

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.1.3](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.1.3)

УДК 681.51:539.5

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ С ОТВЕРСТИЕМ

А.М. Полатов

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Республика Узбекистан

Статья посвящена компьютерному моделированию деформированного состояния физически нелинейных трансверсально-изотропных тел с отверстием. Для описания анизотропии механических свойств материалов используется структурно-феноменологическая модель, согласно которой исходный материал представляется в виде комплекса из двух совместно работающих изотропных материалов: основного (связующего), рассматриваемого с позиций механики сплошной среды, и материала волокон, ориентированных вдоль направления анизотропии исходного материала. При этом предполагается, что волокна воспринимают лишь осевые усилия растяжения–сжатия и деформируются совместно со связующим. Для решения задачи теории пластичности применяется упрощенная теория малых упругопластических деформаций для трансверсально-изотропного тела, развитая Б.Е. Победрей. Эта упрощенная теория открывает возможности для решения конкретных прикладных задач, в том числе и для тел с отверстиями, так как в этом случае волокнистая среда заменяется эквивалентной трансверсально-изотропной средой с эффективными механическими параметрами. Вследствие этого при простом растяжении композита в направлении оси трансверсальной изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней, пластических деформаций не возникает. Вследствие чего интенсивность напряжений и деформаций определяется отдельно как по главной оси трансверсальной изотропии, так и в перпендикулярно расположенной плоскости изотропии. Представление волокнистых композитов в виде однородных анизотропных материалов с эффективными механическими параметрами позволяет произвести достаточно точный расчёт напряжений и деформаций в теле с отверстием при различных видах нагружения с учётом того, что оба размера, характеризующие волокнистый материал – толщина волокна и величина промежутка между волокнами – на несколько порядков меньше радиуса отверстия. На основе упрощенной теории и метода конечных элементов построена компьютерная модель нелинейного деформирования волокнистых композитов. Для проведения вычислительных экспериментов разработан специализированный программный комплекс. Исследовано влияние конфигурации отверстий на распределение полей деформаций и напряжений в окрестности этих концентраторов.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, МКЭ, трансверсально-изотропная среда, вычислительный эксперимент, волокнистый композит, упругость, пластичность, отверстие, деформация, напряжение

COMPUTER MODELING OF DEFORMED STATE OF PHYSICALLY NON-LINEAR TRANSVERSAL–ISOTROPIC BODIES WITH HOLE

A.M. Polatov

National university of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan

The paper presents computer simulation of the deformed state of physically nonlinear transversally isotropic bodies with hole. To describe the anisotropy of the mechanical properties of transversally isotropic materials a structurally phenomenological model is used. This model allows to represent the initial material in the form of two co-operating isotropic materials: the basic material (binder) considered from the positions of continuum mechanics and the fiber material oriented along the anisotropy direction of the original material. It is assumed that the fibers perceive only the axial tensile-compression forces and are deformed together with the base material. To solve the problem of plasticity, a simplified deformation theory of small elastic-plastic deformations for a transversely isotropic body, proposed by prof. Pobedrey B.E., is used. A simplified theory allows to apply the theory of small elastic-plastic deformations to solve specific applied problems, since in this case the fibrous medium is replaced by an equivalent transversely isotropic medium with effective mechanical parameters. The essence of simplification is that with simple stretching of composite in direction of the transversal isotropy axis and in direction perpendicular to it, plastic deformations do not arise. As a result, the intensity of stresses and deformations both along the principal axis of the transversal isotropy and along the perpendicular plane of isotropy is determined separately. The representation of fibrous composites in the form of homogeneous anisotropic materials with effective mechanical parameters makes it possible to make a fairly accurate calculation of stresses and deformations. The calculation is carried out under different loading conditions, bearing in mind that both sizes characterizing the fibrous material—the fiber thickness and the gap between the fibers—are several orders smaller than the radius of the hole. Based on the simplified theory and the finite element method, a computer model of nonlinear deformation of fibrous composites is constructed. For carrying out computational experiments, a specialized software package was developed, the effect of hole configuration on the distribution of deformation and stress fields in the vicinity of concentrators was investigated.

Key words: computer modeling, FEM, transversally isotropic medium, computational experiment, fibrous composite, elasticity, plasticity, hole, deformation, stress

1. Введение

Развитие науки и вычислительных технологий на современном этапе позволяют создавать компьютерные модели, реально отражающие картину напряжённого состояния композиционных конструкций. При этом особое внимание уделяется исследованию влияния структурных особенностей волокнистых материалов и концентраторов напряжений. Приближённые методы построения решений статических задач для анизотропной пластинки с криволинейными отверстиями и решения предложены в [1]. В [2] рассматривается плоская задача для пластинок с эллиптическим отверстием и мало от него отличающимся криволинейным отверстием. Изучено напряжённое состояние указанных пластинок

при осевых и поперечных нагрузках. Влияние концентраторов напряжений на прочность армированных пластинок изучается в [3], где анализируется напряжённое состояние в окрестности кругового отверстия, расположенного в центре конструкции. Отмечается, что на боковой поверхности кругового отверстия максимального значения достигают касательные напряжения. Так как композит плохо сопротивляется сдвигу, то в зонах, где касательные напряжения максимальны, появляются трещины. В однонаправленном материале эти трещины распространяются вдоль волокон на всю длину образца и приводят к общему разрушению. Но возникновение таких небольших трещин разгружает материал в окрестности круглого отверстия. В [4] проводится исследование концентрации упругих напряжений вблизи кругового отверстия в пластине из бороалюминия с использованием плоской волокнистой конечно-элементной модели, явным образом воспроизводящей структуру материала с сохранением объёмных долей составляющих и характерных структурных размеров в двумерном представлении. Для изучения концентрации напряжений в волокнах и связующем при растяжении вдоль волокон и при сдвиге структура считается волокнистой, составленной из однородных элементов разной жёсткости с размерами, меньшими характерного размера структурной неоднородности.

Разработке моделей и решению задач физически нелинейного деформирования волокнистых композиционных материалов посвящены работы многих авторов, см., например, список цитирования в [5]. В [6] излагаются основные положения (постулаты) механики сплошной среды. Наряду с классическими моделями рассматриваются сравнительно новые модели, где материал — композит, и модели, учитывающие связанность механических полей. Работа [7] содержит результаты экспериментального и численного конечно-элементного определения показателей анизотропного напряжённо-деформированного состояния (НДС) при одноосном растяжении графито-эпоксидных слоистых композитных прямоугольных пластин с однонаправленными подкрепляющими углеродными волокнами, содержащих центральное круглое отверстие. В работе [8] дан анализ концентрации и распределения напряжений в изотропных, ортотропных и слоистых композитных пластинах с центральным круглым отверстием, подвергнутым поперечной статической нагрузке. В работе [9] исследуется влияние концентратора напряжений в прямоугольной пластине. Концентратором является круглое отверстие. Приводятся значения коэффициентов концентрации напряжений в окрестности отверстия, полученные методом конечных элементов. В [10] рассмотрены алгоритм и решение задачи с учётом физической нелинейности тел на основе теории малых упругопластических деформаций. Отмечается, что процесс решения с использованием деформационной теории выполняется значительно быстрее, чем в рамках теории течения.

Известно, что наличие в телах конструктивных отверстий существенно сказывается на деформировании в их окрестности. В [11] на основе уточнённой теории изучено влияние анизотропии материала на деформированное состояние пластины с отверстием и установлены границы пластической зоны. Исследуется вид пластической зоны вблизи круглого отверстия в бесконечной пластине из трансверсально-изотропного материала. Прогнозирование прочности слоистых композитов с отверстиями и повреждениями типа трещин выполнено в [12, 13]. Решение задачи определения напряжённого состояния толстой плиты (случай плоской деформации) из упругого идеального анизотропного сжимаемого материала, ослабленной эллиптическим отверстием, приводится в [14]. Плита находится в условиях двусосного растяжения на бесконечности. Упругопластический анализ напряжений изотропной пластинки в окрестности квадратного отверстия осуществляется в [15]. Границы поля пластических напряжений вокруг конформно-отображаемых квадратных отверстий ищутся с помощью упругих уравнений Г.Н. Савина. Для нахождения численных решений применяется конечно-элементный подход. Сравняются теоретические и конечно-элементные упругопластические решения для изотропных пластин с квадратными отверстиями, у которых закруглены углы.

В данной работе для описания анизотропии механических свойств трансверсально-изотропных материалов используется структурно-феноменологическая модель, представляющая исходный материал в виде комплекса из двух совместно работающих изотропных материалов: основного материала (связующего) и материала волокон, ориентированных вдоль направления анизотропии исходного материала. При этом связующее рассматривается с позиций механики сплошной среды, а материал волокон — в предположении, что волокна воспринимают лишь осевые усилия растяжения–сжатия и деформируются совместно со связующим. Для решения задачи теории пластичности применяется упрощенная теория малых упругопластических деформаций для трансверсально-изотропного тела [16]. Упрощение заключается в замене исходной волокнистой среды эквивалентной трансверсально-изотропной средой с эффективными механическими параметрами. Вследствие этого при простом растяжении композита в направлении оси трансверсальной изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней, пластических деформаций не возникает, интенсивности напряжений и деформаций определяются отдельно как по главной оси трансверсальной изотропии Oz — (Q_u, q_u) , так и в перпендикулярно расположенной плоскости изотропии Oxy — (P_u, p_u) . Упрощенная теория малых упругопластических деформаций открывает возможности для решения конкретных прикладных задач. В случае тел с отверстиями она позволяет производить достаточно точный расчёт напряжений и деформаций при различных видах

нагружения при условии, что оба размера, характеризующие волокнистый материал — толщина волокна и ширина промежутка между волокнами — на несколько порядков меньше радиуса отверстия [4].

Для вычисления значений эффективных механических параметров волокнистых материалов в работе используются соотношения, полученные на основе асимптотических методов, в которых учитывается также и радиальное взаимодействие компонентов (матрицы и волокна), связанное с различием их коэффициентов Пуассона [17]. Так как деформирование матрицы обеспечивает нагружение высокопрочных волокон, то учёт её пластических деформаций является актуальной задачей, поскольку делает исследование НДС волокнистых композитов наиболее полным [18]. На основе разработанной компьютерной модели деформирования физически нелинейных трансверсально-изотропных тел найдены решения упругих и упругопластических задач деформирования конструкций из волокнистых композитов, и изучено влияние эллиптических отверстий и трещин на интенсивность деформаций пластины.

2. Постановка задачи и метод решения

Исследуется упругопластическая среда из неоднородного сплошного материала, состоящего из двух компонентов: волокон и матрицы (связующего), которая обеспечивает совместную работу армирующих элементов. Для решения задачи применяется теория малых упругопластических деформаций для трансверсально-изотропной среды [16].

Общая постановка краевой задачи теории упругости для анизотропных тел включает:
– уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad x_i \in V; \quad (1)$$

– обобщённый закон Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}; \quad (2)$$

– соотношения Коши

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right);$$

– краевые условия

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad x_i \in \Sigma_1, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0, \quad x_i \in \Sigma_2, \quad (4)$$

где u_i — компонента вектора перемещений; X_i , S_i^0 — объёмные и поверхностные силы; Σ_1 , Σ_2 — части поверхности Σ , ограничивающей объём V ; n_j — внешняя нормаль к поверхности Σ_2 ; C_{ijkl} — тензор упругих констант; σ_{ij} и ε_{kl} — компоненты тензоров напряжений и деформаций.

В упрощенной теории малых упругопластических деформаций трансверсально-изотропной среды обобщённый закон Гука (2) принимает следующий вид:

$$\tilde{\sigma} = (\lambda_2 + \lambda_4) \tilde{\theta} + \lambda_3 \varepsilon_{33}, \quad \sigma_{33} = \lambda_3 \tilde{\theta} + \lambda_1 \varepsilon_{33}, \quad P_{ij} = \frac{P_u}{p_u} p_{ij}, \quad Q_{ij} = \frac{Q_u}{q_u} q_{ij}, \quad (5)$$

где

$$P_u = 2\lambda_4(1 - \pi(p_u))p_u, \quad Q_u = 2\lambda_5(1 - \chi(q_u))q_u, \quad (6)$$

$\pi(p) = \bar{\lambda}_1(1 - p_s/p)$ и $\chi(q) = \bar{\lambda}_2(1 - q_s/q)$ — функции пластичности типа функций А.А. Ильюшина, значения которых в упругой зоне равны нулю ($\bar{\lambda}_1$, p_s и $\bar{\lambda}_2$, q_s — коэффициенты упрочнения и пределы упругой деформации, соответственно, в плоскости изотропии Oxy и по оси изотропии Oz). В упругой области параметры σ_{ij} определяются из закона Гука, а в области пластических деформаций — на основе деформационной теории А.А.Ильюшина; λ_i — упругие постоянные трансверсально-изотропной среды;

P_{ij}, Q_{ij} и p_{ij}, q_{ij} — составляющие девиаторных частей трансверсально-изотропных тензоров напряжений и деформаций, соответственно, в плоскости изотропии (P_{ij}, p_{ij}) и по оси изотропии (Q_{ij}, q_{ij}):

$$P_u = \sqrt{\frac{1}{2} P_{ij} P_{ij}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \quad (7)$$

$$p_u = \sqrt{\frac{1}{2} p_{ij} p_{ij}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + 4\epsilon_{12}^2},$$

$$Q_u = \sqrt{\frac{1}{2} Q_{ij} Q_{ij}} = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}, \quad (8)$$

$$q_u = \sqrt{\frac{1}{2} q_{ij} q_{ij}} = \sqrt{\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{23}^2},$$

причём

$$p_{ij} = \epsilon_{ij} + \frac{\tilde{\theta}}{2} (\delta_{i3} \delta_{j3} - \delta_{ij}) + \epsilon_{33} \delta_{i3} \delta_{j3} - (\epsilon_{i3} \delta_{j3} + \epsilon_{3j} \delta_{i3}), \quad (9)$$

$$q_{ij} = \epsilon_{i3} \delta_{j3} + \epsilon_{3j} \delta_{i3} - 2\epsilon_{33} \delta_{i3} \delta_{j3}, \quad \tilde{\theta} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22}, \quad (10)$$

$$P_{ij} = \sigma_{ij} + \tilde{\sigma} (\delta_{i3} \delta_{j3} - \delta_{ij}) + \sigma_{33} \delta_{i3} \delta_{j3} - (\sigma_{i3} \delta_{j3} + \sigma_{3j} \delta_{i3}), \quad (11)$$

$$Q_{ij} = \sigma_{i3} \delta_{j3} + \sigma_{3j} \delta_{i3} - 2\sigma_{33} \delta_{i3} \delta_{j3}, \quad \tilde{\sigma} = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2. \quad (12)$$

Механические параметры трансверсально-изотропного материала связаны с модулями λ_i следующими соотношениями:

$$\lambda_1 = E'(1-\mu)/l, \quad \lambda_2 = E(\mu + k\mu^2)/[(1+\mu)/l], \quad \lambda_3 = E\mu'/l, \\ \lambda_4 = G = E/[2(1+\mu)], \quad \lambda_5 = G', \quad l = 1 - \mu - 2\mu'^2 k, \quad k = E/E'.$$

Здесь μ и μ' — эффективные коэффициенты Пуассона, E и E' — эффективные модули упругости, соответственно, в плоскости и по оси изотропии трансверсально-изотропного материала.

Предполагается, что плоскость трансверсальной изотропии совпадает с плоскостью Oxy , а ось изотропии — с осью Oz . Поскольку среда является однородной с эффективными механическими параметрами как по оси изотропии, так и по плоскости изотропии, то для решения упругопластических задач используется итерационный процесс метода упругих решений А.А. Ильюшина [19].

3. Вычислительные эксперименты

Вычислительные эксперименты выполнялись на основе разработанного автором специализированного программного комплекса АРПЭК [20]. Достоверность и корректность предложенной однородной модели подтверждается совпадением результатов, полученных на её основе, с решением ряда тестовых задач на растяжение квадратной пластины с центральным круговым отверстием. В случае упругой задачи результаты по модели автора сравниваются с результатами по волокнистой модели и по модели однородного трансверсально-изотропного материала с эффективными упругими механическими характеристиками бороалюминия [4]. В упругопластическом случае решение сопоставляется с результатами решения задачи растяжения квадратной пластины из волокнистого материала на основе вариационно-разностного метода [6].

3.1. Упругий расчёт

Для исследования влияния изолированного отверстия на НДС тела из однонаправленного композита рассматривается трёхмерная упругая задача деформирования прямоугольной пластины (её высота 10 мм, ширина — 5 мм и толщина — 1 мм) при одноосном равномерном растяжении по оси Oz распределенной нагрузкой $P_{zz} = 100$ МПа, приложенной на нижнем и верхнем краях (Рис. 1). Параметры σ_{ij} определяются из закона Гука, а в соотношении (6) значения функций пластичности $\pi(p)$ и $\chi(q)$ равны нулю. В качестве материала матрицы используется алюминиевый сплав Д16 (дюралюминий) с параметрами: $E = 7,1 \cdot 10^4$ МПа (модуль упругости), $\mu = 0,32$ (коэффициент Пуассона), $\sigma_s = 2,13 \cdot 10^2$ МПа (предел упругости), $p_s = 0,003$.

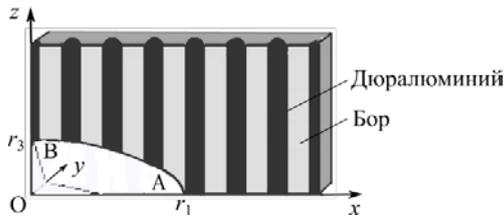


Рис. 1. Четвёртая часть сечения пластины плоскостью Oxz

$G' = 0,5396 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,0682$, $\mu' = 0,2480$ [21].

Путём вычислительного эксперимента исследуется влияние формы отверстия на распределение полей деформаций и напряжений в плоскости трансверсальной изотропии Oxy . Варьируются размеры большой (r_1) и малой (r_3) полуосей концентратора в форме эллипса. Логически процесс завершается решением упругой задачи растяжения волокнистой конструкции с горизонтальной прямолинейной трещиной в центре. На границе трещины выделяется фронт — плоскость, в которой смыкаются берега трещины. С точки зрения постановки и решения задачи берега трещины играют роль дополнительной границы тела, причём из-за малого расстояния между берегами реальную трещину можно считать математическим разрезом, то есть полостью нулевого объёма, ограниченной двумя геометрически совпадающими поверхностями — берегами разреза. Очевидно, что вблизи фронта будет наблюдаться наибольшая концентрация напряжений, в связи с этим в расчётах окрестность трещины разбивается на более мелкие конечные элементы.

В качестве концентратора рассматривается:

- сквозное отверстие в форме эллипса ($r_1 = 0,5$ мм и $r_3 = 0,1$ мм);
- сквозная горизонтальная прямолинейная трещина ($l = 1$ мм).

Характерные точки А и В расположены в зонах концентрации напряжений: для эллипса (Рис. 1) — это точка А на пересечении контура отверстия с осью x и точка В на пересечении с осью z ; для трещины: А — в её вершине и В — береговая точка на середине длины.

В таблицах 1 и 2 приведены значения компонент НДС в характерных точках окрестности отверстия в сечении Oxz (u, w — проекции смещения точек, соответственно, на оси Ox и Oz) в плоскости изотропии Oxy . При $r_3/r_1 = 0$ (случай трещины) интенсивность напряжений P_u в плоскости изотропии повышается, что связано с увеличением разности значений σ_{xx} и σ_{yy} , а также с возрастанием и сменой

Армирующими элементами служат борные волокна с характеристиками: $E' = 39,7 \cdot 10^4$ МПа, $\mu' = 0,21$, $\sigma'_s = 2,5 \cdot 10^3$ МПа (предел прочности при растяжении). Волокна материала ориентированы по оси Oz , объёмное содержание волокна в композите составляет $\nu = 60\%$, соответствующие эффективные механические параметры бороалюминия следующие: $E = 1,3992 \cdot 10^5$ МПа, $E' = 2,6682 \cdot 10^5$ МПа, $G = 0,6551 \cdot 10^5$ МПа,

Таблица 1. Параметры НДС в точке А пластины с трещиной

r_3/r_1	$u \cdot 10^5$, мм	σ_{xx} , МПа	σ_{yy} , МПа	τ_{xy} , МПа	p_u	P_u , МПа
4	-0,5710	4,215	5,5695	-0,6092	0,00151	1,972
2	-1,2372	8,684	11,427	-1,0252	0,00266	3,489
4/3	-1,9507	14,250	18,058	-1,3152	0,00351	4,592
1	-2,7033	20,406	25,219	-1,5375	0,00421	5,5225
3/4	-2,6036	32,746	37,874	-1,0085	0,00352	4,6143
1/2	-2,4438	53,186	59,049	-0,1149	0,00317	4,1593
1/4	-1,9935	85,801	94,233	0,9611	0,00500	6,5544
0	-2,060	74,888	30,862	2,2877	0,00244	32,0307

Таблица 2. Параметры НДС в точке В пластины с эллиптическим отверстием ($\tau_{xy} = 0$)

r_3/r_1	$w \cdot 10^5$, мм	σ_{xx} , МПа	σ_{yy} , МПа	p_u	P_u , МПа
4	3,0528	-46,102	-12,586	0,00181	23,705
2	4,3270	-69,287	-13,306	0,00302	39,595
4/3	5,6192	-78,653	-10,791	0,00366	47,997
1	6,9720	-83,022	-7,9411	0,00405	53,104
3/4	6,4114	-81,179	-7,4131	0,00398	52,174
1/2	5,8184	-80,714	-7,0060	0,00398	52,132
1/4	5,0181	-85,329	-7,6285	0,00419	54,956
0	4,7642	-77,201	-4,4764	0,00393	51,437

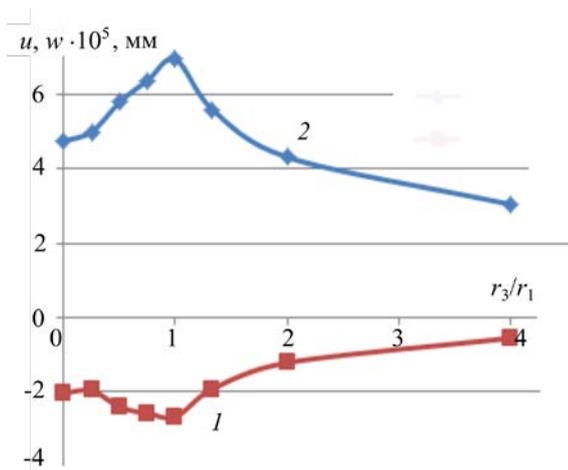


Рис. 2. График изменения смещений u в точке А (кривая 1) и w – в точке В (кривая 2)

интенсивности деформаций p_u в плоскости изотропии в сечении Oxz в зависимости от отношения r_3/r_1 . Повышенные значения p_u локализованы и концентрируются в окрестности отверстия. Под действием растягивающей нагрузки центральная часть конструкции вместе с отверстием сжимается по оси Ox , что подтверждается также наличием сжимающей компоненты напряжения σ_{xx} (Табл. 2). Вследствие этого отверстие по оси Oz растягивается.

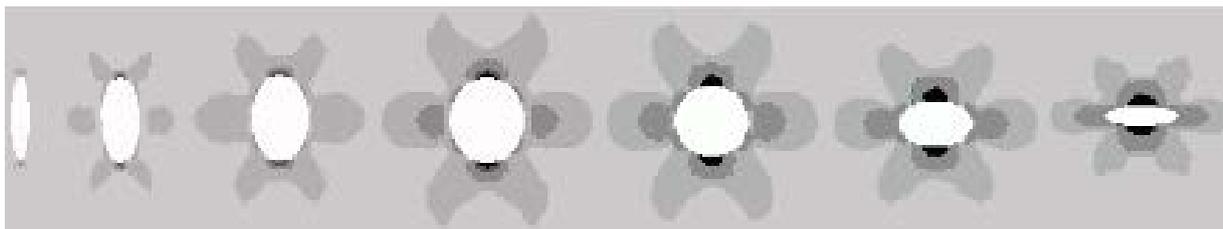


Рис. 3. Картины распределения интенсивности деформаций p_u в сечении Oxz

Повышенные уровни интенсивностей деформаций и напряжений в плоскости изотропии наблюдаются в окрестности верхней и нижней частей отверстия, причём наибольшие значения ($p_u = 0,00419$ и $P_u = 54,96$ МПа) достигаются при $r_3 = 0,0125$ мм. Распределения интенсивности деформаций в трёх вычислительных экспериментах (при отношениях $r_3/r_1 = 4, 2$ и $4/3$) подтверждают локальность влияния отверстия на изменение поля интенсивности деформаций: согласно рисунку 3 оно ограничено областями, расположенными в окрестностях верхней и нижней частей контура отверстия.

При наличии изолированной прямолинейной трещины (Рис. 4) максимальные значения интенсивности деформаций p_u в плоскости изотропии сосредоточены по берегам трещины, а в окрестности вершины её значения несколько ниже.

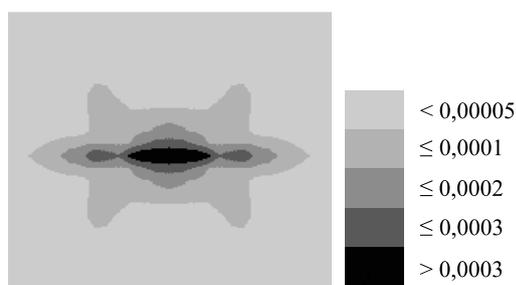


Рис. 4. Распределение значений интенсивности деформаций p_u в случае трещины

знака компоненты напряжения τ_{xy} (Табл. 1). Однако значение интенсивности деформаций в плоскости изотропии остаётся вдвое меньшим, чем при наличии отверстия в форме эллипса ($r_3/r_1 = 1/4$) (Табл. 2). Так как трансверсально-изотропная среда является моделью волокнистого композита, то местом наибольшей концентрации разрывающего напряжения становится зона у последнего волокна, обрезанного трещиной. Первое волокно, соседствующее с разорванными, берет на себя основную нагрузку и обеспечивает снижение интенсивности напряжений в местах разрыва волокон [4].

На рисунке 2 показано поведение смещений u в точке А (кривая 1) и w в точке В (кривая 2). Максимальной величины каждое из них достигает при соотношении $r_3/r_1 = 1$, то есть когда отверстие принимает форму круга и имеет наибольшую площадь.

На рисунке 3 приведены распределения

распределения интенсивности деформаций p_u в плоскости изотропии в окрестности концентратора напряжений при отношении r_3/r_1 из интервала от 1 до $1/8$ (при $r_1 = 0,05$ мм) представлены на рисунках 5а–г. Максимальные значения интенсивности концентрируются вблизи верхней (и, соответственно, не показанной здесь нижней) части отверстия. Однако с уменьшением вертикального размера отверстия около боковых частей также формируются зоны повышенных значений P_u , что связано с увеличением коэффициента кривизны эллипса. Необходимо отметить, что в окрестности

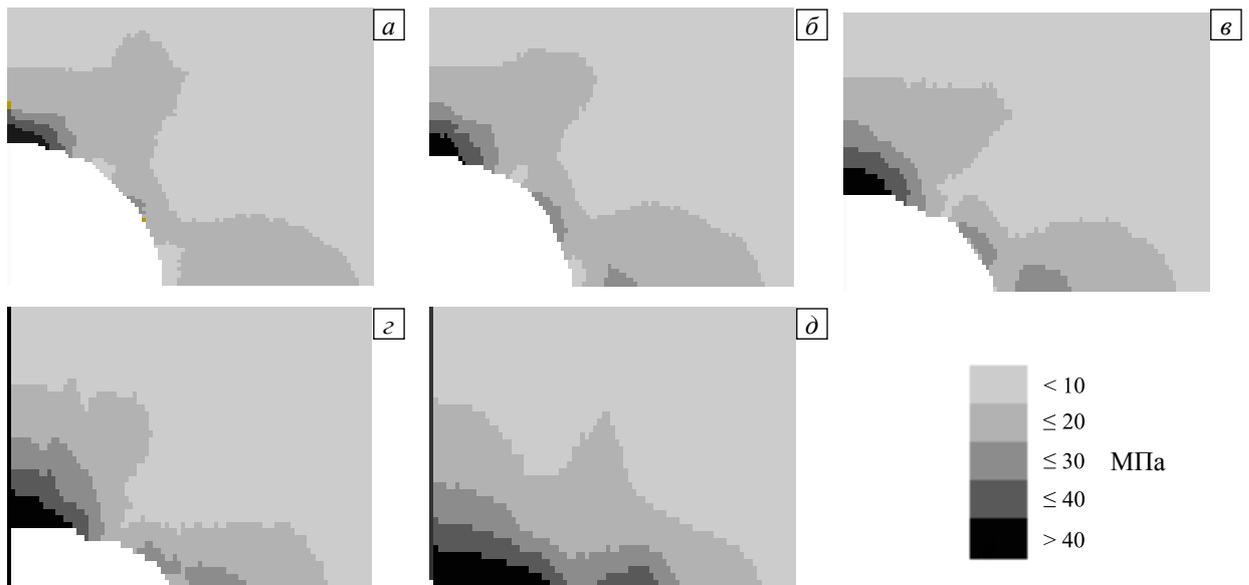


Рис. 5. Распределение интенсивности напряжений P_u в 1/4 части пластины

точки А значения интенсивности напряжений незначительны. Эта зона отчетливо просматривается на рисунке 5д, отвечающем случаю изолированной прямолинейной трещины.

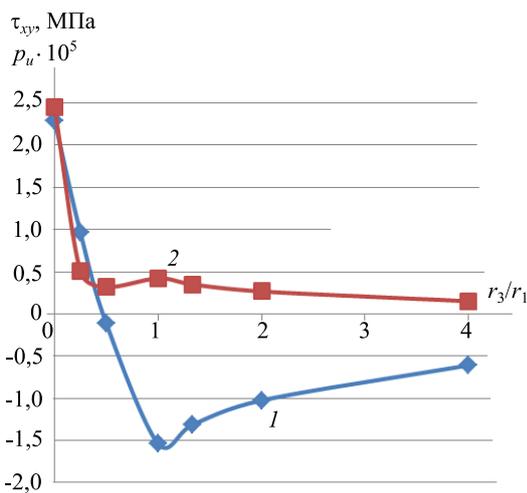


Рис. 6. График изменения напряжений τ_{xy} (кривая 1) и P_u (кривая 2) в точке А

Графики изменения касательной компоненты напряжений τ_{xy} и интенсивности деформаций P_u в плоскости изотропии в окрестности точки А представлены на рисунке 6. Анализ результатов показывает, что при наличии трещины и сплюсненного ($r_3/r_1 = 1/8$) в направлении оси Oz эллипса касательные напряжения положительны. При увеличении значения отношения полуосей r_3/r_1 в интервале от 1/4 и выше касательные напряжения меняют знак на отрицательный и достигают максимального значения при $r_3/r_1 = 1$ (круг). Так как касательные напряжения обычно вызывают изменение формы, то смена знака при уменьшении величины вертикальной оси эллиптического отверстия означает, что в окрестности точки А формируется область максимальных касательных напряжений. Это приводит к появлению трещин, которые распространяются вдоль волокон на всю длину образца и могут привести к общему разрушению конструкции [3].

Для определения зон максимальных касательных напряжений τ_{xy} при различных соотношениях параметров отверстия проведены вычислительные эксперименты при значениях r_3/r_1 , приведенных в таблице 2. Результаты экспериментов представлены на рисунке 7. Из рисунка видно, что при значении $r_3/r_1 = 1$ (круг) и меньших в окрестности отверстия формируется стабильная область максимальных τ_{xy} .



Рис. 7. Распределение касательных напряжений τ_{xy} в 1/4 части пластины

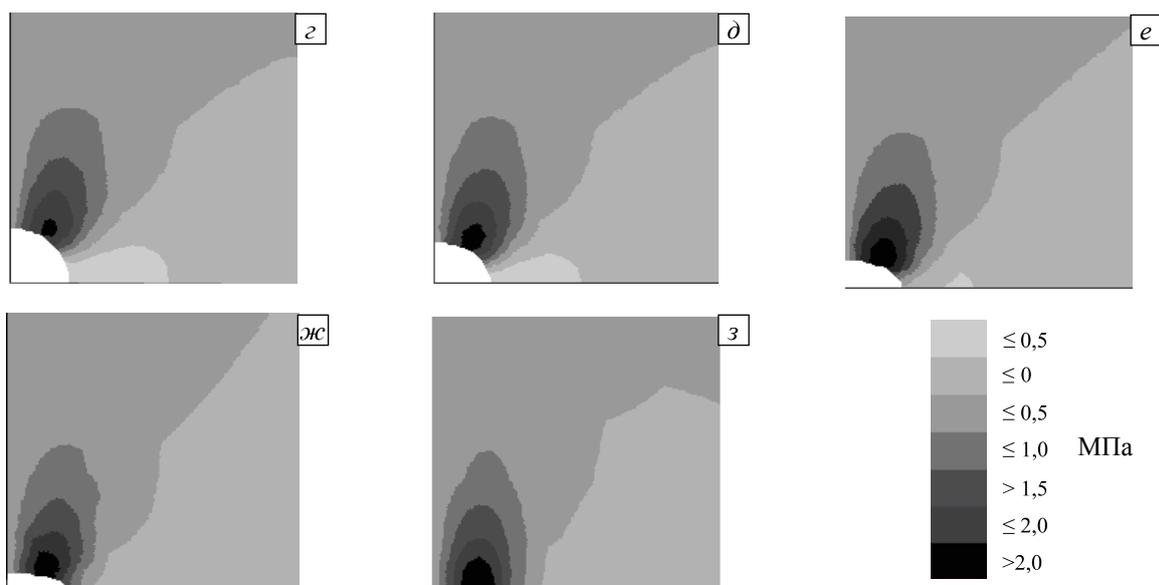
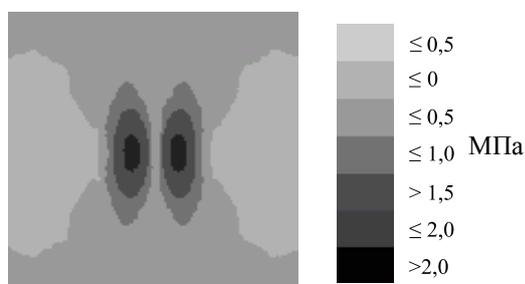


Рис. 7. Продолжение

Рис. 8. Распределение касательных напряжений τ_{xy} в случае трещины

С уменьшением размера полуоси r_3 эллиптического отверстия (при постоянном $r_1 = 0,05$ мм) область максимальных значений охватывает контур отверстия (Рис. 7а–ж), а в задаче с трещиной касательные напряжения τ_{xy} формируются в окрестностях её вершин (Рис. 7з). Именно эти области с точки зрения прочности являются наиболее уязвимыми в волокнистых конструкциях с отверстием или трещиной (Рис. 8), поскольку здесь существует вероятность отрыва матрицы от высокопрочных волокон [3].

3.2. Упругопластический расчёт

Рассматривается трёхмерная упругопластическая задача равномерно распределенного растяжения пластины по оси Oz нагрузкой ($P_{zz} = 950$ МПа), приложенной на нижнем и верхнем краях. В пластине имеется изолированное отверстие в форме эллипса ($r_3/r_1 = 1/8$) или прямолинейная горизонтальная трещина. Геометрические и механические параметры задачи идентичны параметрам задачи при упругом расчёте. В первом приближении эффективные материальные константы функции пластичности эквивалентной трансверсально-изотропной среды приравниваются материальным константам матрицы из дюралюминия. В последующих исследованиях планируется уточнение полученного решения упругопластической задачи.

Для сравнения результатов в таблицах 3 и 4 приведены значения компонент упругого и упругопластического состояния пластины в плоскости трансверсальной изотропии Oxy для сечения Oxz , характеризующие поведение материала матрицы волокнистых композитов.

Таблица 3. К сравнению параметров при различно вычисленных НДС в точке В пластины с эллиптическим отверстием ($\tau_{xy} = 0$)

Расчёт	p_u	σ_{xx} , МПа	σ_{yy} , МПа	P_u , МПа
Упругий	0,00398	-810,63	-72,47	522,09
Упругопластический	0,00327	-622,23	-105,28	410,95

Таблица 3 содержит значения параметров НДС в плоскости изотропии в окрестности точки В эллиптического отверстия. Анализ данных указывает на существенное уменьшение значений интенсивности деформаций p_u и напряжений P_u в плоскости изотропии за счет пластических деформаций.

Далее анализируются результаты расчёта НДС пластины с вырезом в форме горизонтальной прямолинейной трещины (Табл. 4). В окрестности срединной точки на берегах трещины значения

Таблица 4. К сравнению параметров при различно вычисленных НДС в пластине с трещиной

	На вершине трещины (точка А)		В срединной точке (точка В)	
	упругость	упругопластичность	упругость	упругопластичность
P_u	0,00232	0,00155	0,00373	0,00338
σ_{xx} , МПа	711,44	492,22	-733,41	-634,13
σ_{yy} , МПа	293,19	221,15	-42,526	-72,61
P_u , МПа	304,29	203,10	488,65	418,18

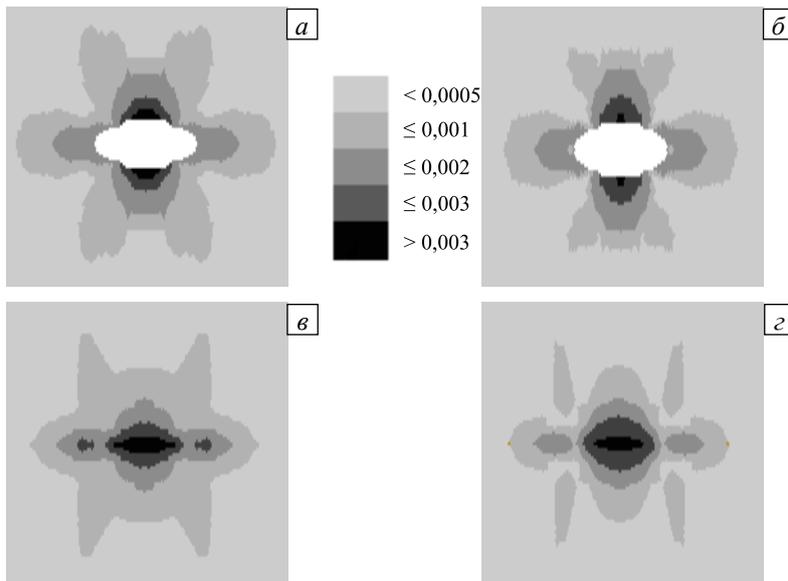


Рис. 9. Распределения интенсивности деформаций p_u в пластине с эллиптическим отверстием (а, б) и трещиной (в, г) в упругом (а, в) и упругопластическом (б, г) случаях

(Рис. 9а, в) и упругопластического расчётов (Рис. 9б, г). Области пластических деформаций концентрируются в окрестности верхней и нижней частей эллипса (Рис. 9б) и возле середины берегов трещины (Рис. 9г).

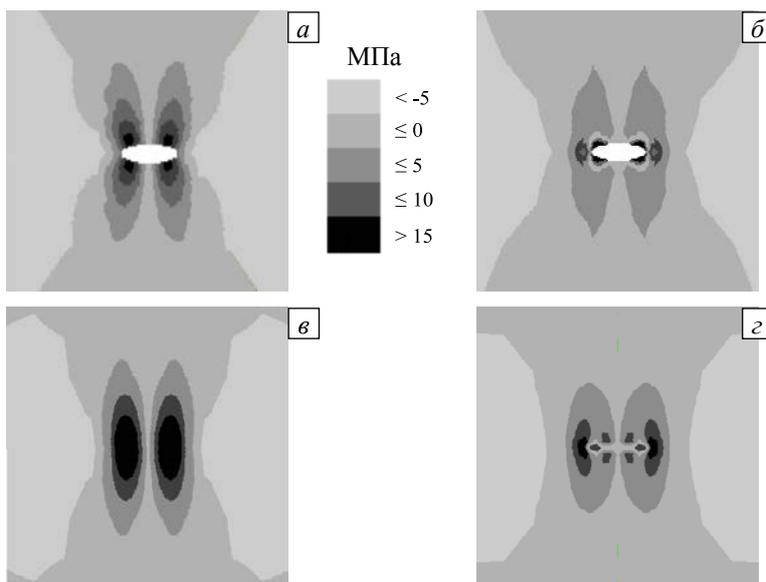


Рис. 10. Распределение касательных напряжений τ_{xy} в пластине с эллиптическим отверстием (а, б) и трещиной (в, г) в упругом (а, в) и упругопластическом (б, г) случаях

интенсивности деформаций $p_u > p_s$ (пластичность) в плоскости изотропии, однако в окрестностях вершин трещины значения $p_u < p_s$ (упругость). Этим подтверждается, что при растяжении волокнистого композита вдоль оси трансверсальной изотропии Oz область пластических деформаций в плоскости изотропии концентрируется в окрестностях середины берегов трещины, а в окрестностях вершин трещины область остаётся упругой.

На рисунке 9 приведены распределения интенсивности деформаций p_u в плоскости изотропии для пластины с отверстием в виде эллипса при $r_3/r_1 = 1/8$ и с трещиной, полученные из упругого

В завершение приведены распределения касательной компоненты тензора напряжений τ_{xy} (Рис. 10, 12). Анализ полей указывает на то, что, в отличие от упругого случая (Рис. 10а), при упругопластическом расчёте происходит перераспределение напряжений: максимальные значения концентрируются в окрестности боков контура эллиптического отверстия и на некотором расстоянии от него (Рис. 10б).

Такое же перераспределение можно наблюдать и при наличии центральной горизонтальной прямолинейной трещины (Рис. 10в, г). Максимальные значения касательной компоненты напряжений τ_{xy} формируются в окрестностях вершин трещины.

В упругопластическом случае максимальные значения этой компоненты концентрируются непосредственно у вершин трещины (Рис. 10б).

Таким образом, вычислительный эксперимент дает возможность исследовать влияние формы отверстий на НДС конструкций из волокнистых композитов, определить зоны образования пластических деформаций и локализацию областей с максимальными касательными напряжениями, вызывающими отрыв волокна от матрицы. Результаты упругопластического расчёта позволяют уточнить напряжённо-деформированное состояние конструкций и оценить истинное поведение волокнистых композитов.

4. Заключение

В результате теоретических исследований и проведенных вычислительных экспериментов выполнено следующее:

1. Разработана компьютерная модель решения трёхмерных задач упругого и упругопластического деформирования трансверсально-изотропной среды на основе упрощенной теории малых упругопластических деформаций трансверсально-изотропных сред и метода конечных элементов.

2. Изучено влияние формы отверстий на НДС и распределение интенсивности деформаций в плоскости изотропии в окрестности концентратора напряжений трансверсально-изотропного тела.

3. Определены области пластических деформаций в плоскости изотропии и перераспределение параметров НДС трансверсально-изотропного тела в окрестности концентраторов напряжений.

4. Посредством вычислительного эксперимента для различных конфигураций отверстий в трансверсально-изотропном теле установлено месторасположение областей с максимальными значениями касательных напряжений τ_{xy} , где возможен отрыв высокопрочных волокон от матрицы.

Литература

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.-Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. – 355 с.
2. Космодамианский А.С. Напряжённое состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – Киев–Донецк: Вища школа, 1976. – 200 с.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М: Наука, 1979. – 744 с.
4. Карпов Е.В. Концентрация напряжений и разрушение вблизи круговых отверстий в композитных элементах конструкций / Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Новосибирск, 2002. – 119 с.
5. Победря Б.Е. Модели механики сплошной среды // Фундамент. и прикл. матем. – 1997. – Т. 3, № 1. – С. 93-127.
6. Халджигитов А.А., Худазаров Р.С., Сагдуллаева Д.А. Теории пластичности и термопластичности анизотропных тел. – Ташкент: Наука и технологии, 2015. – 320 с.
7. Yang Fan, Chow C.L. Progressive damage of unidirectional graphite/epoxy composites containing a circular hole // J. Compos. Mater. – 1998. – Vol. 32, no. 6. – P. 504-525. [DOI](#)
8. Jain N.K., Mittal N.D. Finite element analysis for stress concentration and deflection in isotropic, orthotropic and laminated composite plates with central circular hole under transverse static loading // Mater. Sci. Eng. – 2008. – Vol. 498, no. 1-2. – P. 115-124. [DOI](#)
9. Abdul S.S., Ishrat M.M. Stress concentration of rectangular plate with a hole made with composite material using finite element analysis // IOSR-JMCE. – 2016. – Vol. 13, no. 4. – P. 1-5. [DOI](#)
10. Томашевский С.Б. Влияние упругопластических деформаций на результаты решения контактных задач железнодорожного транспорта // Вестник БГТУ. – 2011. – № 3. – С. 17-23.
11. Семькина Т.Д., Цуканова Л.П. Упругопластическое деформирование пластины с эллиптическим отверстием при двусосном растяжении с учётом трансверсальной изотропии материала // Вестник БГТУ. – 2009. – Т. 5, № 12. – С. 163-166.
12. Аннин Б.Д., Максименко В.Н. Оценка разрушения пластин из композитных материалов с отверстиями // Механика композитных материалов. – 1989. – № 2. – С. 284-290. (English version [DOI](#)).
13. Аннин Б.Д. Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов // Сиб. журн. индустр. матем. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 5-14. (English version [DOI](#)).
14. Иванова С.В. Напряжённо-деформированное состояние толстой плиты с отверстием из упруго-идеальнопластического анизотропного сжимаемого материала / Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Чебоксары, 2010. – 75 с.
15. Yazici M. Elasto-plastic analysis of stress around square hole // JEMMS. – 2007. – Vol. 14. – P. 215-219.
16. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
17. Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. Асимптотические методы расчёта композитных материалов с учётом внутренней структуры. – Днепропетровск: Пороги, 2008. – 196 с.
18. Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др. Композиционные материалы: Справочник – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
19. Ильющин А.А. Пластичность. Часть 1. Упругопластические деформации. – М.: Логос, 2004. – 388 с.
20. Полатов А.М. Программный комплекс решения задач нелинейного деформирования композитных материалов // Проблемы информатики и энергетики. – 2014. – № 1-2. – С. 27-33.
21. Карпов Е.В. Влияние волокнистой структуры на концентрацию напряжений вблизи кругового отверстия в боралюминии // Динамика сплошной среды. – 2002. – № 120. – С. 137-144.

References

1. Lekhnitskiy S.G. *Anizotropnyye plastinki* [Anisotropic plates]. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1947. 355 p.
2. Kosmodamianskiy A.S. *Napryazhennoye sostoyaniye anizotropnykh sred s otverstiyami ili polostyami* [Stress state of anisotropic media with holes or cavities]. Kiev-Donetsk: Vishcha shkola, 1976. 200 p.
3. Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of the deformable solid body]. Moscow: Nauka, 1979. 744 p.
4. Karpov E.V. *Kontsentratsiya napryazheniy i razrusheniya vblizi krugovykh otverstiy v kompozitnykh elementakh konstruktiv* [Stress concentration and fracture near circular holes in composite elements of constructions]. PhD Dissertation, Novosibirsk, 2002. 119 p.
5. Pobedrya B.E. Models of continuum mechanics. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1997, vol. 3, no. 1, pp. 93-127.
6. Khaldzhigitov A.A., Khudazarov R.S., Sagdullayeva D.A. *Teorii plastichnosti i termoplastichnosti anizotropnykh tel* [Theories of plasticity and thermoplasticity of anisotropic bodies]. Tashkent: Nauka i tekhnologii, 2015. 320 p.
7. Yang Fan, Chow C.L. Progressive damage of unidirectional graphite/epoxy composites containing a circular hole. *J. Compos. Mater.*, 1998, vol. 32, no. 6, pp. 504-525. [DOI](#)
8. Jain N.K., Mittal N.D. Finite element analysis for stress concentration and deflection in isotropic, orthotropic and laminated composite plates with central circular hole under transverse static loading. *Mater. Sci. Eng.*, 2008, vol. 498, no. 1-2, pp. 115-124. [DOI](#)
9. Abdul S.S., Ishrat M.M. Stress concentration of rectangular plate with a hole made with composite material using finite element analysis. *IOSR-JMCE*, 2016, vol. 13, no. 4, pp. 1-5. [DOI](#)
10. Tomashevskiy S.B. Vliyaniye uprugoplasticheskikh deformatsiy na rezul'taty resheniya kontaktnykh zadach zheleznodorozhnogo transporta [Effect of elasticplastic deformations on the results of the calculation of contact problems of rail transport]. *Bulletin of Bryansk State Technical University*, 2011, no. 3, pp. 17-23.
11. Semykina T.D., Tsukanova L.P. Elastic-plastic deformation of the plate with elliptical hole in case of two-axled stretching with the regard of transversal anisotropy of the material. *Bulletin of Voronezh State Technical University*, 2009, vol. 5, no. 12, pp. 163-166.
12. Annin B.D., Maksimenko V.N. Evaluation of the failure of plates made of composite materials with holes. *Mech. Compos. Mater.*, 1989, vol. 25, no. 2, pp. 216-222. [DOI](#)
13. Annin B.D. Computer simulation of a twisted nanotube buckling. *J. Appl. Industr. Math.*, 2009, vol. 3, no. 3, pp. 318-333. [DOI](#)
14. Ivanova S.V. *Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye tolstoy plity s otverstiyem iz uprugo-ideal'noplasticheskogo anizotropnogo szhimayemogo materiala* [Stress-strain state of a thick plate with a hole made of an elastoplastic anisotropic compressible material]. PhD Dissertation, Cheboksary, 2010. 75 p.
15. Yazici M. Elasto-plastic analysis of stress around square hole. *IJEMS*, 2007, vol. 14, pp. 215-219.
16. Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow: Lomonosov Moscow State University, 1984. 336 p.
17. Bol'shakov V.I., Andrianov I.V., Danishevskiy V.V. *Asimptoticheskiye metody rascheta kompozitnykh materialov s uchetom vnutrenney struktury* [Asymptotic methods for calculating composite materials taking into account the internal structure]. Dnepropetrovsk: Porogi, 2008. 196 p.
18. Vasil'yev V.V., Protasov V.D., Bolotin V.V. i dr. *Kompozitsionnyye materialy: Spravochnik* [Composite materials: Handbook]. – Moscow: Mashinostroenie, 1990. 512 p.
19. Ilyushin A.A. *Plastichnost'. Uprugo-plasticheskiye deformatsii* [Plasticity. Part 1. Elastic-plastic deformations]. Moscow: Logos, 2004. 388 p.
20. Polatov A.M. Programmny kompleks resheniy zadach nelineynogo deformirovaniya kompozitnykh materialov [Program complex for solving problems of nonlinear deformation of composite materials]. *Problemy informatiki i energetiki – Uzbek Journal of the Problems of Informatics and Energetics*, 2014, no 1-2, pp. 27-33.
21. Karpov E.V. Vliyaniye voloknistoy struktury na kontsentratsiyu napryazheniy vblizi krugovogo otverstiya v borallyumine [Influence of the fibrous structure on stress concentration near a circular hole in borallum]. *Dinamika sploshnoy sredy* [Dynamics of a continuous medium], 2002, no. 120, pp. 137-144.

Поступила в редакцию 07.07.2017; опубликована в электронном виде 30.03.2018.