

DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.1.2](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.1.2)

УДК 532.546:519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛИМЕРНОГО ЗАВОДНЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЕТКИ ВОРОНОГО

Т.Ф. Киреев^{1,2}, Г.Т. Булгакова¹, И.Ф. Хатмуллин²¹ Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Российская Федерация² Уфимский научно-технический центр, Уфа, Российская Федерация

В настоящее время доля трудноизвлекаемых углеводородов в общем балансе запасов России составляет более 60% и продолжает расти. Для эффективного освоения залежей такого типа требуется развитие и применение методов увеличения нефтеотдачи, одним из которых является полимерное заводнение. Практическое применение этой технологии невозможно без проведения численного моделирования. При подземном гидродинамическом моделировании для представления геометрии пласта обычно применяют структурированные сетки. Однако неструктурированные сетки имеют ряд преимуществ перед классическими структурированными сетками: они позволяют лучше описать неоднородности пласта, получить более точное решение задачи вблизи скважин, сократить эффект ориентации сетки, а в некоторых случаях дают возможность увеличить скорость вычислений за счет уменьшения количества ячеек. В работе рассмотрена модель полимерного заводнения, учитывающая осадкообразование и минерализацию пластовой воды и включающая классические компоненты модели нелетучей нефти и компоненты полимера и соли. Записаны основные уравнения и сформулирована постановка задачи, осуществлена дискретизация методом конечных объемов на неструктурированной сетке Вороного по полностью неявной схеме с последующей верификацией результатов. В рамках вычислительного эксперимента по численному моделированию полимерного заводнения выполнено сравнение нескольких конфигураций расчетных сеток. Дебиты нефти из расчета на гексагональной локально измельченной сетке Вороного оказались точнее по сравнению с дебитами, полученными на локально измельченной прямоугольной сетке с таким же количеством ячеек. Показано, что за счет снижения эффекта ориентации сетка Вороного способна более реалистично изобразить фронт движения воды.

Ключевые слова: фильтрация в пористой среде, модель нелетучей нефти, полимерное заводнение, закон Дарси, адсорбция, сетка Вороного, эффект ориентации сетки, неявная схема, нелинейные дифференциальные уравнения, метод конечных объемов, метод Ньютона

MODELING OF POLYMER FLOODING USING VORONOI GRID

T.F. Kireev^{1,2}, G.T. Bulgakova¹ and I.F. Khatmullin²¹ Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russian Federation² UNTC, LLC Ufa, Russian Federation

Nowadays the part of unconventional oil in the total oil reserves in Russia is more than 60% and continues to grow. Effective recovery of such oil necessitates development of enhanced oil recovery techniques such as polymer flooding. It is impossible to use this technology without carrying out numerical simulation. Structured grids are usually used for the description of the formation geometry in reservoir simulation. However, unstructured grids have a number of advantages over classical structured grids: they allow better description of reservoir heterogeneity, provide a more accurate solution of the problem near wells, and reduce the effect of grid orientation. The study investigated the model of polymer flooding with effects of adsorption and water salinity. The model takes into account five components that includes elements of the classic black oil model. These components are polymer, salt, water, dead oil and gas. The equations of the model and the problem statement are formulated. Solution of the problem by finite volume method on unstructured Voronoi grid using fully implicit scheme is obtained and verified. To compare several different grid configurations numerical simulation of polymer flooding is performed. The oil rates obtained by a hexagonal locally refined Voronoi grid are shown to be more accurate than the oil rates obtained by a locally refined rectangular grid with the same number of cells. It is also demonstrated that the Voronoi grid helps to obtain a more realistic front of the water movement by reducing the grid orientation effect.

Key words: flow through a porous medium, black oil model, polymer flooding, Darcy law, adsorption, Voronoi grid, grid orientation effect, implicit scheme, nonlinear differential equations, finite volume method, Newton's method

1. Введение

Для осуществления полимерного заводнения в пласт в виде оторочки закачивается водный раствор полимера с высокой молекулярной массой (порядка миллиона г/моль для частично гидролизованного полиакриламида), при этом его подвижность в несколько раз меньше подвижности воды, что приводит к увеличению коэффициента охвата пласта вытеснением и росту конечной нефтеотдачи. Применение этого метода, равно как и большинства других технологий в разработке месторождений, требует проведения математического моделирования.

Существующие программные продукты для нефтегазовой сферы содержат в себе только фиксированные наборы математических моделей и расчетных инструментов. Кроме того, такое программное обеспечение имеет достаточно высокую стоимость, и для малых компаний бывает целесообразнее разработать необходимые программные модули самостоятельно.

Исследования в области моделирования полимерного заводнения начались в конце 1960-х годов [1]. За это время появилось большое количество моделей, которые учитывают эффекты адсорбции, влияние температуры, химическое разложение, неньютоновское поведение растворов полимеров [2, 3] и образование языков обводнения [4].

В конце 1980-х годов в моделировании нефтяных пластов начали использовать неструктурированные сетки [5–9]. Такие сетки имеют ряд преимуществ перед классическими прямоугольными сетками: они позволяют лучше описать неоднородности пласта, получить более точное решение задачи вблизи скважин, сократить эффект ориентации сетки и, в некоторых случаях, увеличить скорость вычислений за счет уменьшения количества ячеек.

Авторами данной работы исследуется модель полимерного заводнения Eclipse [10] с учетом минерализации пластовой воды, построенная на основе классической модели нелетучей нефти. Для разбиения пространства применяется неструктурированная сетка Вороного [7]. Рассматривается фильтрация пяти компонентов в пористой среде: водяного, нефтяного, газового, полимерного и соляного. Учитываются увеличение вязкости водной фазы с ростом концентрации полимера и адсорбция полимера на поверхности породы согласно изотерме адсорбции с последующим снижением проницаемости породы для водной фазы. Компонента соли в данной работе представляет пластовую соль, снижающую вязкость полимерного раствора.

Материал изложен следующим образом: в разделах 2 и 3 приводятся основные уравнения модели, и формулируется постановка задачи; в разделах 4 и 5 осуществляется разбиение пространства на расчетные ячейки и дискретизация уравнений; в разделах 6 и 7 анализируются результаты численных экспериментов и проводится верификация модели.

2. Основные уравнения

Уравнения модели полимерного заводнения [10] записываются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_w}{B_w} \right) \right] + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{u}_w}{B_w} \right) + q_w \delta_{well} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_o}{B_o} \right) \right] + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{u}_o}{B_o} \right) + q_o \delta_{well} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{R_s S_o}{B_o} + \frac{S_g}{B_g} \right) \right] + \nabla \cdot \left(\frac{R_s \mathbf{u}_o}{B_o} + \frac{\mathbf{u}_g}{B_g} \right) + q_g \delta_{well} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_w C_p}{B_w} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial t} [(1-\phi) \rho_r C_a] + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{u}_w C_p}{B_w} \right) + q_w C_p \delta_{well} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_w C_s}{B_w} \right) \right] + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{u}_w C_s}{B_w} \right) + q_w C_s \delta_{well} = 0, \quad (5)$$

$$S_w + S_o + S_g = 1. \quad (6)$$

Используются следующие обозначения: t — время; ϕ — пористость породы; S_w — водонасыщенность; S_o — нефтенасыщенность; S_g — газонасыщенность; B_w, B_o, B_g — объемные коэффициенты воды, нефти и свободного газа соответственно; R_s — коэффициент растворимости газа в нефти; p_b — давление насыщения нефти, которое постоянно при $S_g = 0$ и равно пластовому давлению при $S_g > 0$; $\mathbf{u}_w, \mathbf{u}_o, \mathbf{u}_g$ — скорости фильтрации воды, нефти и свободного газа соответственно; C_p — масса полимера, растворенного в единице объема воды; C_s — масса соли, растворенной в единице объема воды; C_a — масса полимера, адсорбированного на поверхности единицы массы породы (изотерма адсорбции); ρ_r — плотность породы; q_w, q_o, q_g — добытый или закачанный скважиной объем флюида в единицу времени для воды, нефти и свободного газа соответственно; δ_{well} — дельта-функция Дирака (размерностью $1/\text{м}^3$), локализованная в точке расположения скважины.

Уравнения (1)–(3), соответственно, уравнения сохранения массы для водяной, нефтяной и газовой компонент, отвечают классической модели нелетучей нефти. Уравнения (4) и (5) описывают законы сохранения массы для полимерной и соляной компонент, (6) — замыкающее уравнение для насыщенностей. Скорости движения флюидов в пористой среде задаются линейным законом Дарси:

$$\mathbf{u}_w = -\frac{kk_{rw}}{\mu_{w_eff}R}\nabla p, \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_o = -\frac{kk_{ro}}{\mu_o}\nabla p, \quad (8)$$

$$\mathbf{u}_g = -\frac{kk_{rg}}{\mu_g}\nabla p. \quad (9)$$

Источники, моделирующие наличие скважин, представляются уравнениями:

$$q_w = \frac{2\pi kh}{\ln(r_{eq}/r_w)} \frac{k_{rw}}{\mu_{w_eff}B_w R} (p - p_{bh}), \quad (10)$$

$$q_o = \frac{2\pi kh}{\ln(r_{eq}/r_w)} \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} (p - p_{bh}), \quad (11)$$

$$q_g = \frac{2\pi kh}{\ln(r_{eq}/r_w)} \left(\frac{k_{rg}}{\mu_g B_g} + \frac{R_s k_{ro}}{\mu_o B_o} \right) (p - p_{bh}). \quad (12)$$

В уравнениях (7)–(12) использованы обозначения: p — пластовое давление; k — проницаемость породы; k_{rw} , k_{ro} , k_{rg} — относительные фазовые проницаемости воды, нефти и свободного газа соответственно; μ_{w_eff} — эффективная вязкость воды; μ_o , μ_g — вязкости нефти и свободного газа соответственно; R — коэффициент сопротивления, отражающий эффект снижения фазовой проницаемости воды из-за адсорбции молекул полимера на поверхности породы; h — толщина пласта; r_{eq} — эквивалентный радиус скважинной ячейки [11]; r_w — радиус ствола скважины; p_{bh} — забойное давление скважины. Коэффициент сопротивления вычисляется по формуле:

$$R = 1 + (R_{res} - 1) \frac{C_a}{C_{a\max}},$$

где R_{res} — коэффициент остаточного сопротивления, $C_{a\max}$ — максимальное значение изотермы адсорбции.

Основные предположения, учитываемые в модели:

- температура флюидов всегда остается постоянной;
- капиллярные давления между фазами равны нулю;
- вода не смешивается с нефтяной и газовой фазами;
- вода, полимер и соль полностью смешиваются, образуя однородный раствор;
- газовая компонента включает в себя свободный и растворенный в нефти газ;
- объемные коэффициенты воды, нефти и газа не зависят от концентраций полимера и соли;
- пористость и объемные коэффициенты являются функциями пластового давления;
- равновесный коэффициент растворимости газа в нефти зависит от пластового давления;
- относительные фазовые проницаемости представляют собой функции водонасыщенности и газонасыщенности;
- эффективная вязкость воды обуславливается концентрациями полимера и соли; значения вязкости определяются по результатам лабораторных исследований;
- изотерма адсорбции есть функция концентрации полимера;
- адсорбция молекул полимера на поверхности породы снижает фазовую проницаемость воды и не влияет на фазовые проницаемости нефти и газа.

3. Постановка задачи

Считается, что фильтрация флюидов происходит в тонком пласте, свойства которого слабо меняются вдоль вертикальной оси. Если пренебречь гравитационными эффектами и изменением всех величин вдоль вертикали, то можно использовать плоское двумерное представление пласта: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Граница пласта имеет вид замкнутого контура: $\Gamma = \partial\Omega$. Пласт вскрыт несколькими вертикальными скважинами, которые

работают в режиме постоянного забойного давления. Проницаемость породы задана неоднородной и изотропной. Толщина пласта, плотность породы, коэффициент остаточного сопротивления, вязкости чистой воды, нефти и газа известны и постоянны. Предполагается, что функциональные зависимости $\phi(p)$, $B_w(p)$, $B_o(p, p_b)$, $B_g(p)$, $k_{rw}(S_w)$, $k_{ro}(S_w, S_g)$, $k_{rg}(S_g)$, $R_s(p)$, $\mu_{w_eff}(C_p, C_s)$, $C_a(C_p)$ определены и в начальный момент времени: $p(t=0, \vec{r}) = p_0(\vec{r})$, $S_w(t=0, \vec{r}) = S_{w0}(\vec{r})$, $S_g(t=0, \vec{r}) = S_{g0}(\vec{r})$, $p_b(t=0, \vec{r}) = p_{b0}(\vec{r})$, $C_p(t=0, \vec{r}) = 0$, $C_s(t=0, \vec{r}) = C_{s0}(\vec{r})$. Граница пласта считается непроницаемой:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0.$$

Необходимо вычислить значения p , S_w , S_g , R_s , C_p , C_s , q_w , q_o , q_g в моменты времени $t > 0$.

4. Построение расчетной сетки

Двумерная сетка Вороного строится по заданному на плоскости набору точек, которые называются узлами сетки. Сетка представляет такое разбиение плоскости, при котором каждая ячейка содержит множество точек, более близких к одному из узлов, чем к любому другому узлу (Рис. 1). Узлы сетки обозначены P_i , $i=1, \dots, N$ (Рис. 2), и соответствующие им ячейки сетки Вороного G_i определяются следующим образом:

$$G_i = \left\{ x \in \Omega \mid |x, P_i| \leq |x, P_j|, \quad j=1, \dots, N, \quad i \neq j \right\}, \quad i=1, \dots, N.$$

Для представления пласта в виде сетки узловые точки располагаются на контуре Γ и по определенному шаблону — внутри контура. Сначала строится разбиение Вороного всей плоскости \mathbb{R}^2 согласно алгоритму заматающей прямой [12]. После этого применяется алгоритм, предложенный в [7], в соответствии с которым отсекаются части ячеек, выходящих за пределы контура Γ (Рис. 1).

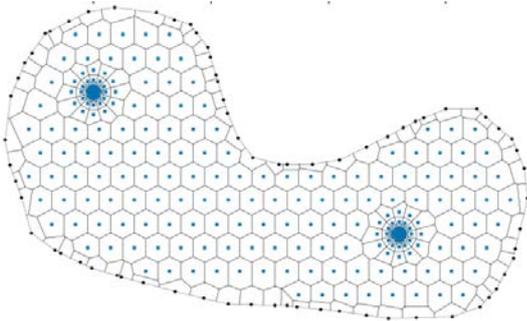


Рис. 1. Представление пласта сеткой Вороного с гексагональным шаблоном и локальным измельчением ячеек вблизи двух скважин; точками обозначены узлы сетки

В местах расположения скважин можно увеличить плотность узлов и расположить их от центра скважины радиально, для того чтобы эффективнее описать пластовое давление в этих областях. Увеличение плотности узлов в какой-либо части области приводит к более мелкой сетке, что позволяет достичь более точного решения задачи, поэтому целесообразно использовать мелкую сетку в областях пласта с высоким градиентом давления и сильной неоднородностью проницаемости.

Нужно отметить одно важное свойство сетки Вороного: отрезок, соединяющий узлы двух любых соседних ячеек, перпендикулярен их общей грани (Рис. 2). Благодаря этому градиент пластового давления в направлении нормали к общей грани двух ячеек можно аппроксимировать конечной разностью давлений в узлах этих ячеек — точно так же, как и в случае прямоугольных сеток.

5. Решение задачи

Несмотря на то что расчетная сетка двумерная, считается, что ячейки трехмерные и имеют глубину h , равную толщине пласта. Проведем дискретизацию одного из уравнений, например (4). Проинтегрируем его по объему ячейки i :

$$\int_{V_i} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_w C_p}{B_w} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial t} [(1-\phi) \rho_r C_a] \right\} dV + \int_{V_i} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{u}_w C_p}{B_w} \right) dV + \int_{V_i} q_w C_p \delta_{well} dV = 0.$$

Нижний индекс i определяет среднее значение величин внутри i -й ячейки. Замена подинтегральных величин их средними значениями и применение формулы Гаусса–Остроградского [13] приводит

к уравнению:

$$V_i \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_w C_p}{B_w} \right) + (1-\phi) \rho_r C_a \right] + \int_{S_i} \frac{C_p}{B_w} \mathbf{u}_w \cdot \mathbf{n} dS + q_{wi} C_{pi} = 0.$$

Интеграл по поверхности S_i ячейки i в уравнении представляется в виде суммы поверхностных интегралов по каждой грани этой ячейки:

$$V_i \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_w C_p}{B_w} \right) + (1-\phi) \rho_r C_a \right] + \sum_{j \in \Psi(i)} \frac{C_{p\ ij}}{B_w} \int_{S_{ij}} \mathbf{u}_w \cdot \mathbf{n} dS + q_{wi} C_{pi} = 0,$$

$$V_i \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_w C_p}{B_w} \right) + (1-\phi) \rho_r C_a \right] + \sum_{j \in \Psi(i)} \frac{C_{p\ ij} s_{ij}}{B_w} \mathbf{u}_w \cdot \mathbf{n}_{ij} + q_{wi} C_{pi} = 0;$$

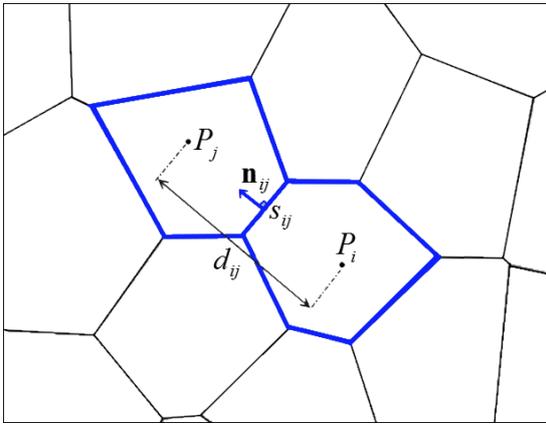


Рис. 2. Вычисление потока между ячейками сетки

множество ячеек, смежных с i -й ячейкой, обозначается $\Psi(i)$; S_{ij} – грань между i -й и j -й ячейками, а s_{ij} – площадь этой грани; \mathbf{n}_{ij} – нормаль к грани S_{ij} , направленная в сторону ячейки j (Рис. 2); Нижний индекс ij у всех остальных величин говорит, что это среднее значение величины на грани S_{ij} .

Для скорости флюида (7) по нормали к грани применяется двухточечная аппроксимация:

$$V_i \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_w C_p}{B_w} \right) + (1-\phi) \rho_r C_a \right] + \sum_{j \in \Psi(i)} C_{p\ ij} s_{ij} \frac{k_{ij} k_{rw\ ij}}{\mu_{w_eff\ ij} B_w R_{ij}} \left(\frac{p_i - p_j}{d_{ij}} \right) + q_{wi} C_{pi} = 0.$$

Здесь: p_i, p_j – значения пластового давления в узловых точках P_i и P_j соответственно; d_{ij} – расстояние между узловыми точками P_i и P_j ; производная по времени аппроксимируется конечной разностью с шагом Δt :

$$\frac{V_i}{\Delta t} \left[\left(\phi \frac{S_w C_p}{B_w} + (1-\phi) \rho_r C_a \right)^{n+1} - \left(\phi \frac{S_w C_p}{B_w} + (1-\phi) \rho_r C_a \right)^n \right] + \sum_{j \in \Psi(i)} \left[\frac{s}{d} \frac{k k_{rw} C_p}{\mu_{w_eff} B_w R} \right]_{ij}^{n+1} (p_i^{n+1} - p_j^{n+1}) + q_{wi} C_{pi}^{n+1} = 0.$$

Далее вычисляются :

– значение проницаемости породы на грани как среднее гармоническое проницаемостей ячеек [14]

$$k_{ij} = \frac{2}{1/k_i + 1/k_j};$$

– значения относительной фазовой проницаемости, объемного коэффициента, вязкости, коэффициента сопротивления и концентрации полимера на грани вверх по потоку

$$\left[\frac{k_{rw} C_p}{\mu_{w_eff} B_w R} \right]_{ij} = \left[\frac{k_{rw} C_p}{\mu_{w_eff} B_w R} \right]_i, \quad p_i > p_j,$$

$$\left[\frac{k_{rw} C_p}{\mu_{w_eff} B_w R} \right]_{ij} = \left[\frac{k_{rw} C_p}{\mu_{w_eff} B_w R} \right]_j, \quad p_i \leq p_j;$$

– эквивалентный радиус скважинной ячейки

$$r_{eq} = \left(e^{-2\pi kh} \prod_{j \in \Psi(i)} d_{ij}^{T_{ij}} \right)^{1/\sum_{j \in \Psi(i)} T_{ij}}, \quad T_{ij} = \frac{k_{ij} S_{ij}}{d_{ij}}.$$

После проведения аналогичным образом дискретизации уравнений (1)–(3) и (5) получается система из пяти нелинейных уравнений для i -й ячейки сетки:

$$\frac{V_i}{\Delta t} \left[\left(\phi \frac{S_w}{B_w} \right)^{n+1} - \left(\phi \frac{S_w}{B_w} \right)^n \right] + \sum_{j \in \Psi(i)} \left[\frac{s}{d} \frac{kk_{rw}}{\mu_{w_eff} B_w R} \right]_{ij}^{n+1} (p_i^{n+1} - p_j^{n+1}) + q_{wi}^{n+1} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{V_i}{\Delta t} \left[\left(\phi \frac{S_o}{B_o} \right)^{n+1} - \left(\phi \frac{S_o}{B_o} \right)^n \right] + \sum_{j \in \Psi(i)} \left[\frac{s}{d} \frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o} \right]_{ij}^{n+1} (p_i^{n+1} - p_j^{n+1}) + q_{oi}^{n+1} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{V_i}{\Delta t} \left[\left(\phi \frac{S_g}{B_g} + \phi \frac{R_s S_o}{B_o} \right)^{n+1} - \left(\phi \frac{S_g}{B_g} + \phi \frac{R_s S_o}{B_o} \right)^n \right] + \sum_{j \in \Psi(i)} \left[\frac{ks}{d} \left(\frac{k_{rg}}{\mu_g B_g} + \frac{R_s k_{ro}}{\mu_o B_o} \right) \right]_{ij}^{n+1} (p_i^{n+1} - p_j^{n+1}) + q_{gi}^{n+1} = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{V_i}{\Delta t} \left[\left(\phi \frac{S_w C_p}{B_w} + \rho_r C_a \right)^{n+1} - \left(\phi \frac{S_w C_p}{B_w} + (1-\phi) \rho_r C_a \right)^n \right] + \\ & + \sum_{j \in \Psi(i)} \left[\frac{s}{d} \frac{kk_{rw} C_p}{\mu_{w_eff} B_w R} \right]_{ij}^{n+1} (p_i^{n+1} - p_j^{n+1}) + q_{wi}^{n+1} C_{pi}^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{V_i}{\Delta t} \left[\left(\phi \frac{S_w C_s}{B_w} \right)^{n+1} - \left(\phi \frac{S_w C_s}{B_w} \right)^n \right] + \sum_{j \in \Psi(i)} \left[\frac{s}{d} \frac{kk_{rw} C_s}{\mu_{w_eff} B_w R} \right]_{ij}^{n+1} (p_i^{n+1} - p_j^{n+1}) + q_{wi}^{n+1} C_{si}^{n+1} = 0. \quad (17)$$

При сетке с N ячейками система будет включать $5N$ уравнений вида (13)–(17). В качестве неизвестных переменных принимаются p_i , S_{wi} , «газовая переменная в i -й ячейке», C_{pi} , C_{si} для $i=1, \dots, N$. Если нефть в ячейке насыщена газом ($S_{gi} > 0$), то «газовая переменная» является газонасыщенностью S_{gi} , в противном случае — коэффициентом растворимости газа R_{si} . Нефтенасыщенность S_{oi} , в силу уравнения (6), — величина известная.

При условии, что все $5N$ ($i=1, \dots, N$) переменных на временном слое n идентифицированы, система уравнений (13)–(17) становится замкнутой. Ее решением будут значения неизвестных на временном слое $n+1$. Эту систему можно представить в векторной форме:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{n+1}) = 0. \quad (18)$$

Условие непроницаемости на границе области выполняется за счет того, что в уравнениях сохранения массы (13)–(17) суммирование потоков через границу ячейки ведется только по граням, которые образуют две соседние ячейки. Система (18) решается итерационным методом Ньютона [15]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{v+1} &= \mathbf{x}^v - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^v) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}^v), \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}^v) &= \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}^v)}{d\mathbf{x}^v}. \end{aligned}$$

В качестве начального приближения выбирается \mathbf{x}^n , а в качестве конечного \mathbf{x}^{n+1} выступает вектор \mathbf{x}^{v+1} такой, что $|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{v+1})| < \varepsilon$.

Самая большая часть вычислительных затрат приходится на решение системы линейных уравнений на каждом шаге метода Ньютона. Порядок этой системы линейно зависит от количества ячеек в расчетной сетке, поэтому уменьшение количества ячеек напрямую сокращает как время счета, так и ресурс памяти, необходимые для реализации алгоритма.

6. Численный эксперимент

Кривые фазовых проницаемостей воды и газа были построены методом, предложенным в [16], а фазовая проницаемость нефти вычислена по модели из [17]. Зависимость эффективной вязкости воды от локальных концентраций полимера C_p и соли C_s принята кусочно-линейной (Рис. 3). Повышенная минерализация пластовых вод нарушает устойчивость и структуру молекул полимера и тем самым снижает эффект загущения воды. Используются также линейные объемные коэффициенты воды и дегазированной нефти и линейная изотерма адсорбции полимера. Пористость и проницаемость породы были постоянными. В таблице приведены значения основных параметров задачи.

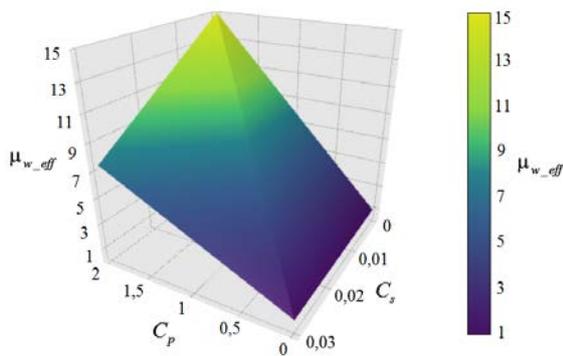


Рис. 3. Зависимость эффективной вязкости воды μ_{w_eff} в численном эксперименте от локальных концентраций полимера C_p и соли C_s

Закачка раствора полимера проводилась 1750 суток (57 месяцев). Концентрация полимера в нагнетаемом растворе была равна 2 кг/м^3 . После этого 2700 суток (90 месяцев) закачивалась пресная вода. Численное моделирование выполнено для 6-ти различных конфигураций дискретизации расчетной области: на гексагональной локально измельченной сетке Вороного с 178, 491 и 2332 ячейками и локально измельченной прямоугольной сетке с 185, 505 и 2368 ячейками (Рис. 4).

Таблица. Основные параметры задачи

Название параметра	Обозначение, размерность	Значение
Размеры пласта (ширина/длина/толщина)	м	475/475/10
Пористость	ϕ , м	0,2
Проницаемость породы	k , мД	50
Плотность породы	ρ_p , кг/м ³	2650
Начальное пластовое давление	p_0 , атм	200
Начальное давление насыщения	p_{b0} , атм	170
Начальная газонасыщенность	S_{g0}	0
Начальная концентрация соли в пласте	C_{s0} , кг/м ³	0,02
Вязкость чистой воды ($C_p = 0, C_s = 0$)	μ_{w_eff} , сПз	0,5
Вязкость нефти	μ_o , сПз	3
Вязкость газа	μ_g , сПз	0,01
Сжимаемость воды	1/атм	4×10^{-5}
Сжимаемость дегазированной нефти	1/атм	15×10^{-5}
Максимальная концентрация полимера в растворе	$C_{p\max}$, кг/м ³	2
Максимальная концентрация соли в растворе	$C_{s\max}$, кг/м ³	0,03
Эффективная вязкость воды при максимальной концентрации полимера и нулевой концентрации соли ($C_p = C_{p\max}, C_s = 0$)	μ_{w_eff} , сПз	15
Эффективная вязкость воды при максимальных концентрациях полимера и соли ($C_p = C_{p\max}, C_s = C_{s\max}$)	μ_{w_eff} , сПз	7,5
Коэффициент остаточного сопротивления	R_{res}	1,2
Максимальная величина адсорбции	$C_{a\max}$, кг/кг	$1,25 \times 10^{-5}$
Забойное давление нагнетающей скважины	p_{bh1} , атм	300
Забойное давление добывающей скважины	p_{bh2} , атм	150
Расстояние между скважинами	м	530

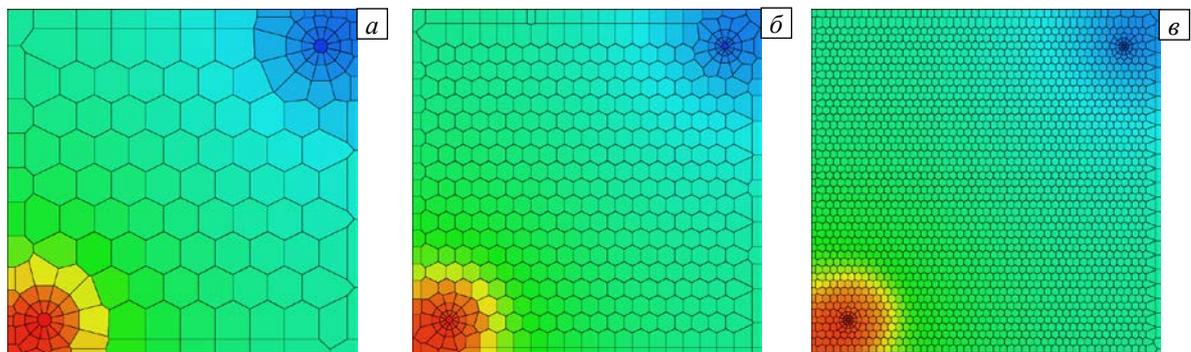


Рис. 4. Конфигурации сеток и распределение пластового давления на 60-м месяце заводнения: гексагональная локально измельченная сетка Вороного (а-в) и прямоугольная локально измельченная сетка (г-е) с количеством ячеек: (а) – 178, (б) – 491, (в) – 2332, (г) – 185, (д) – 505, (е) – 2368

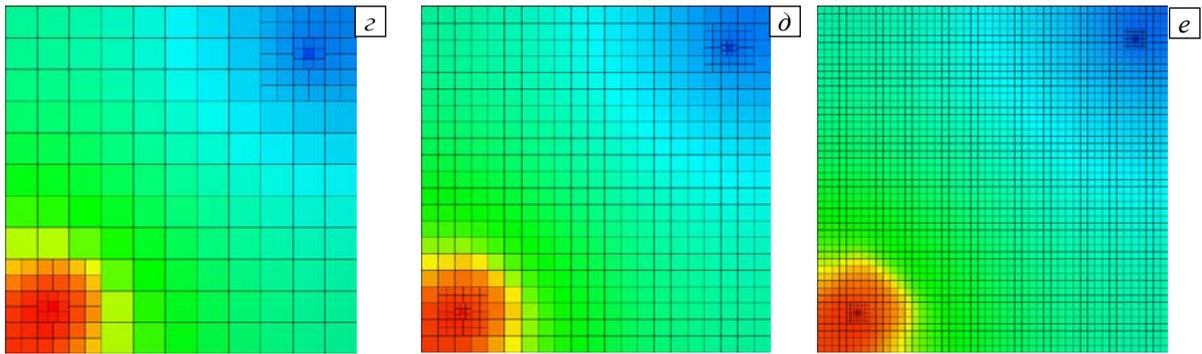
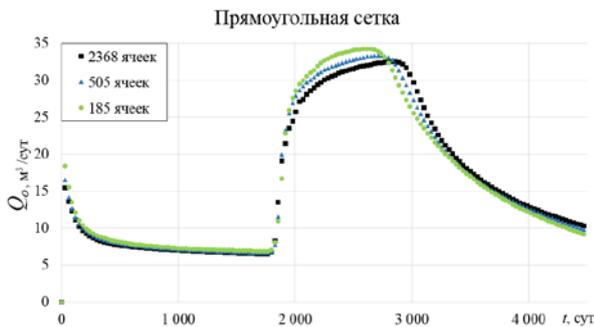
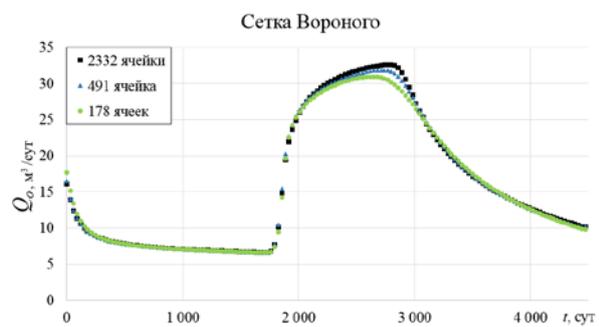


Рис. 4. Продолжение

Рис. 5. Дебит нефти Q_o , рассчитанный на локально измельченной прямоугольной сеткеРис. 6. Дебит нефти Q_o , рассчитанный на гексагональной локально измельченной сетке Вороного

На протяжении всего времени закачки оторочки полимера наблюдается падение дебита нефти (Рис. 6) из-за увеличения областей повышенной вязкости в пласте. На 1750-е сутки от начала закачки пресной воды размер этих областей уменьшается за счет низкой вязкости пресной воды и частичной адсорбции полимера на поверхности породы, и дебит нефти резко увеличивается. После 2800 суток нагнетаемая вода достигает добывающей скважины, за этим следует снижение дебита нефти и возрастание дебита воды.

На рисунке 4 заметно, что сетка Вороного за счет радиального характера измельчения сетки вблизи скважин более реалистично изображает распределение пластового давления, чем прямоугольная сетка с таким же количеством ячеек.

По рисункам 5 и 6 можно сделать следующий вывод: по сравнению с локально измельченной прямоугольной сеткой локально измельченная гексагональная сетка Вороного дает меньшую дисперсию дебита нефти при изменении количества ячеек. Для такой сетки дебиты, полученные на малом количестве ячеек, близки к дебитам, вычисленным на большом количестве ячеек. Это объясняется двумя причинами: во-первых, радиальный характер локального измельчения и гексагональная форма ячеек сетки Вороного снижают эффект ориентации; во-вторых, ячейки со скважинами не меняют своего положения.

На рисунке 7 демонстрируется эффект ориентации сетки, выражающийся в искажении формы фронта воды. По сравнению с прямоугольной сеткой сетка Вороного позволяет точнее воссоздать картину продвижения фронта полимерного заводнения за счет использования гексагонального шаблона, но при этом, вследствие увеличения ширины ленты матрицы Якоби, повышаются вычислительные затраты.

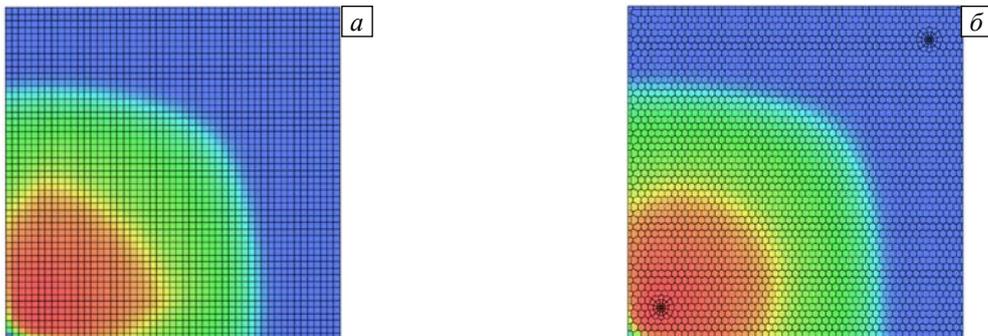


Рис. 7. Распределение водонасыщенности на 80-м месяце заводнения; (а) – прямоугольная сетка с 2601 ячейкой, (б) – гексагональная локально измельченная сетка Вороного с 2678 ячейками

7. Верификация модели

Для верификации модели проведено сравнение результатов моделирования по ней с расчетными данными, полученными с помощью программных пакетов — симуляторов рассматриваемого технологического процесса: открытого OPM Flow [18] (версия 2016.10) и коммерческого Schlumberger Eclipse (версия 2010). Данные программы поддерживают аналогичные модели нелетучей нефти и полимерного заводнения. Однако OPM Flow не учитывает наличие компонента соли, поэтому при проведении тестирования входные данные из предыдущего эксперимента были модифицированы: вязкость раствора полимера имела вид линейной функции концентрации полимера, не зависящей от концентрации соли. По той же причине в расчете эквивалентного радиуса скважинной ячейки использовался классический метод Писмана [19]. Все расчеты проводились на прямоугольной сетке с 2601 ячейкой. Для всех симуляторов задавались одинаковые значения максимальной ошибки материального баланса, выступающей в качестве одного из критериев сходимости метода Ньютона. Количество итераций метода Ньютона в OPM Flow составило 1127, в Eclipse — 346, в расчете по предложенной модели — 377. Вычисленные дебиты нефти и их абсолютные разности показаны на рисунке 8. При расчете по предложенной модели абсолютное отклонение дебита нефти от найденного по программам-симуляторам не превысило: от Eclipse 0,17%; от OPM Flow 8%.

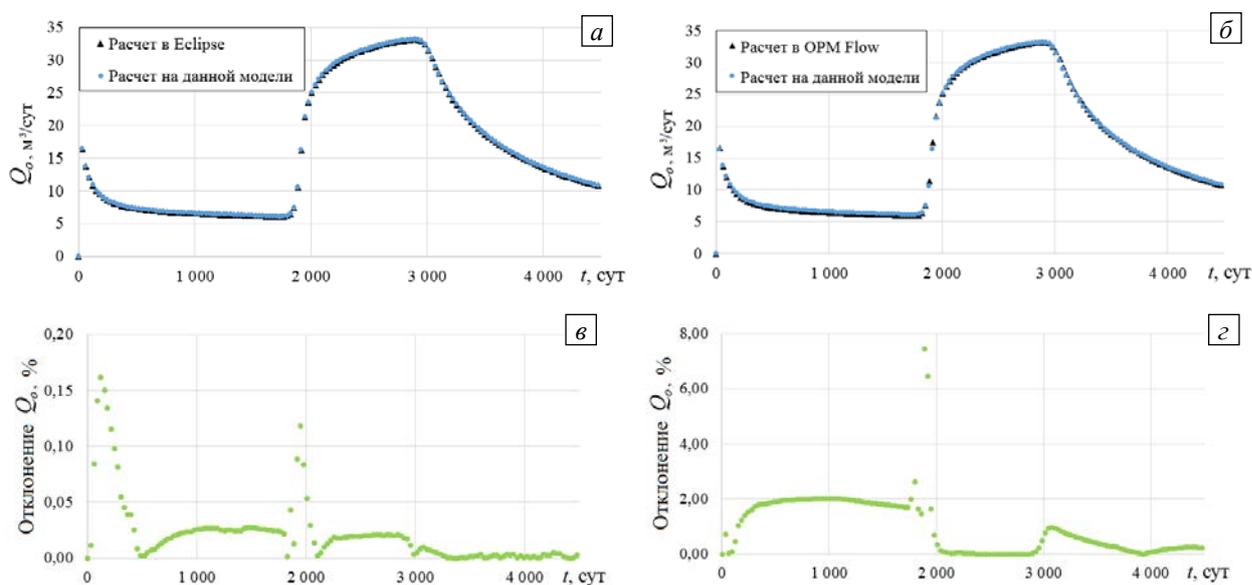


Рис. 8. К сопоставлению результатов, полученных по авторской модели, с данными, рассчитанными в симуляторах: (а), (б) – дебиты нефти; (в), (г) – абсолютное отклонение дебита по модели авторов, соответственно, от дебитов по Eclipse и OPM Flow

При вычислении эквивалентного радиуса скважинной ячейки по формуле из [7] максимальное отклонение дебита нефти в расчете по предложенной модели от дебита нефти в программе Eclipse составило 0,7%. Последнее наблюдение говорит о том, что формула из [7] дает близкие результаты к формуле из [19], и это оправдывает применение формулы из [7] для сетки Вороного.

8. Заключение

Исследована математическая модель полимерного заводнения, учитывающая осадкообразование и минерализацию пластовой воды. Верифицирован алгоритм решения соответствующих уравнений на неструктурированной сетке Вороного. Показано, что при изменении количества ячеек сетка Вороного дает меньшую дисперсию дебита нефти по сравнению с прямоугольной сеткой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-41-020226-p_a).

Литература

1. Chang, H.L. Polymer flooding technology - yesterday, today, and tomorrow // Journal of Petroleum Technology. – 1978. – Vol. 30, no. 8. – P. 1113-1128. [DOI](#)
2. Bondor P.L., Hirasaki G.J., Tham M.J. Mathematical simulation of polymer flooding in complex reservoirs // Society of Petroleum Engineers Journal. – 1972. – Vol. 12, no. 5. – P. 369-382. [DOI](#)
3. Clifford P.J., Sorbie K.S. The effects of chemical degradation on polymer flooding // SPE Oilfield and Geothermal Chemistry Symposium. – Phoenix, Arizona, 1985. [DOI](#)
4. Luo H., Mohanty K.K., Delshad M., Pope G. A. Modeling and upscaling unstable water and polymer floods: dynamic characterization of the effective finger zone // SPE Improved Oil Recovery Conference. – Tulsa, Oklahoma, 2016. [DOI](#)

5. Forsyth P.A. A control volume finite element method for local mesh refinement // SPE Symposium on Reservoir Simulation. – Houston, Texas, 1989. [DOI](#)
6. Heinemann Z.E., Brand C., Munka M., Chen Y.M. Modeling reservoir geometry with irregular grids // SPE Reservoir Engineering. – 1991. – Vol. 6, no. 2. – P. 225-232. [DOI](#)
7. Palagi C.L., Aziz K. Use of Voronoi grid in reservoir simulation // SPE Advanced Technology Series. – 1994. – Vol. 2, no. 2. – P. 69-77. [DOI](#)
8. Kim SK., Bae GO., Lee KK., Geosci J. Improving accuracy and flexibility of numerical simulation of geothermal heat pump systems using Voronoi grid refinement approach // Geosciences Journal. – 2015. – Vol. 19, no. 3. – P. 527-535. [DOI](#)
9. Ding X.Y., Fung, L.S.K. An unstructured gridding method for simulating faulted reservoirs populated with complex wells // spe reservoir simulation symposium. – Houston, Texas, 2015. [DOI](#)
10. Schlumberger Ltd. ECLIPSE Technical Description, 2010. – 1758 p.
11. Abou-Kassem J. H., Aziz K. Analytical well models for reservoir simulation // Society of Petroleum Engineers. – 1985. – Vol. 25, no. 4. – P. 573-579. [DOI](#)
12. Fortune S. A sweepline algorithm for Voronoi diagrams // Proceedings of the second annual symposium on Computational geometry. – ACM, New York, USA, 1987. – P. 313-322. [DOI](#)
13. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В трех томах. Т.2. – М.: Высшая школа, 2004. – 720 с.
14. Cardwell W.T., Parsons R.L. Average permeabilities of heterogeneous oil sands // Transactions of the AIME. – 1945. – Vol. 160, no. 1. – P. 34-42. [DOI](#)
15. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
16. Corey A.T. The interrelation between gas and oil relative permeabilities // Producers monthly. – 1954. – Vol. 19, no. 1. – P. 38-41.
17. Stone H.L. Estimation of three-phase relative permeability and residual oil data // Journal of Canadian Petroleum Technology. – 1973. – Vol. 12, no. 4. – P. 53-61. [DOI](#)
18. <http://opm-project.org> (дата обращения: 23.10.2017).
19. Peaceman D.W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability // Society of Petroleum Engineers Journal. – 1983. – Vol. 23, no. 3. – P. 531-543. [DOI](#)

References

1. Chang, H.L. Polymer flooding technology - yesterday, today, and tomorrow. *Journal of Petroleum Technology*, 1978, vol. 30, no. 8, P. 1113-1128. [DOI](#)
2. Bondor P.L., Hirasaki G.J., Tham M.J. Mathematical simulation of polymer flooding in complex reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1972, vol. 12, no. 5, P. 369-382. [DOI](#)
3. Clifford P.J., Sorbie K.S. The effects of chemical degradation on polymer flooding. *SPE Oilfield and Geothermal Chemistry Symposium*, Phoenix, Arizona, 1985. [DOI](#)
4. Luo H., Mohanty K.K., Delshad M., Pope G. A. Modeling and upscaling unstable water and polymer floods: dynamic characterization of the effective finger zone. *SPE Improved Oil Recovery Conference*, Tulsa, Oklahoma, 2016. [DOI](#)
5. Forsyth P.A. A control volume finite element method for local mesh refinement. *SPE Symposium on Reservoir Simulation*, Houston, Texas, 1989. [DOI](#)
6. Heinemann Z.E., Brand C., Munka M., Chen Y.M. Modeling reservoir geometry with irregular grids. *SPE Reservoir Engineering*, 1991, vol. 6, no. 2, P. 225-232. [DOI](#)
7. Palagi C.L., Aziz K. Use of Voronoi grid in reservoir simulation. *SPE Advanced Technology Series*, 1994, vol. 2, no. 2, pp. 69-77. [DOI](#)
8. Kim SK., Bae GO., Lee KK., Geosci J. Improving accuracy and flexibility of numerical simulation of geothermal heat pump systems using Voronoi grid refinement approach. *Geosciences Journal*, 2015, vol. 19, no. 3, P. 527-535. [DOI](#)
9. Ding X.Y., Fung, L.S.K. An unstructured gridding method for simulating faulted reservoirs populated with complex wells. *SPE Reservoir Simulation Symposium*, Houston, Texas, 2015. [DOI](#)
10. Schlumberger Ltd. ECLIPSE Technical Description, 2010. – 1758 p.
11. Abou-Kassem J. H., Aziz K. Analytical well models for reservoir simulation. *Society of Petroleum Engineers*, 1985, vol. 25, no. 4, P. 573-579. [DOI](#)
12. Fortune S. A sweepline algorithm for Voronoi diagrams. *Proceedings of the second annual symposium on Computational geometry (SCG '86)*, ACM, New York, USA, 1987, P. 313-322. [DOI](#)
13. Kudryavtsev L.D. *Kurs matematicheskogo analiza. V treh tomah. T.2* [Course of mathematical analysis. In three volumes. Vol. 2]. M.: Vysshaya Shkola, 2004, 720 p.
14. Cardwell W.T., Parsons R.L. Average permeabilities of heterogeneous oil sands. *Transactions of the AIME*, 1945, vol. 160, no. 1, P. 34-42. [DOI](#)
15. Калиткин Н.Н. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. M.: Nauka, 1978. – 512 p.
16. Corey A.T. The interrelation between gas and oil relative permeabilities. *Producers monthly*, 1954, vol. 19, no. 1, pp. 38-41.
17. Stone H.L. Estimation of three-phase relative permeability and residual oil data. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 1973, vol. 12, no. 4, P. 53-61. [DOI](#)
18. <http://opm-project.org> (accessed 23 October 2017).
19. Peaceman D.W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1983, vol. 23, no. 3, pp. 531-543. [DOI](#)

Поступила в редакцию 07.11.2017; опубликована в электронном виде 30.03.2018.

Сведения об авторах

Киреев Тимур Фаритович, асп., Уфимский государственный авиационный технический университет (УГАТУ), 450008, Республика Башкортостан, Уфа, ул. К. Маркса, д. 12; e-mail: kireevtf@mail.ru.

Булгакова Гузель Талгатовна, проф., дфмн, проф., УГАТУ; e-mail: bulgakova.guzel@mail.ru.

Хатмуллин Ильдус Фанусович, ктн, гнс, ООО «Уфимский научно-технический центр», 450076, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Аксакова 59; e-mail: khif@ufntc.ru.