Волегов П.С., Швейкин А.И.* Конститутивные соотношения и их применение для описания эволюции микроструктуры // *Физ. мезомех.* – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 61-71.
10. *Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Швейкин А.И.* Двухуровневая модель упругопластического деформирования поликристаллических материалов // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2009. – Т.15, №3. – С. 327-344.

11. Trusov P.V., Shveykin A.I., Nechaeva E.S., Volegov P.S. Multilevel models of inelastic deformation of materials and their application for description of internal structure evolution // *Phys. Mesomech.* – 2012. – Vol.15, no. 3-4. – P. 155-175. [DOI](#)
12. de Gennes P.-G. Origin of internal viscosity in dilute polymer solution. // *J. Chem. Phys.* –1977. – Vol. 66, no. 12. – P. 5825-5826. [DOI](#)
13. de Gennes P.-G. *Scaling Concepts in Polymer Physics.* – Cornell Univ. Press, Ithaca, N.Y., 1979. – 319 p.
14. Doi M. Edwards S.F. Dynamics of concentrated polymer systems. Part 1. –Brownian motion in the equilibrium state // *J. Chem. Soc., Faraday Trans. 2.* – 1978. – Vol.74. – P. 1789-1801. [DOI](#)
15. Doi M., Edwards S.F. *The theory of polymer dynamics.* – Oxford University Press, Oxford, 1986. – 391 p.
16. Marrucci G., Grizzuti N. Fast flows of concentrated polymers: predictions of the tube model on chain stretching // *Gaz. Chim.Ital.* – 1988. – Vol. 118 – P. 179-185.
17. Remmelgas J., Harrison G.M., Leal L.G. A differential constitutive equation for entangled polymer solutions // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* – 1999. – Vol. 80, no. 2-3. – P. 115-134. [DOI](#)
18. Harrison G.M., Remmelgas J., Leal L.G. Comparison of dumbbell-based theory and experiment for a dilute polymer solution in a corotating two-roll mill // *J. Rheol.* – 1999. – Vol. 43, no. 1. – P. 197-218. [DOI](#)
19. Olbricht W.L., Rallison J.M., Leal L.G. Strong flow criteria based on microstructure deformation // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* – 1982. –Vol. 10, no. 3-4. –P. 291-318. [DOI](#)
20. Bird R.B., Curtiss C.F., Armstrong R.C., Hassager O. *Dynamics of Polymeric Liquids. Volume 2: Kinetic Theory.* – John Wiley & Sons, Inc., New York, 2nd Ed., 1987. – 437 p.
21. Bird R.B., Dotson P.J., Johnson N.L. Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead—spring chain model // *J. Non-Newton. Fluid.* – 1980. – Vol. 7, no. 2-3. – P. 213-235. [DOI](#)
22. Volkov V.S., Vinogradov G.V. Theory of dilute polymer solutions in viscoelastic fluid with a single relaxation time // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* –1984 –Vol.15, no.1 – P. 29-44. [DOI](#)
23. Volkov V.S., Vinogradov G.V. Relaxational interactions and viscoelasticity of polymer melts. Part I. Model development // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* – 1985. – Vol.18, no.2. – P. 163-172. [DOI](#)
24. Покровский В.Н. Статистическая механика разбавленных суспензий. – М.: Наука. 1978. – 136 с.
25. Pokrovskii V.N. Dynamics of weakly-coupled linear macromolecules // *Sov. Phys. Uspekhi.* – 1992. – Vol. 35, no. 5 – P. 384-399. [DOI](#)
26. Pokrovskii V.N., Altukhov Yu.A., Pyshnograi G.V. The Mesoscopic Approach to the Dynamics of Polymer Melts: Consequences for the Constitutive Equation // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* – 1998. – Vol. 76, no. 1-3. – P.153-181. [DOI](#)
27. Pyshnograi G.V., Gusev A.S., Pokrovskii V.N. Constitutive Equations for Weakly Entangled Linear Polymers // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* –2009. –Vol. 163, no. 1-3. – P.17-28. [DOI](#)
28. Pokrovskii V.N., Altukhov Yu.A., Pyshnograi G.V. On the Difference between Weakly and Strongly Entangled Linear Polymer, // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* –2004. – Vol. 121, no. 2-3. – P. 73-86. [DOI](#)
29. Gusev A.S., Makarova, M.A., Pyshnograi G.V. Mesoscopic Equation of State of Polymer Systems and Description of the Dynamic Characteristics Based on It // *J. Eng. Phys Thermophys.* – 2005. – Vol. 78, no.5 – P. 892-898. [DOI](#)
30. Aristov S.N., Skul'skij O.I. Exact solution of the problem of flow of a polymer solution in a plane channel, // *J. Appl Mech. Techn. Phys.* – 2003. – Vol. 76, no. 3. – P. 88-95. [DOI](#)
31. Скульский О.И., Кузнецова Ю.Л. Реологические модели растворов полимеров. //Сб. науч. трудов «Математическое моделирование систем и процессов», Пермский государственный технический университет. –2006. –№ 14. –С. 178-188.
32. Кузнецова Ю.Л., Скульский О.И. Исследование реологических моделей растворов полимеров на реометрических течениях // Математическое моделирование в естественных науках. – 2013. – №1. – С. 92-94.
33. Кузнецова Ю.Л., Скульский О.И. Пышнограй Г.В. Течение нелинейной упруговязкой жидкости в плоском канале под действием заданного градиента давления. // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2010.– Т.1, № 2 – С. 55-69. (English version [DOI](#))
34. Кузнецова Ю.Л., Скульский О.И. Влияние переплетений макромолекул на простое сдвиговое течение упруго-вязкой жидкости // *Вычисл. мех. сплош сред.* – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 224-231. (English version [DOI](#))
35. Kuznetsova J.L., Skul'skiy O. I. Verification of mesoscopic models of viscoelastic fluids with a non-monotonic flow curve // *Korea-Aust. Rheol. J.* – 2016 – Vol. 28, no. 1. – P. 33-40. [DOI](#)
36. Robert L. Demay Y. Vergnes B. Stick-slip flow of high density polyethylene in a transparent slit die investigated by laser Doppler velocimetry // *Rheol Acta.* – 2004. – Vol 43, no. 1 – P.89-98. [DOI](#)

References

1. Cates M. E., Fielding S. M. Rheology of giant micelles, *Adv. Phys.*, 2006, vol. 55, no. 7-8, pp.799–879. [DOI](#)
2. Olmsted P.D. Perspectives on shear banding in complex fluids, *Rheol. Acta*, 2008, vol. 47, no. 3, pp. 283–300. [DOI](#)
3. Tapadia P., Wang S.-Q. Nonlinear flow behavior of entangled polymer solutions: Yieldlike entanglement-disentanglement transition. *Macromolecules*, 2004, vol. 37, no. 24, pp. 9083–9095. [DOI](#)
4. Ravindranath S., Wang S.-Q. Large amplitude oscillatory shear behavior of entangled polymer solutions: Particle tracking velocimetric investigation, *J. Rheol.*, 2008, vol. 52, no. 2, pp. 341–358. [DOI](#)
5. Adams, J. M., Olmsted P. D. Nonmonotonic models are not necessary to obtain shear banding phenomena in entangled polymer solutions. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, vol. 102, no. 6, pp. 067801. [DOI](#)
6. Adams, J. M., Olmsted P. D. Adams and Olmsted reply, *Phys. Rev. Lett.*, 2009, vol. 103, no. 21, pp. 219802. [DOI](#)
7. Ravindranath S., Wang S.-Q., Olechnowicz M., Quirk R. P. Banding in simple steady shear of entangled polymer solutions. *Macromolecules*, 2008, vol. 41, no. 7, pp. 2663–2670. [DOI](#)
8. Boukany, P. E., Wang S.-Q. Shear banding or not in entangled DNA solutions depending on the level of entanglement, *J. Rheol.*, 2009, vol. 53, no. 1, pp. 73–83. [DOI](#)
9. P.V. Trusov, V.N. Ashikhmin, P.S. Volegov and A.I. Shveykin Constitutive relations and their application to the description of microstructure evolution, *Fiz. mezomekh.*, vol. 12, no. 3, 2009, pp. 61-71.

10. Trusov P.V., Ashihmin V.N., Shveykin A.I. Dvuhurovnevaya model uprugoplasticheskogo deformirovaniya polikristallicheskih materialov [Two-level model of elastoplastic deformation of polycrystalline materials]. *Mehanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy*, 2009, vol. 15, no. 3, pp.327-344
11. Trusov P.V., Shveykin A.I., Nechaeva E.S., Volegov P.S. Multilevel models of inelastic deformation of materials and their application for description of internal structure evolution // *Phys Mesomech*, 2012, vol. 15, no. 3-4, pp. 155-175. [DOI](#)
12. de Gennes P.G. Origin of internal viscosity in dilute polymer solution, *J. Chem. Phys.*, 1977, vol. 66, no. 12, pp. 5825-5826. [DOI](#)
13. de Gennes P.G. Scaling Concepts in Polymer Physics. Cornell Univ. Press, Ithaca, N.Y., 1979, 319 p.
14. Doi M., Edwards S.F. Dynamics of concentrated polymer systems. Part 1. Brownian motion in the equilibrium state, *J. Chem. Soc.: Faraday Trans. 2*, 1978, vol. 74, pp.1789-1801. [DOI](#)
15. Doi M., Edwards S.F. *The theory of polymer dynamics*. Oxford University Press, Oxford, 1986. 391 p.
16. Marrucci G., Grizzuti N. *Fast flows of concentrated polymers: predictions of the tube model on chain stretching*, *Gaz. Chim.Ital.*, 1988, vol. 118, pp.179-185.
17. Remmelgas J., Harrison G., Leal L.G. A differential constitutive equation for entangled polymer solutions, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 1999, vol. 80, no. 2-3, pp. 115-134. [DOI](#)
18. Harrison G.M., Remmelgas J., Leal L.G. Comparison of dumbbell-based theory and experiment for a dilute polymer solution in a corotating two-roll mill, *J. Rheol.*, 1999, vol. 43, no. 1, pp. 197-218. [DOI](#)
19. Olbricht W.L., Rallison J.M., Leal L.G. Strong flow criteria based on microstructure deformation, *J. Non-Newton. Fluid.*, 1982, no. 10, pp. 291-318. [DOI](#)
20. Bird R.B., Curtiss C.F., Armstrong R.C., Hassager O. *Dynamics of Polymeric Liquids. Volume 2: Kinetic Theory*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2nd Ed., 1987. 437 p.
21. Bird R.B., Dotson P.J., Johnson N.L. Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead—spring chain model, *J. Non-Newton. Fluid.*, 1980, vol. 7, no. 2-3, pp. 213-235. [DOI](#)
22. Volkov V.S., Vinogradov G.V. Theory of dilute polymer solutions in viscoelastic fluid with a single relaxation time, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 1984, vol. 15, no. 1, pp. 29-44. [DOI](#)
23. Volkov V.S., Vinogradov G.V. Relaxational interactions and viscoelasticity of polymer melts. Part I. Model development, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 1985, vol. 18, no. 2, pp. 163-172. [DOI](#)
24. Pokrovskii V.N. *Statisticheskaya Mekhanika Razbavlenykh Suspenzii* (Statistical Mechanics of Dilute Suspensions, in Russian), Nauka, Moscow, 1978.
25. Pokrovskii V.N. Dynamics of weakly-coupled linear macromolecules. *Sov. Phys. Uspekhi*, 1992, vol. 35, no. 5, pp. 384-399. [DOI](#)
26. Pokrovskii V.N., Altukhov Yu.A., Pyshnograï G.V. The Mesoscopic Approach to the Dynamics of Polymer Melts: Consequences for the Constitutive Equation, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 1998, vol. 76, no. 1-3, pp.153-181. [DOI](#)
27. Altukhov Yu.A., Pokrovskii V.N., Pyshnograï G.V. On the Difference between Weakly and Strongly Entangled Linear Polymer, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 2004, vol. 121, no. 2-3, pp.73-86. [DOI](#)
28. Pyshnograï G.V., Gusev A S., Pokrovskii V.N. Constitutive Equations for Weakly Entangled Linear Polymers, // *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 2009, vol. 163, no. 1-3. pp.17-28. [DOI](#)
29. Gusev A.S., Makarova, M.A., Pyshnograï G.V. Mesoscopic Equation of State of Polymer Systems and Description of the Dynamic Characteristics Based on It, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2005, vol. 78, no. 5, pp. 892-898. [DOI](#)
30. Aristov S.N., Skul'skij O.I. Exact solution of the problem of flow of a polymer solution in a plane channel, *J. Appl Mech. Techn. Phys.*, 2003, vol. 76, pp. 577-585. [DOI](#)
31. Skul'skij O.I., Kuznecova Yu.L. Reologicheskie modeli rastvorov polimerov. [Rheological models of polymer solutions]. *Sb. nauch. trudov «Matematicheskoe modelirovanie sistem i processov» – PGTU*, 2006, no. 14, pp. 178-188.
32. Kuznecova Ju.L., Skul'skij O.I. Issledovanie reologicheskikh modelej rastvorov polimerov na reometrichekikh techenijah. [Investigation of rheological models of polymer solutions on rheometric flows]. *Matematicheskoe modelirovanie v estestvennykh naukah*, 2013, no. 1, pp. 92-94.
33. Kuznecova Ju.L., Skul'skij O.I., Pyshnograï G.V. The flow of a nonlinear elastic viscous fluid in a flat channel under the action of a given pressure gradient. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 1, no. 2, pp. 55-69. [DOI](#)
34. Kuznecova Ju.L., Skul'skij O.I. Influence of interlacing of macromolecules on the simple shear flow of an elastic viscous liquid. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 224-231. [DOI](#)
35. Kuznetsova J.L., Skul'skij O. I. Verification of mesoscopic models of viscoelastic fluids with a non-monotonic flow curve. *Korea-Aust. Rheol. J.*, 2016, vol. 28, no. 1, pp. 33-40. [DOI](#)
36. Robert L. Demay Y. Vergnes B. Stick-slip flow of high density polyethylene in a transparent slit die investigated by laser Doppler velocimetry, *Rheol Acta*, 2004, vol. 43, no. 1, pp.89-98. [DOI](#)

Поступила в редакцию 16.01.2018, опубликована 30.03.2018.

Сведения об авторах

Кузнецова Юлия Леонидовна, инж., Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1; e-mail: julyashmit@gmail.com.

Скульский Олег Иванович, Вед.н.с., д.т.н., ИМСС УрО РАН; e-mail: skul@icmm.ru.