

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.1.4](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.1.4)
УДК 539.3

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВЫХ И СТРУКТУРНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В СПЛАВАХ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

К.А. Тихомирова

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Конструктивные элементы из сплавов с памятью формы в процессе эксплуатации подвергаются одновременно охлаждению/нагреву и действию меняющихся по величине и направлению напряжений. Это приводит к тому, что в материале происходят влияющие друг на друга фазовые и структурные превращения, которым сопутствуют проявления эффекта памяти формы, перекрестного упрочнения, мартенситной неупругости. Кроме того, за изменением напряжений следует сдвиг характерных температур фазовых превращений, а также возможны прямой и обратный фазовые переходы при изотермическом возрастании и уменьшении нагрузки (эффект сверхупругости). Настоящая работа посвящена разработке феноменологической модели, в рамках единого подхода учитывающей перечисленные явления как оказывающие существенное влияние на напряженно-деформированное состояние конструкции. Модель основана на взаимосвязи диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости, что предполагает единообразное описание деформаций фазовых и структурных превращений. Это представляется целесообразным, поскольку обе составляющие деформации обусловлены образованием ориентированного мартенсита. Вводится в рассмотрение совокупность последовательно соединенных мартенситных структурных элементов, каждый из которых обладает собственным пределом структурного превращения (начальным напряжением), зависящим от условий возникновения элемента при фазовом переходе, а также от дальнейшей истории деформирования. Такой подход позволяет учесть влияние, во-первых, процессов фазового и структурного деформирования друг на друга, а во-вторых, истории деформирования на последующее превращение. Для демонстрации возможностей модели решена задача совместного деформирования пакета стержней из сплава с памятью формы, иллюстрирующая эволюцию напряженно-деформированного состояния системы при одновременном протекании фазовых и структурных превращений, вызванных внешним термосиловым воздействием.

Ключевые слова: феноменологическая модель, сплавы с памятью формы, фазовая деформация, структурная деформация

PHENOMENOLOGICAL MODELING OF PHASE AND STRUCTURAL DEFORMATIONS IN SHAPE MEMORY ALLOYS. ONE-DIMENSIONAL CASE

K.A. Tikhomirova

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

The elements of construction made of shape memory alloys (SMA) during their exploitation are subjected to cooling and heating under varying stresses. This leads to simultaneous phase and structural transformations affecting each other and causing such accompanying phenomena as shape memory, cross-hardening, and martensitic inelasticity. Furthermore, stress variations provoke the shift of phase transformation temperatures and can predetermine forward and reverse phase transformations when the isothermal load increases or decreases (superelasticity phenomenon). This work presents a phenomenological model for describing, in the framework of the uniform approach, the listed phenomena because they have a significant effect on the stress-strain state of the structure. The model is based on the interconnection of forward transition and martensitic inelasticity diagrams which allows one to uniformly describe phase and structural deformations because both of them are related to the formation of the oriented martensite. We study a set of martensitic structural elements connected in series, each having a unique structural transformation factor (initial stress). The structural transformation factor is defined by the element emergence conditions at forward phase transformation and by the subsequent deformation behavior. This approach allows us to take into account, first, the mutual influence of the processes of phase and structural transformations, and second, the influence of the deformation history on further transition. The problem of joint deformation of the package of SMA rods is solved to illustrate the evolution of the stress-strain state of the system at simultaneous phase and structural transformations caused by the external thermomechanical effect.

Key words: phenomenological model, shape memory alloys, phase deformation, structural deformation

1. Введение

В конструкционных изделиях из сплавов с памятью формы (СПФ) под воздействием меняющихся во времени температуры и нагрузки может происходить целый ряд явлений, связанных с перестройкой кристаллической решетки при фазовых и структурных превращениях. Это образование из аустенитной фазы температурного мартенсита при охлаждении и мартенсита напряжения при возрастании нагрузки, полное или частичное обратное превращение при снижении нагрузки или нагреве, при возрастании или смене направления нагрузки — структурное превращение, вызванное переориентацией мартенситных ячеек [1]. Кроме того, любое изменение действующей нагрузки вызывает смещение характерных температур фазовых переходов, а история деформирования сказывается на процессе обратного превращения, что обнаруживается, например, как эффект реверсивной памяти формы [2, 3]. Поэтому проблема разработки моделей, которые способны в рамках единого подхода наиболее полно представить весь спектр макромеханических явлений, обусловленных мартенситными и структурными превращениями в СПФ, актуальна.

На полноту описания, в первую очередь, претендуют микроструктурные модели как модели, основанные на физической трактовке происходящих в материале процессов. Они разрабатываются рядом отечественных [4–8] и зарубежных [9–14] авторов. Однако алгоритмическая сложность таких моделей и большое число материальных функций и констант затрудняет их использование для расчета реальных конструкций.

Феноменологические модели, реализация которых значительно проще, обычно нацелены на учет одного или нескольких конкретных явлений, однако их возможностей часто бывает недостаточно для представления сложных режимов термомеханического нагружения СПФ. Так, многие из них описывают лишь деформацию фазового перехода и не способны отобразить процесс переориентации мартенситных ячеек [15–18]. В работах [19, 20], напротив, моделируется только переориентация мартенситной структуры при завершившемся фазовом переходе. Но существуют и общие модели, включающие фазовую и структурную составляющие деформации [21–25]. При этом в [24] учтено влияние истории деформирования на процессы последующего структурного превращения.

В настоящей работе предлагается феноменологическая модель, которая наряду с простотой алгоритма достаточно полно воспроизводит те макромеханические эффекты в СПФ, влияние которых на напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкции наиболее существенно. В качестве примера численной реализации модели решена задача совместного деформирования пакета стержней в режимах термомеханического нагружения, приближенных к реальным условиям эксплуатации элементов конструкций из СПФ.

2. Общие положения

Ограничимся случаем одноосного растяжения и введем в рассмотрение некоторые понятия.

При построении феноменологических моделей для СПФ обычно используется параметр q , обозначающий объемную долю мартенситной фазы в представительном объеме материала и изменяющийся от 0 до 1 при фазовом превращении. Мартенситный элемент — это совокупность равномерно распределенных по объему материала кристаллических ячеек мартенситной фазы, образование которых в ходе прямого фазового превращения произошло одновременно и сообщило объемной доле мартенсита элементарное приращение dq . Деформация образца в результате фазового и структурного превращений определяется степенью ориентированности мартенситных элементов и называется фазово-структурной; при необходимости, для удобства моделирования, ее разделяют на фазовую и структурную составляющие. При этом под деформацией мартенситного элемента понимается приращение макроскопической фазово-структурной деформации образца в результате фазового или структурного превращения кристаллических ячеек, образующих этот элемент. Степень ориентированности мартенситного элемента — это мера сонаправленности длинных осей кристаллических ячеек в элементе с внешним напряжением. Она зависит от уровня напряжения в образце в момент возникновения элемента на этапе прямого фазового перехода и увеличивается при структурном превращении (при переориентации мартенситных ячеек) с возрастанием действующего напряжения. Минимальной степенью ориентированности обладает структура хаотического (неориентированного) мартенсита, образующегося в процессе прямого фазового перехода при охлаждении без нагрузки. Увеличение степени ориентированности приводит к росту накопленной фазово-структурной деформации в образце в направлении действующего напряжения. Процесс, при котором все мартенситные элементы имеют одинаковую степень ориентированности, называется однородным фазовым деформированием. Примером такого процесса служит охлаждение под постоянным напряжением.

Основываясь на введенных понятиях, сформулируем **У т в е р ж д е н и е**: фазово-структурная деформация мартенситного элемента однозначно определяется его текущей степенью ориентированности и не зависит как от механизма ее приобретения (вследствие фазового или структурного превращения), так и предшествующей истории изменения. Полную фазово-структурную деформацию можно разложить на объемную и девиаторную составляющие, что в случае одноосного напряженного состояния при завершившемся прямом фазовом переходе выражается суммой $\varepsilon_{\text{phst}} = \varepsilon_v + e_{\text{phst}}$. Объемная составляющая ε_v , будучи константой материала, не зависит от действующего напряжения, а составляющая e_{phst} , которая является осевой компонентой девиатора тензора фазово-структурных деформаций, монотонно возрастает с увеличением степени ориентированности мартенситной структуры, определяемой внешним напряжением. Последняя составляющая отсутствует у хаотического мартенсита. Зависимость составляющей деформации e_{phst} полного прямого превращения в условиях постоянного действия напряжения от величины этого напряжения называется диаграммой прямого превращения $F_1(\sigma)$, а зависимость e_{phst} от напряжения при структурном деформировании хаотического мартенсита — диаграммой мартенситной неупругости $F_2(\sigma)$ [25]. Обе диаграммы ограничены сверху максимальным

значением осевой компоненты девиатора фазово-структурной деформации $e_{\text{phst}}^{\text{max}}$, достигаемым при наиболее ориентированной мартенситной структуре. Экспериментально установлено, что $F_1 \geq F_2$ во всей области определения [26, 27]. Поскольку оба рассматриваемых процесса фазового деформирования однородны, то макроскопическая фазово-структурная деформация при этом однозначно связана со степенью ориентированности мартенсита, которая одинакова у всех мартенситных элементов. Тогда, согласно Утверждению, напряжения фазового — σ_1 , и структурного — σ_2 , переходов являются эквивалентными с точки зрения степени ориентированности формируемой ими мартенситной структуры, если одинакова фазово-структурная деформация, накапливаемая в двух процессах при этих напряжениях:

$$e_{\text{phst}} = F_1(\sigma_1) = F_2(\sigma_2).$$

При построении феноменологической модели в настоящей работе вводится Гипотеза 1: дальнейшее поведение мартенситного элемента под влиянием внешнего термомеханического воздействия однозначно определяется его текущей степенью ориентированности и не зависит как от механизма ее приобретения (вследствие фазового или структурного превращения), так и от предшествующей истории изменения. В неявном виде эта гипотеза используется также в работах [24, 26]. Из нее следует, что структурное превращение мартенситного элемента, либо образовавшегося в процессе фазового перехода под напряжением σ_1 , либо уже претерпевшего структурное превращение под напряжением σ_2 , начинается при эквивалентном значении напряжения σ_2 , которое служит пределом структурного превращения этого элемента — σ_{st} , то есть напряжением начала переориентации мартенсита при его изотермическом нагружении [26]:

$$\sigma_2 = \sigma_{st} = f(\sigma_1) = F_2^{-1}(F_1(\sigma_1)). \quad (1)$$

Здесь и далее индексом «-1» обозначена обратная функция. Выражение (1) служит описанием экспериментально наблюдаемого эффекта перекрестного упрочнения [26]: предел структурного превращения может быть повышен как в результате фазового (охлаждение под σ_1), так и структурного (нагружение хаотического мартенсита до σ_2) переходов. При этом в обоих случаях последующее структурное превращение происходит одинаково, что подтверждает выполнение Гипотезы 1 для процессов однородного фазового деформирования. При построении феноменологической модели будем полагать, что гипотеза справедлива и для процессов, связанных с неоднородным фазовым деформированием.

Теоретическое представление, лежащее в основе развиваемой в настоящей работе модели, включает три материальные функции F_1 , F_2 и f , две из которых независимы и устанавливаются экспериментально [26, 27]. При моделировании также используется Гипотеза 2: при обратном превращении мартенситные элементы исчезают в порядке, противоположном порядку их возникновения [28]. Гипотеза экспериментально подтверждена в работах [2, 29].

3. Описание феноменологической модели

3.1. Фазовое и структурное превращение

При построении определяющих соотношений введенные в предыдущем разделе понятия позволяют рассматривать мартенситные элементы как последовательно соединенные структурные составляющие модели, а общую фазово-структурную деформацию системы считать суммой их деформаций (см. Рис. 1 и геометрическое представление в [28]). Пусть полностью мартенситному состоянию при завершившемся фазовом переходе соответствует всего n структурных элементов, каждый из которых образовался под действием напряжения σ_1^i (i — номер элемента) при приращении объемной доли мартенсита на $\Delta q = 1/n$.

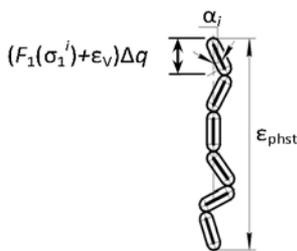


Рис. 1. Структурные элементы феноменологической модели; α_i — угол наклона i -го элемента к оси цепочки, используемый в геометрической интерпретации модели [28]

При этом значение деформации каждого элемента связано с диаграммой прямого превращения согласно формуле $\Delta \epsilon_{\text{phst}} = (F_1(\sigma_1^i) + \epsilon_v)\Delta q$, а его предел структурного превращения определяется функцией f (1): $\sigma_{st}^i = f(\sigma_1^i)$.

Если в процессе дальнейшего нагружения значение σ внешнего напряжения превысит этот предел, то произойдет переориентация элемента, и новая его деформация станет равной $\Delta \varepsilon_{\text{phst}} = (F_2(\sigma) + \varepsilon_v) \Delta q = (F_1(f^{-1}(\sigma)) + \varepsilon_v) \Delta q$, то есть такой же, как если бы она была результатом фазового перехода при напряжении $f^{-1}(\sigma)$ без последующей переориентации. Новый предел структурного превращения элемента после переориентации принимает значение σ . Заметим, что переориентация элемента может происходить неограниченное количество раз и до тех пор, пока его деформация не достигнет максимального значения $(\varepsilon_{\text{phst}}^{\text{max}} + \varepsilon_v) \Delta q$.

Устремляя число элементов n к бесконечности и переходя к интегральной сумме, получим общее выражение для фазово-структурной деформации системы:

$$\varepsilon_{\text{phst}} = \int_0^{q_0} F_1(\sigma_1(q)) dq + q_0 \varepsilon_v, \quad (2)$$

где q_0 — текущая доля мартенситной фазы. Функция $\sigma_1(q)$ называется управляющим напряжением, от нее зависят величина деформации и предел структурного превращения каждого элемента, образовавшегося при доле q мартенситной фазы в материале. Эта функция строится на этапе прямого превращения: когда объемная доля мартенсита получает приращение dq , текущему значению q ставится в соответствие действующее при этом внешнее напряжение, которое и составляет управляющее напряжение $\sigma_1(q)$. Структурное превращение учитывается путем трансформации функции $\sigma_1(q)$. Если значение σ текущего напряжения превышает предел структурного превращения элемента, образовавшегося при доле q мартенситной фазы ($\sigma > \sigma_{\text{st}}(q) = f(\sigma_1(q))$) или, что то же самое, $f^{-1}(\sigma) > \sigma_1(q)$, то новое значение управляющего напряжения для этого элемента становится равным напряжению $f^{-1}(\sigma)$, эквивалентному текущему:

$$\sigma_1'(q) \equiv f^{-1}(\sigma), \quad \text{если } \sigma_1(q) < f^{-1}(\sigma). \quad (3)$$

Штрихом обозначено значение функции σ_1 после переориентации.

Для однозначного определения функции $\sigma_1(q)$ историю деформирования необходимо отслеживать, начиная от полностью аустенитного состояния материала, в котором отсутствует фазово-структурная деформация и доля мартенсита нулевая: $q=0$. При возрастании нагрузки нужно проверять условие структурного превращения (3) и вычислять интеграл (2) с учетом новой функции $\sigma_1(q)$. При обратном превращении с уменьшением q зависимость $\sigma_1(q)$ в выражении (2) «воспроизводится» в обратной последовательности, чем обеспечивается выполнение Гипотезы 2.

Использование функции управляющего напряжения в предлагаемой модели позволяет описать случаи неоднородного фазового деформирования СПФ за счет присвоения каждому мартенситному элементу собственного предела структурного превращения и отслеживания его изменения при переориентации. Учитываемая посредством функции $\sigma_1(q)$ история деформирования не только устанавливает и изменяет пределы структурного превращения элементов, но также влияет на процесс обратного превращения — температуру перехода (см. (7)) и величину восстанавливаемой деформации. Кроме того, определяющее соотношение (2) не предполагает разделения деформации на фазовую и структурную составляющие, а включает их единообразно, поскольку обе они связаны с образованием ориентированного мартенсита.

3.2. Учет знакопеременного нагружения

Известно, что диаграммы деформирования СПФ при растяжении и сжатии несимметричны относительно смены знака нагрузки [30, 31]. Поэтому теория, представленная выше для случая растяжения, справедлива и для сжатия, но со своими материальными функциями F_1 , F_2 и f , которые находятся экспериментально. В настоящей работе используются диаграммы мартенситной неупругости и прямого превращения при сжатии, полученные масштабированием соответствующих диаграмм на растяжение. Коэффициенты масштабирования по напряжению и деформации вычислены в [28] на основании экспериментальных данных из [30]: $k_\sigma = |\sigma^-|/|\sigma^+| = 2$, $k_\varepsilon = |\varepsilon^-|/|\varepsilon^+| = 0,6$. Однако следует отметить, что такой способ является приближенным и не позволяет учесть качественное различие диаграмм.

3.3. Термодинамическое замыкание модели

Зависимость объемной доли мартенсита от температуры, напряжения и фазовой деформации в настоящей работе аппроксимируется тригонометрической функцией [32]:

$$q = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0, \\ (1 - \cos(\pi\xi))/2, & 0 < \xi < 1, \\ 1, & \xi \geq 1; \end{cases}$$

$$\xi = \frac{M_s^* - T}{M_s - M_f}, \quad M_f^* \leq T \leq M_s^*, \quad (A \rightarrow M);$$

$$\xi = 1 + \frac{A_s^* - T}{A_f - A_s}, \quad A_s^* \leq T \leq A_f^*, \quad (M \rightarrow A).$$
(4)

Температуры M_s , M_f , A_s , A_f отвечают началу и окончанию прямого и обратного превращений при отсутствии нагрузки. Символом «*» отмечены границы переходных температурных интервалов с учетом их сдвига в результате действия напряжений. В предположении, что ширина температурных интервалов остается постоянной, величина сдвига равняется сдвигу их средних температур T_c .

В работе [33] представлен вывод уравнения, описывающего зависимость температур фазовых переходов от действующего напряжения и фазовой деформации. При этом в основу закладывается условие постоянства потенциала Гиббса на межфазной границе как зависящего от термодинамических параметров — напряжения и температуры, не терпящих разрыва при фазовом переходе, откуда следует равенство:

$$[S]dT = [\varepsilon_{ph}]d\sigma,$$

где $[S]$ — изменение энтропии в процессе перехода, $[\varepsilon_{ph}]$ — изменение фазовой деформации, положительное для прямого и отрицательное для обратного превращения. Отсюда после интегрирования и ряда преобразований получается обобщенное уравнение Клаузиуса–Клапейрона:

$$T_c = T_{c0} + \frac{T_{c0}}{\rho[q]} \sigma [\varepsilon_{ph}].$$

Здесь: T_{c0} — средняя температура интервала фазового перехода (прямого или обратного) в отсутствие напряжений; σ — действующее при переходе внешнее напряжение; ρ — плотность материала; $[q]$ — теплота, выделяемая (поглощаемая) в процессе перехода. Предполагается, что выделяемая (поглощаемая) теплота не зависит от величины действующего напряжения. Она может быть вычислена как $[q] = T_c[S] = T_{c0}[S_0]$, где $[S_0]$ — изменение энтропии в процессе перехода под действием напряжения. Тогда обобщенное уравнение Клаузиуса–Клапейрона можно представить в виде:

$$T_c = T_{c0} + k\sigma [\varepsilon_{ph}],$$
(5)

где $k = 1/(\rho[S_0])$. Для равноатомного никелида титана, согласно [32], $[S_0] = \pm 62,5$ Дж/(кг·К) (положительное значение для прямого фазового перехода и отрицательное — для обратного), $\rho = 6440$ кг/м³, откуда $k = \pm 2,48 \cdot 10^{-6}$ (К·м³)/Дж.

Из соотношений (4), (5) вытекают термодинамические условия прямого и обратного фазовых превращений. Прямое превращение происходит в случае, когда при охлаждении или возрастании интенсивности нагрузки, во-первых, новое значение температуры T оказывается ниже M_s^* , а во-вторых, доля q , вычисленная по (4), (5) для новых термосиловых условий, превышает величину текущей доли мартенситной фазы q_0 в материале до изменения температуры и нагрузки:

$$\begin{cases} T < M_s^*(\sigma, [\varepsilon_{ph}(\sigma_1)]), \\ q(T, \sigma, [\varepsilon_{ph}(\sigma_1)]) > q_0. \end{cases}$$
(6)

Здесь напряжение σ_1 является управляющим для мартенситных элементов, которые могут образоваться в текущих термосиловых условиях. При прямом превращении оно определяется текущим напряжением σ . Деформация фазового перехода равняется деформации полного прямого превращения при действии постоянного напряжения σ_1 и составляет: $[\varepsilon_{ph}(\sigma_1)] = F_1(\sigma_1) + \varepsilon_v$ (см. (2)).

Условия обратного фазового перехода строятся по аналогии. Этот переход протекает при нагреве или снижении интенсивности нагрузки в условиях, когда текущая температура превышает A_s^* , а вычисленное значение q оказывается меньше q_0 :

$$\begin{cases} T > A_s^*(\sigma, [\varepsilon_{ph}(\sigma_1)]), \\ q(T, \sigma, [\varepsilon_{ph}(\sigma_1)]) < q_0. \end{cases} \quad (7)$$

Согласно Гипотезе 2, обратное превращение начинается с мартенситного элемента, образовавшегося последним, то есть соответствующего текущей доле мартенсита q_0 . Поэтому термодинамическое условие (7) должно рассматриваться применительно к этому элементу при $\sigma_1 = \sigma_1(q_0)$.

Помимо смещения температурных интервалов переходов, обсуждаемый термодинамический подход в сочетании с развиваемой феноменологической моделью позволяет описать прямое и обратные фазовые превращения при изотермическом изменении нагрузки, реализация которых зависит от температуры деформирования [34]. Наряду с (4)–(7), термодинамическое замыкание модели включает уравнение энергетического баланса, с помощью которого определяется эволюция температурного поля в материале. Вариант этого соотношения приводится в разделе 5 (см. (15)).

4. Сопоставление предложенной модели с «родственными» моделями

Предложенная в разделе 3 модель является обобщением двух известных феноменологических моделей для сплавов и полимеров с памятью формы, краткая характеристика которых приводится далее.

4.1. Феноменологическая модель для сплавов с памятью формы

Феноменологическая модель для фазовых и структурных превращений в СПФ, представленная в работах [24, 25], также основывается на взаимосвязи диаграмм F_1 и F_2 прямого превращения и мартенситной неупругости. Дифференциальные соотношения модели для одноосного случая имеют вид:

$$d\varepsilon_{phst} = d\varepsilon_{ph} + d\varepsilon_{st}, \quad (8)$$

$$d\varepsilon_{ph} = [(1 - q\xi(q))(\varepsilon_v + F_1(\sigma)) + \xi(q)\varepsilon_{phst}]dq, \quad dq > 0, \quad (9)$$

$$d\varepsilon_{ph} = \frac{\varepsilon_{phst}}{q}dq, \quad dq < 0, \quad (10)$$

$$d\varepsilon_{st} = q_{st}F_2'(\sigma)d\sigma, \quad d\sigma > 0, \quad \text{иначе} \quad d\varepsilon_{st} = 0. \quad (11)$$

Штрихом обозначена производная по напряжению; $\xi(q)$ — материальная функция взаимосвязи процессов зарождения и развития мартенситных элементов при прямом фазовом переходе, описывающая эффект ориентированного превращения. При $\xi(q) = 0$ соотношение (9) совпадает с выражением (2), поэтому (2) для фазовой деформации прямого превращения может считаться интегральным аналогом дифференциальной модели (8)–(11). В (10) для обратного фазового перехода входит только полная фазово-структурная деформация системы, в отличие от интеграла (2), «воспроизводящего» при обратном превращении историю деформирования материала посредством функции $\sigma_1(q)$. Поэтому модель (8)–(11) в такой постановке не способна отобразить, в частности, эффект реверсивной памяти формы, хотя более поздние работы (например, [35]), развивающие данную модель, лишены этого недостатка. Соотношения (8)–(11) также существенно отличаются от (2) способом учета структурной составляющей деформации: в (8) она отделяется от фазовой, и для ее вычисления в (11) вводится доля претерпевающей структурное превращение мартенситной фазы q_{st} , алгоритм определения которой изложен в [24]. Однако, несмотря на алгоритмические различия, два подхода к введению структурной деформации в модель дают тождественные результаты как основанные на одинаковых теоретических предположениях — взаимосвязи диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости.

Проведем сопоставление двух моделей на решении задачи охлаждения стержня из СПФ под действием немонотонно меняющегося напряжения с последующим нагревом без нагрузки, постановка которой аналогична приведенной в [24]. Напряжение при охлаждении меняется с увеличением доли q мартенситной фазы по кусочно-линейному закону, как показано на рисунке 2а. При этом на участке возрастания напряжения (этап II) наблюдается переориентация тех образовавшихся ранее мартенситных элементов, для которых текущее значение нагрузки превышает предел структурного превращения σ_{st} . При решении задачи диаграммы прямого превращения и мартенситной неупругости считаются совпадающими: $F_1 = F_2$, поэтому материальная функция f имеет вид:

$$f(\sigma) = \sigma. \quad (12)$$

В качестве функции F_1 возьмем экспоненциальную зависимость [24]:

$$F_1(\sigma_1) = (1 - \exp(-\sigma_1 / \sigma_0)) \cdot e_{phst}^{max}, \quad (13)$$

где σ_0 и e_{phst}^{max} — константы материала. Рассматривается случай, когда максимальное напряжение цикла составляет $\sigma_{max} = 3\sigma_0$.

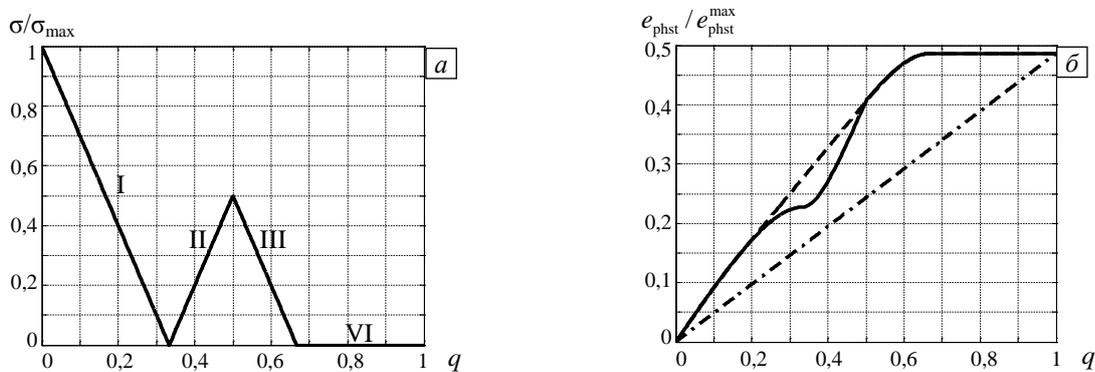


Рис. 2. Зависимости от доли мартенситной фазы в материале относительного напряжения (а) и относительной фазово-структурной деформации (б); на фрагменте (б) сплошная линия – прямое превращение; штриховая линия – обратное превращение согласно уравнениям (2), (3); штрихпунктирная линия – обратное превращение согласно уравнениям (8)–(11)

Решение задачи, представленное на рисунке 2б (относительная деформация e_{phst}/e_{phst}^{max}), получено без учета эффекта ориентированного превращения ($\xi(q) = 0$) двумя способами: согласно уравнениям (2), (3) и (8)–(11). Для прямого превращения (сплошная линия) результат получился одинаковый. Кривая деформации при последующем нагреве без нагрузки (штриховая линия), рассчитанная по формуле (2), воспроизводит ее эволюцию в процессе прямого превращения, но без вогнутого участка, поскольку соответствующие ему мартенситные элементы подверглись структурному деформированию на этапе II (Рис. 2а). Соотношение (10), не учитывающее историю деформирования, прогнозирует линейный возврат деформации при обратном фазовом переходе (штрихпунктирная линия).

4.2. Феноменологическая модель для полимеров с памятью формы

Эффект памяти формы в металлических сплавах и полимерах обусловлен различными физическими процессами: у металлов — образованием ориентированного мартенсита в результате фазового и структурных переходов и последующим его исчезновением при нагреве или разгрузке, у полимеров — ограничением сегментарной подвижности макромолекул при охлаждении и ее возвращением при нагреве. Однако на макроскопическом уровне эффект памяти формы в этих материалах проявляется во многом похожим образом, поэтому представляются возможными аналогичные подходы при построении феноменологических моделей для этих материалов.

Фазовый переход в СПФ в результате охлаждения под нагрузкой приводит к возрастанию фазовой деформации в сочетании с незначительным изменением жесткости системы (модули упругости мартенсита и аустенита соизмеримы, в частности для никелида титана их отношение лежит в пределах от 1:3 до 1:2 [32, 36]). В аморфных полимерах, напротив, охлаждение под постоянной нагрузкой не вызывает заметного отклика деформированного состояния, за исключением деформации температурного сжатия, однако

способствует существенному увеличению жесткости системы: модули упругости высокотемпературного E_r (rubbery) и низкотемпературного E_g (glassy) состояний полимера различаются на несколько порядков [37]. В связи с этим при построении феноменологической модели для СПФ целесообразно ввести в рассмотрение цепочку последовательно соединенных структурных элементов (Рис. 1), что предполагает суммирование деформаций отдельных элементов, а для полимеров использовать параллельное соединение структурных элементов (Рис. 3), обеспечивающее суммирование жесткостей при постоянстве деформации. Первый подход реализован в настоящей работе, второй в [37] — при построении смесевой феноменологической модели для стеклующихся полимеров.

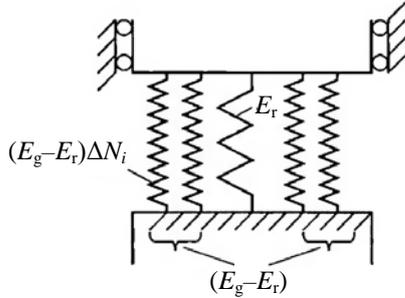


Рис. 3. Феноменологическая модель из [37] – ряд последовательно соединенных структурных элементов – пружин

В геометрическом представлении модели фазово-структурной деформации СПФ (см. Рис. 1 и соответствующее ему определяющее соотношение (2)) каждый мартенситный элемент, образующийся в результате прямого фазового перехода и согласующийся с приращением объемной доли мартенсита на величину Δq , обладает степенью ориентированности, выражающейся через угол наклона α_i этого элемента к продольной оси цепочки. Чем выше степень ориентированности и меньше угол α_i , тем больше длина цепочки, определяющая величину фазово-структурной деформации. В (2) степень ориентированности элемента однозначно зависит от управляющего напряжения σ_1 , величина которого

«запоминается» на этапе прямого превращения для каждого элемента в виде функции $\sigma_1(q)$ и трансформируется при его переориентации в процессе структурного перехода.

В полимерах в качестве показателя завершенности процесса уменьшения сегментарной подвижности макромолекул используется параметр N , называемый степенью стеклования и изменяющийся в пределах от 0 до 1, аналогично параметру объемной доли мартенсита q для СПФ. В геометрической интерпретации модели [37] в «упругом» приближении процесс нарастания жесткости полимера при охлаждении и ее уменьшение при нагреве имитируется последовательно соединенными структурными элементами — пружинами. В высокотемпературном состоянии присутствует только одна пружина, жесткость которой соответствует упругому модулю E_r , а деформация равна текущей деформации системы $\bar{\epsilon}$ (чертой обозначена полная деформация системы за вычетом температурной составляющей: $\bar{\epsilon} = \epsilon - \epsilon_T$). Дальнейшее охлаждение вызывает увеличение степени стеклования N и появление дополнительных пружин, каждая из которых согласуется с приращением степени стеклования на величину ΔN и обладает жесткостью $(E_g - E_r)\Delta N$. Пружины в момент своего возникновения не деформированы и имеют исходную длину $\bar{\epsilon}_1$, соответствующую текущей деформации. Если в процессе последующего деформирования текущая деформация системы $\bar{\epsilon}$ становится отличной от первоначальной длины элемента $\bar{\epsilon}_1$, то удлинение элемента вызывает упругий отклик $\Delta\sigma = (E_g - E_r)\Delta N \cdot (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_1)$. Суммирование упругих откликов всех элементов и переход к интегральному виду дают определяющее соотношение модели [37], которое для одноосного случая имеет вид:

$$\sigma = E_r \bar{\epsilon} + (E_g - E_r) \int_0^{N_0} [\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_1(N)] dN . \tag{14}$$

Здесь N_0 — текущее значение степени стеклования. Функция $\bar{\epsilon}_1(N)$ содержит значения первоначальных длин элементов во всем диапазоне изменения параметра N . Аналогично функции управляющего напряжения $\sigma_1(q)$ в выражении (2), функция $\bar{\epsilon}_1(N)$ строится на этапе возрастания N в процессе охлаждения и «воспроизводится» в обратной последовательности с убыванием N при последующем нагреве (здесь также реализуется Гипотеза 2). При этом, как и в (2), история деформирования должна отсчитываться от высокотемпературного состояния материала, в котором $N = 0$.

Соотношения для материалов с памятью формы (сплавов (2) и полимеров (14)), полученные на феноменологическом уровне на основании анализа происходящих в этих материалах физических процессов, позволяют качественно правильно описать переходные явления. Наряду со сравнительной простотой и небольшим числом материальных констант, определяемых из стандартных макромеханических испытаний, эти модели достаточно полно отображают спектр термомеханических явлений, наблюдаемых в сплавах и полимерах с памятью формы, включая воспроизведение истории

деформирования на этапе нагрева: эффект реверсивной памяти формы в СПФ [2, 3, 28] и образование «горбов» с различным знаком на термомеханической диаграмме нагрева полимеров [38].

5. Модельная задача совместного деформирования пакета стержней

Рассматривается совместное деформирование пакета стержней при охлаждении и нагреве в неоднородном температурном поле под действием внешнего усилия. Расчетная схема приведена на рисунке 4. В аналогичной постановке задача для полимеров с памятью формы решена в [37], здесь она представляется для СПФ. Стержни, имеющие одинаковую начальную длину L , расположены в пакете друг над другом горизонтально и без зазоров, так что в однородном фазовом состоянии предполагается однородность температурных свойств по высоте пакета H , однако трение между стержнями отсутствует. Левые концы стержней жестко зашпелены, правые шарнирно присоединены к жесткой оправке, которая относительно оси, проходящей через ее центр, может горизонтально перемещаться и поворачиваться на угол φ в плоскости чертежа. На оправку в направлении, перпендикулярном оси x , действует сила P , постоянная на этапах охлаждения и нагрева. При этом в процессе деформирования каждый стержень испытывает одноосное растяжение или сжатие. Изначально пакет находится в аустенитном состоянии при однородной температуре $T_1 > M_s$. Изменение температурного поля происходит за счет теплообмена с окружающей средой через грань верхнего стержня, на которой задаются граничные условия III рода. Остальные поверхности теплоизолированы.

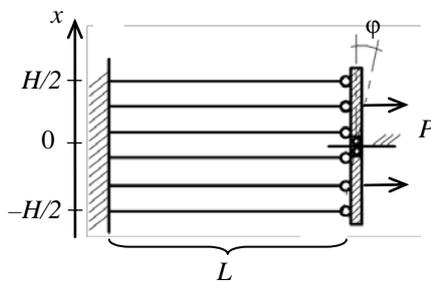


Рис. 4. Расчетная схема

Сначала производится охлаждение пакета до перехода всех стержней в полностью мартенситное состояние, для чего температура окружающей среды задается равной $T_2 < M_f$. В результате фазового превращения в неоднородном поле температур в пакете накапливаются фазово-структурные деформации и остаточные напряжения, распределение которых также неоднородно по высоте пакета. Затем, после установления в стержнях одинаковой температуры $T_3 < A_s$ (в целях экономии вычислительных ресурсов процесс нагрева стержней до T_3 при решении задачи не рассматривается, так как он не сопровождается фазовыми превращениями и, следовательно, не влечет за собой изменение НДС системы), пакет с остаточными напряжениями и деформациями подвергается обратному фазовому превращению при нагреве за счет задания температуры окружающей среды, равной $T_4 > A_f$. Считается, что в процессе охлаждения/нагрева температура одинакова внутри каждого стержня, но дискретна по высоте пакета, при этом фазовые переходы в стержнях осуществляются постепенно в интервалах температур фазовых превращений. Выделяемая/поглощаемая при переходах теплота также оказывает влияние на эволюцию температурного поля. Неоднородность поля температур приводит к неравномерному распределению фазовой деформации по высоте пакета, что, в свою очередь, вызывает перераспределение усилий в стержнях и может вызвать структурное деформирование образовавшегося ранее мартенсита.

Математическую постановку задачи можно разделить на температурную и механическую части, связанные через параметр q . Температурная задача включает уравнение энергетического баланса

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{w(x, T)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sigma(x, t) \frac{\partial \varepsilon_{\text{phst}}(x, t)}{\partial t}, \quad (15)$$

обоснование которого для трехмерного случая осуществлено в [39]. Уравнение (15) учитывает диссипацию энергии, связанную с фазовым и структурным деформированием при изменяющейся температуре, а также выделение (поглощение) теплоты в процессе фазовых переходов: $w(x, T) = Q_0 \partial q / \partial t$, где $Q_0 = \pm \rho T_{c0} \cdot [S_0]$ («+» для прямого превращения, «-» для обратного, см. раздел 3.3, пояснение к соотношению (5)), t — время, x — вертикальная координата с началом отсчета в середине пакета, $a = \lambda / (c\rho)$ — коэффициент температуропроводности, c — удельная теплоемкость, одинаковая для обеих фаз, $\sigma(x, t)$ — текущее напряжение в стержнях. Теплопроводность λ зависит от фазового состава по правилу смеси: $\lambda = q\lambda_M + (1-q)\lambda_A$, индексами M и A обозначены мартенситная и аустенитная фазы. Граничные условия температурной задачи соответствуют теплоизоляции нижней грани и возможности конвективного теплообмена через верхнюю грань пакета:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=-H/2} = 0, \quad \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=H/2} = -h(T(x,t) - T_{cp}). \quad (16)$$

Здесь: T_{cp} — температура среды; H — высота пакета; h — коэффициент теплоотдачи.

Постановка механической задачи содержит определяющие соотношения, в которых применяется суммирование упругой и фазово-структурной составляющих деформации: $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{phst}$; для вычисления последней используются выражения (2), (3). Упругая деформация находится по правилу смеси: $\varepsilon_e(x,t) = q \frac{\sigma(x,t)}{E_M} + (1-q) \frac{\sigma(x,t)}{E_A}$, где E_M , E_A — модули упругости в мартенситном и аустенитном состояниях. Температурная деформация за малостью вклада во внимание не принимается. С учетом возможности поворота жесткой оправки на угол φ условие совместности деформаций стержней имеет вид:

$$\frac{\partial l(x,t)}{\partial x} = L \frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial x} = \varphi(t), \quad (17)$$

где l — текущая длина стержня, а граничные условия соответствуют нагрузке на торце пакета — силе P , и отсутствию изгибающего момента:

$$b \int_{-H/2}^{H/2} \sigma(x) dx = P, \quad b \int_{-H/2}^{H/2} x \cdot \sigma(x) dx = 0, \quad (18)$$

b — ширина стержней. Помимо выражений (2), (3) и (15)–(18), математическая постановка задачи включает соотношения (4), (5) для определения доли мартенситной фазы и вытекающие из них условия (6), (7) прямого и обратного фазовых превращений. При решении также использованы материальные функции (12), (13).

Задача решалась методом конечных разностей с шагом по времени 10 с. Исследована численная (практическая) сходимость решения. Пакет высотой 1 м включал 100 стержней, имевших единичную длину и единичную суммарную площадь поперечных сечений. Параметры расчета приведены в таблице. Материальные характеристики в расчете соответствовали равноатомному никелиду титана. Константы в (13) получались путем аппроксимации диаграммы прямого превращения этого материала и составляли: $\sigma_0 = 150$ МПа, $e_{phst}^{max} = 4,7\%$. Выполнено три варианта расчетов: I — имела место только фазовая деформация без возможности структурного превращения; II — рассматривалась фазово-структурная деформация; III — к условиям варианта II добавлялся учет асимметрии растяжения и сжатия (см. раздел 3.2).

Таблица. Константы материала и параметры расчета

Параметр	Значение	Источник
Усилие	$P = 20$ МН	
Температуры	$T_1 = 340$ К, $T_2 = 260$ К, $T_3 = 300$ К, $T_4 = 380$ К	
Коэффициент теплоотдачи	$h = 30$ Вт/(м ² ·К)	
Модули упругости	$E_M = 33$ ГПа, $E_A = 62$ ГПа	[36]
Температуры переходов	$M_s = 313$ К, $M_f = 293$ К, $A_s = 323$ К, $A_f = 343$ К	[32]
Теплопроводности	$\lambda_M = 8,6$ Вт/(м·К), $\lambda_A = 18$ Вт/(м·К)	[40]
Удельная теплоемкость	$c = 500$ Дж/(кг·К)	[32]

Рисунок 5а демонстрирует распределение неоднородных по высоте пакета остаточных напряжений после охлаждения. На рисунке 5б приведена эволюция фазово-структурной деформации в крайних стержнях пакета при охлаждении и нагреве. Рост этой деформации в нижнем стержне (при $x = -H/2$) на начальном этапе нагрева для вариантов расчета II, III объясняется процессами структурного превращения. На рисунке 5в представлено поведение угла поворота жесткой оправки при охлаждении и нагреве, которое вследствие перераспределения напряжений и изменения фазово-структурных деформаций стержней имеет немонотонный характер. Как показывают рисунки 5б, в, в результате обратного фазового превращения в процессе нагрева восстанавливается исходное — недеформированное — состояние системы.

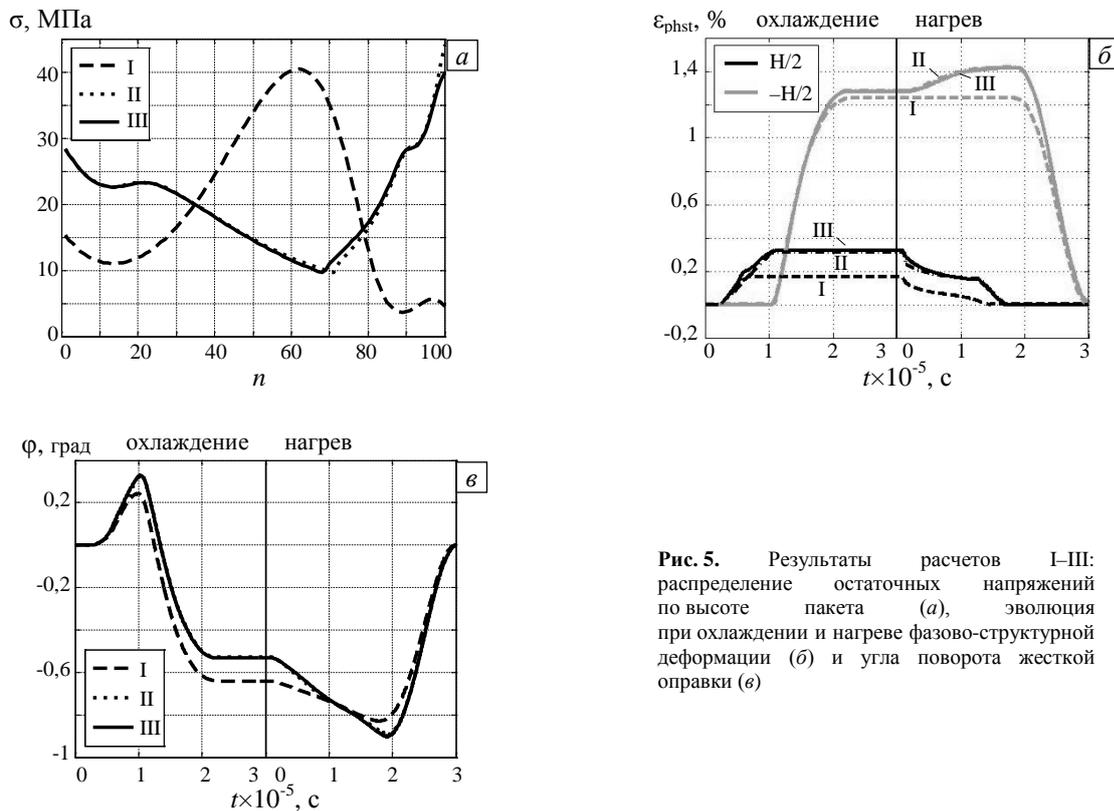


Рис. 5. Результаты расчетов I–III: распределение остаточных напряжений по высоте пакета (а), эволюция при охлаждении и нагреве фазово-структурной деформации (б) и угла поворота жесткой оправки (в)

Представленные на рисунке 5 результаты расчетов показывают, что решение I без структурной деформации существенно отличается от решений II, III как качественно, так и количественно, что свидетельствует о необходимости учета структурного превращения при моделировании. Добавление асимметрии растяжения и сжатия (вариант III) на решение влияет незначительно, что объясняется использованным режимом нагружения: сжимающие напряжения, сопоставимые по величине с максимальными растягивающими, развиваются в части стержней пакета лишь в аустенитном состоянии, тогда как фазовые превращения происходят в основном под действием растягивающих напряжений.

Стержни в рассмотренной конструкции, как и большинство конструктивных элементов из СПФ в процессе эксплуатации, подвергаются охлаждению и нагреву через диапазон температур фазовых превращений при изменяющихся по величине и знаку напряжениях. При этом возникает ряд эффектов, оказывающих существенное влияние на НДС конструкции: сдвиг характерных температур превращения от действия напряжения; изотермические прямой и обратный фазовые переходы при возрастании и уменьшении нагрузки; структурное превращение части мартенсита. Кроме того, проявляется зависимость деформации обратного фазового превращения от истории деформирования, обусловленная неоднородным фазовым деформированием. Поэтому при проведении расчета необходимо включить в рассмотрение все перечисленные факторы, что способна делать предложенная в работе модель.

6. Заключение

Разработана одномерная феноменологическая модель деформирования сплавов с памятью формы, единообразно представляющая фазовую и структурную деформации. Модель описывает эффект памяти формы, перекрестное упрочнение, а также явления, связанные с изотермическим изменением нагрузки: мартенситную неупругость и сверхупругость. Учет истории нагружения позволяет представлять процессы

неоднородного фазового деформирования СПФ. В работе проведено сопоставление обсуждаемой феноменологической модели с двумя известными моделями, послужившими ее прообразами. С использованием предложенной модели решена задача определения НДС совместно деформируемого пакета стержней из СПФ. Демонстрируется эволюция характеристик напряжений и деформаций системы при одновременном протекании фазовых и структурных превращений, вызванных внешним термосиловым воздействием.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-31-00161-мол_а).

Литература

1. *Беляев С.П., Волков А.Е., Ермолаев В.А., Каменцева З.П., Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Мозгунов В.Ф., Разов А.И., Хайров Р.Ю.* Материалы с эффектом памяти формы: Справочное издание / Под ред. В.А. Лихачева. – Т. 2 – СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ, 1998. – 374 с.
2. *Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Тоштулатов Ч.Х.* Эффект реверсивной памяти формы при знакопеременном деформировании // *Физ. Мет. Metalloved.* – 1986. – Т. 61, № 1-3. – С. 79-85.
3. *Беляев С.П., Ермолаев В.А., Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Чунарева Е.Н.* Эффект реверсивной обратимой памяти формы в сплавах на основе никелида титана // *Физ. Мет. Metalloved.* – 1988. – Т. 66, вып. 5. – С. 926-934.
4. *Бречко Т.* Эффект памяти формы и остаточные напряжения // *Ж. тех. физ.* – 1996. – Т. 66, № 11. – С. 72-78.
5. *Волков А.Е.* Микроструктурное моделирование деформации сплавов при повторяющихся мартенситных превращениях // *Изв. Акад. Наук, Сер. Физ.* – 2002. – Т. 66, № 9. – С. 1290-1297.
6. *Волков А.Е., Евард М.Е., Курзенева Л.Н., Лихачев В.А., Сахаров В.Ю., Ушаков В.В.* Математическое моделирование мартенситной неупругости и эффектов памяти формы // *Ж. тех. физ.* – 1996. – Т. 66, № 11. – С. 3-35.
7. *Лихачев В.А., Малинин В.Г.* Структурно-аналитическая теория прочности. – СПб.: Наука, 1993. – 470 с.
8. *Мовчан А.А., Мовчан И.А.* Одномерная микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при прямом и обратном термоупругих превращениях // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2007. – Т. 13, № 3 – С. 297-322.
9. *Huang M., Gao X., Brinson L.C.* A multivariant micromechanical model for SMAs Part 2. Polycrystal model // *Int. J. Plast.* – 2000. – Vol. 16, no. 10. – P. 1371-1390. [DOI](#)
10. *Manchiraju S., Anderson P. M.* Coupling between martensitic phase transformations and plasticity: a microstructure-based finite element model // *Int. J. Plast.* – 2010. – Vol. 26, no. 10. – P. 1508-1526. [DOI](#)
11. *Patoor E., Lagoudas D.C., Entchev P.B., Brinson L.X., Gao X.* Shape memory alloys, Part I: General properties and modeling of single crystals // *Mech. Mater.* – 2006. – Vol. 38, no. 5. – P. 391-429. [DOI](#)
12. *Thamburaja P., Pan H., Chau F.S.* The evolution of microstructure during twinning: Constitutive equations, finite-element simulations and experimental verification // *Int. J. Plast.* – 2009. – Vol. 25, no. 11. – P. 2141-2168. [DOI](#)
13. *Wang X.M., Xu B.X., Yue Z.F.* Micromechanical modelling of the effect of plastic deformation on the mechanical behaviour in pseudoelastic shape memory alloys // *Int. J. Plast.* – 2008. – Vol. 24, no. 8. – P. 1307-1332. [DOI](#)
14. *Yu C., Kang G., Kan Q.* Crystal plasticity based constitutive model of NiTi shape memory alloy considering different mechanisms of inelastic deformation // *Int. J. Plast.* – 2014. – Vol. 54. – P. 132-162. [DOI](#)
15. *Arghavani J., Auricchio F., Naghdabadi R., Reali A.* An improved, fully symmetric, finite-strain phenomenological constitutive model for shape memory alloys // *Finite Elements in Analysis and Design.* – 2011. – Vol. 47. – P. 166-174. [DOI](#)
16. *Lagoudas D., Hartl D., Chemisky Y., Machado L., Popov P.* Constitutive model for the numerical analysis of phase transformation in polycrystalline shape memory alloys // *Int. J. Plast.* – 2012. – Vol. 32-33. – P. 155-183. [DOI](#)
17. *Mehrabi R., Andani M.T., Elahinia M., Kadkhodaei M.* Anisotropic behavior of superelastic NiTi shape memory alloys; an experimental investigation and constitutive modeling // *Mech. Mater.* – 2014. – Vol. 77. – P. 110-124. [DOI](#)
18. *Müller C., Bruhns O.T.* A thermodynamic finite-strain model for pseudoelastic shape memory alloys // *Int. J. Plast.* – 2006. – Vol. 22, no. 9. – P. 1658-1682. [DOI](#)
19. *Zaki W.* An efficient implementation for a model of martensite reorientation in martensitic shape memory alloys under multiaxial nonproportional loading // *Int. J. Plast.* – 2012. – Vol. 37. – P. 72-94. [DOI](#)
20. *Мишустин И.В., Мовчан А.А.* Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы // *Изв. РАН. МТТ.* – 2015, № 2. – С. 78-95. (English version [DOI](#))
21. *Auricchio F., Bonetti E., Scalet G., Ubertini F.* Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multiple phase transformations and martensite reorientation // *Int. J. Plast.* – 2014. – Vol. 59. – P. 30-54. [DOI](#)

22. *Chemisky Y., Duval A., Patoor E., Ben Zineb T.* Constitutive model for shape memory alloys including phase transformation, martensitic reorientation and twins accommodation // *Mech. Mater.* – 2011. – Vol. 43, no. 7. – P. 361-376. [DOI](#)
23. *Panico M., Brinson L.C.* A three-dimensional phenomenological model for martensite reorientation in shape memory alloys // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* – 2007. – Vol. 55, no. 11. – P. 2491-2511. [DOI](#)
24. *Мишустин И.В., Мовчан А.А.* Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // *Изв. РАН. МТТ.* – 2014, № 1. – С. 37-53. (English version [DOI](#))
25. *Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г.* Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // *Изв. РАН. МТТ.* – 2010, № 3. – С. 118-130. (English version [DOI](#))
26. *Мовчан А.А., Сильченко А.Л., Казарина С.А.* Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование эффекта перекрестного упрочнения сплавов с памятью формы // *Деформация и разрушение материалов.* – 2017, № 3. – С. 20-27.
27. *Wu X.D., Sun G.J., Wu J.S.* The nonlinear relationship between transformation strain and applied stress for nitinol // *Mater. Lett.* – 2003. – Vol. 57. – P. 1334-1338. [DOI](#)
28. *Тихомирова К.А.* Разработка и численная реализация одномерной феноменологической модели фазовой деформации в сплавах с памятью формы // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2016. – Т. 9, № 2. – С. 192-206. (English version [DOI](#))
29. *Вейман С.М.* Деформация, механизм явления и другие характеристики сплавов с эффектом запоминания формы // *Эффект памяти формы в сплавах / Под ред. В.А. Займовского.* – М.: Металлургия, 1979. – С. 9-35. (English version [DOI](#))
30. *Elibol C., Wagner M.F.-X.* Investigation of the stress-induced martensitic transformation in pseudoelastic NiTi under uniaxial tension, compression and compression–shear // *Mater. Sci. Eng., A.* – 2015. – Vol. 621. – P. 76-81. [DOI](#)
31. *Yoo Y.-I., Kim Y.-J., Shin D.-K., Lee J.-J.* Development of martensite transformation kinetics of NiTi shape memory alloys under compression // *International Journal of Solids and Structures.* – 2015. – Vol. 64. – P. 51-61. [DOI](#)
32. *Мовчан А.А., Чжо Т.Я.* Решение связанной термоэлектромеханической задачи для стержня из сплава с памятью формы в рамках теории нелинейного деформирования этих материалов // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2008. – Т. 14, № 3. – С. 443-460.
33. *Rogovoy A.A., Stolbova O.S.* Modeling the magnetic field control of phase transition in ferromagnetic shape memory alloys // *Int. J. Plast.* – 2016. – Vol. 85. – P. 130-155. [DOI](#)
34. *Тихомирова К.А.* Изотермическое деформирование сплава с памятью формы в разных температурных интервалах. Случай одноосного растяжения // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2017. – Т. 23, № 2. – С. 263-282.
35. *Mishustin I.V., Movchan A.A.* The microstructural model of mechanical behavior of a shape-memory alloy // *Nanomechanics science and technology: An International Journal.* – 2016. – Vol. 7, no. 1. P. 77-91. [DOI](#)
36. *Андронов И.Н., Боданов Н.П., Северова Н.А., Тарсин А.В.* Метод количественного описания зависимости модуля Юнга никелида титана от температуры // *Известия Коми научного центра УрО РАН.* – 2013, № 3. – С. 87-90.
37. *Матвеев В.П., Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Термомеханика полимерных материалов в условиях релаксационного перехода – М.: Физматлит, 2009. – 174 с.
38. *Турусов Р.А.* Механические явления в полимерах и композитах (в процессах формования) / Дисс. докт. физ.-мат. наук. – М., 1983.
39. *Мовчан А.А., Казарина С.А.* Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач // *Физ. Мезомех.* – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 105-116.
40. *Auricchio F., Petrini L.* A three-dimensional model describing stress-temperature induced solid phase transformations: thermomechanical coupling and hybrid composite applications // *Int. J. Numer. Methods Engineering.* – 2004. – Vol. 61, no. 5. – P. 716-737. [DOI](#)

References

1. *Beliaev S.P., Volkov A.E., Ermolaev V.A., Kamentseva Z.P., Kuz'min S.L., Likhachev V.A., Mozgunov V.F., Razov A.I., Khairov R.Iu.* *Materialy s efektom pamjati formy* [Materials with shape memory effect]. *Spravochnoe izdanie. Pod redaktsiei Likhacheva V.A.* Saint Petersburg, Izdatel'stvo NIKh SPbGU, 1998, vol. 2. 374 p.
2. *Kuz'min S.L., Lihachev V.A., Toshpulatov Ch.X.* *Jeffect reversivnoj pamjati formy pri znakeremennom deformirovanii* [Effect of two-way shape memory under alternating-sign deformation]. *Fiz. Met. Metalloved. – Phys. Met. Metallogr.*, 1986, vol. 61, no. 1-3, pp. 79-85.

3. Beljaev S.P., Ermolaev V.A., Kuz'min S.L., Lihachev V.A., Chunareva E.N. Jeffekt reversivnoj obratimoi pamjati formy v splavah na osnove nikelida titana [Effect of two-way reversible shape memory in NiTi-based alloys]. *Fiz. Met. Metalloved. – Phys. Met. Metallogr.*, 1988, vol. 66, ed. 5, pp. 926-934.
4. Brechko T. Jeffekt pamjati formy i ostatochnye naprjazhenija [Shape memory effect and residual stresses]. *Zh. Tekh. Fiz. – Tech. Phys.*, 1996, vol. 66, no. 11, pp. 72-78.
5. Volkov A.E. Mikrostrukturnoe modelirovanie deformacii splavov pri povtorjajushhihsja martensitnyh prevrashhenijah [Microstructural modeling of the alloy deformation under repeated martensitic transformations]. *Izv. Akad. Nauk, Ser. Fiz. – Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys.*, 2002, vol. 66, no. 9, pp. 1290-1297.
6. Volkov A.E., Evard M.E., Kurzeneva L.N., Lihachev V.A., Saharov V.Ju., Ushakov V.V. Matematicheskoe modelirovanie martensitnoj neuprugosti i jeffektov pamjati formy [Mathematical modeling of martensitic inelasticity and the shape memory effect]. *Zh. Tekh. Fiz. – Tech. Phys.*, 1996, vol. 66, no. 11, pp. 3-35.
7. Lihachev V.A., Malinin V.G. *Strukturno-analiticheskaja teorija prochnosti* [Structural-analytical theory of strength]. Saint Petersburg, Nauka, 1993. 470 p.
8. Movchan A.A., Movchan I.A. Odnomernaja mikromehanicheskaja model' nelinejnogo deformirovanija splavov s pamjat'ju formy pri prjamom i obratnom termouprugih prevrashhenijah [One-dimensional micromechanical model for nonlinear deformation of shape memory alloys under forward and inverse thermoelastic transformations]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktii – Composite Mechanics and Design*, 2007, vol. 13, no. 3, pp. 297-322.
9. Huang M., Gao X., Brinson L.C. A multivariant micromechanical model for SMAs Part 2. Polycrystal model. *Int. J. Plast.*, 2000, vol. 16, no. 10, pp. 1371-1390. [DOI](#)
10. Manchiraju S., Anderson P. M. Coupling between martensitic phase transformations and plasticity: a microstructure-based finite element model. *Int. J. Plast.*, 2010, vol. 26, no. 10, pp. 1508-1526. [DOI](#)
11. Patoor E., Lagoudas D.C., Entchev P.B., Brinson L.X., Gao X. Shape memory alloys, Part I: General properties and modeling of single crystals. *Mech. Mater.*, 2006, vol. 38, no. 5, pp. 391-429. [DOI](#)
12. Thamburaja P., Pan H., Chau F.S. The evolution of microstructure during twinning: Constitutive equations, finite-element simulations and experimental verification. *Int. J. Plast.*, 2009, vol. 25, no. 11, pp. 2141-2168. [DOI](#)
13. Wang X.M., Xu B.X., Yue Z.F. Micromechanical modelling of the effect of plastic deformation on the mechanical behaviour in pseudoelastic shape memory alloys. *Int. J. Plast.*, 2008, vol. 24, no. 8, pp. 1307-1332. [DOI](#)
14. Yu C., Kang G., Kan Q. Crystal plasticity based constitutive model of NiTi shape memory alloy considering different mechanisms of inelastic deformation. *Int. J. Plast.*, 2014, vol. 54, pp. 132-162. [DOI](#)
15. Arghavani J., Auricchio F., Naghdabadi R., Reali A. An improved, fully symmetric, finite-strain phenomenological constitutive model for shape memory alloys. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2011, vol. 47, pp. 166-174. [DOI](#)
16. Lagoudas D., Hartl D., Chemisky Y., Machado L., Popov P. Constitutive model for the numerical analysis of phase transformation in polycrystalline shape memory alloys. *Int. J. Plast.*, 2012, vol. 32-33, pp. 155-183. [DOI](#)
17. Mehrabi R., Andani M.T., Elahinia M., Kadkhodaei M. Anisotropic behavior of superelastic NiTi shape memory alloys; an experimental investigation and constitutive modeling. *Mech. Mater.*, 2014, vol. 77, pp. 110-124. [DOI](#)
18. Müller C., Bruhns O.T. A thermodynamic finite-strain model for pseudoelastic shape memory alloys. *Int. J. Plast.*, 2006, vol. 22, no. 9, pp. 1658-1682. [DOI](#)
19. Zaki W. An efficient implementation for a model of martensite reorientation in martensitic shape memory alloys under multiaxial nonproportional loading. *Int. J. Plast.*, 2012, vol. 37, pp. 72-94. [DOI](#)
20. Mishustin I.V., Movchan A.A. Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys. *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 72-94. [DOI](#)
21. Auricchio F., Bonetti E., Scalet G., Ubertini F. Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multiple phase transformations and martensite reorientation. *Int. J. Plast.*, 2014, vol. 59, pp. 30-54. [DOI](#)
22. Chemisky Y., Duval A., Patoor E., Ben Zineb T. Constitutive model for shape memory alloys including phase transformation, martensitic reorientation and twins accommodation. *Mech. Mater.*, 2011, vol. 43, no. 7, pp. 361-376. [DOI](#)
23. Panico M., Brinson L.C. A three-dimensional phenomenological model for martensite reorientation in shape memory alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2007, vol. 55, no. 11, pp. 2491-2511. [DOI](#)
24. Mishustin I.V., Movchan A.A. Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses. *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, no. 1, pp. 27-39. [DOI](#)
25. Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L.G. Micromechanical model of nonlinear deformation of shape memory alloys under phase and structure transitions. *Mech. Solids*, 2010, vol. 45, no. 3, pp. 406-416. [DOI](#)
26. Movchan A.A., Sil'chenko A.L., Kazarina S.A. Eksperimental'noe issledovanie i teoreticheskoe modelirovanie effekta perekrestnogo uprochneniia splavov s pamiat'iu formy [Experimental investigation and theoretical simulation of cross-hardening phenomena in shape memory alloys]. *Deformatsiia i razrushenie materialov – Russian metallurgy (Metally)*, 2017, no. 3, pp. 20-27.
27. Wu X.D., Sun G.J., Wu J.S. The nonlinear relationship between transformation strain and applied stress for nitinol. *Mater. Lett.*, 2003, vol. 57, pp. 1334-1338. [DOI](#)

28. Tikhomirova K.A. Razrabotka i chislennaia realizatsiia odnomernoi fenomenologicheskoi modeli fazovoi deformatsii v splavakh s pamiat'iu formy [Development and numerical implementation of one-dimensional phenomenological model for phase deformation in shape memory alloys]. *Vychisl. Mekh. Splosh. Sred – Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 2, pp.192-206. [DOI](#)
29. Wayman C.M. Deformation, mechanisms and other characteristics of shape memory alloys. *Shape Memory Effects in Alloys*, ed. by J. Perkins. New York, Springer US, 1975. Pp. 1-27. [DOI](#)
30. Elibol C., Wagner M.F.-X. Investigation of the stress-induced martensitic transformation in pseudoelastic NiTi under uniaxial tension, compression and compression–shear. *Mater. Sci. Eng., A*, 2015, vol. 621, pp. 76-81. [DOI](#)
31. Yoo Y.I., Kim Y.-J., Shin D.-K., Lee J.-J. Development of martensite transformation kinetics of NiTi shape memory alloys under compression. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 64, pp. 51-61. [DOI](#)
32. Movchan A.A., Kyaw Thu Ya. Reshenie svjaznoj termojelektromehaničeskoj zadachi dlja sterzhnja iz splava s pamjat'ju formy v ramkah teorii nelinejnogo deformirovanija jetih materialov [Solution of the coupled thermoelectromechanics problem for the beam from shape memory alloys in the framework of the non-linear theory of deformation of these materials]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii – Composite Mechanics and Design*, 2008, vol. 14, no. 3, pp. 443-460.
33. Rogovoy A.A., Stolbova O.S. Modeling the magnetic field control of phase transition in ferromagnetic shape memory alloys. *Int. J. Plast.*, 2016, vol. 85, pp. 130-155. [DOI](#)
34. Tikhomirova K.A. Izotermicheskoe deformirovanie splava s pamiat'iu formy v raznykh temperaturnykh intervalakh. Sluchai odnoosnogo rastiazheniia [Isothermal deformation of shape memory alloy in different temperature ranges. Uniaxial case]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii – Composite Mechanics and Design*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 263-282.
35. Mishustin I.V., Movchan A.A. The microstructural model of mechanical behavior of a shape-memory alloy. *Nanomechanics science and technology. An International Journal*, 2016, vol. 7, no. 1, pp. 77-91. [DOI](#)
36. Andronov I.N., Bogdanov N.P., Severova N.A., Tarsin A.V. Metod kolichestvennogo opisanija zavisimosti modulja Junga nikelida titana ot temperatury [Method of quantitative describing of temperature dependence of NiTi Young's modulus]. *Izvestija Komi nauchnogo centra UrO RAN – Proceedings of Komi scientific center of UB RAS*, 2013, no. 3, pp. 87-90.
37. Matveenko V.P., Smetannikov O.Ju., Trufanov N.A., Shardakov I.N. *Termomehanika polimernykh materialov v uslovijah relaksacionnogo perehoda* [Thermomechanics of polymeric materials under relaxation transition]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 174 p.
38. Turusov R.A. *Mehaničeskie javlenija v polimerah i kompozitah (v processah formovanija)* [Mechanical phenomena in polymers and composites (in molding processes)]. Ph.D Dissertation, Moscow, 1983.
39. Movchan A.A., Kazarina S.A. Shape memory materials as an object of solid state mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems. *Physical mesomechanics*, 2012, vol. 15, no. 3-4, pp. 214-223.
40. Auricchio F., Petrini L. A three-dimensional model describing stress-temperature induced solid phase transformations: thermomechanical coupling and hybrid composite applications. *Int. J. Numer. Methods Engineering*, 2004, vol. 61, no. 5, pp. 716-737. [DOI](#)

Поступила в редакцию 11.12.2017; опубликована в электронном виде 30.03.2018