

DOI: [10.7242/1999-6691/2017.10.4.36](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.4.36)

УДК 539.3

ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

А.О. Ватульян^{1,2}, С.А. Нестеров²¹ Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация² Южный математический институт – филиал ВЦ РАН, Владикавказ, Российская Федерация

Представлена общая постановка коэффициентной обратной задачи термоэлектروупругости для неоднородного тела. Обратная задача состоит в определении материальных характеристик материала конечного неоднородного термоэлектроупругого тела как функций координат. Сформулирована слабая постановка в трансформантах Лапласа. Для решения обратной задачи на ее основе применяется метод линеаризации. Получены операторные уравнения, связывающие искомые и измеряемые в эксперименте функции. В качестве примера рассмотрено решение задачи для термоэлектроупругого стержня. При этом соответствующая прямая задача термоэлектроупругости посредством преобразования Лапласа сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, построению решений в виде рациональных функций относительно трансформант и нахождению оригиналов в соответствии с теорией вычетов. Для решения обратной задачи термоэлектроупругости разработан итерационный алгоритм, на каждом шаге которого путем решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода находятся поправки восстанавливаемых характеристик. Проведено исследование влияния изменения материальных характеристик на дополнительную информацию, необходимую для решения обратной задачи. Выполнены вычислительные эксперименты по восстановлению законов распределения неоднородности в классах степенных и экспоненциальных функций, чаще всего используемых при моделировании функционально-градиентных материалов. Даны рекомендации по выбору наиболее информативных временных диапазонов для съема дополнительной информации. Серия вычислительных экспериментов показала, что погрешность восстановления безразмерных характеристик не превышает 5%.

Ключевые слова: термоэлектроупругость, слабая постановка, идентификация, стержень, вычислительный эксперимент

THE DYNAMIC PROBLEM OF THERMOELECTROELASTICITY FOR FUNCTIONALLY GRADED LAYER

A.O. Vatulyan^{1,2} and S.A. Nesterov¹¹ Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation² Southern Mathematical Institute of VSC RAS, Vladikavkaz, Russian Federation

A general formulation of the coefficient inverse thermoelasticity problem for an inhomogeneous body is presented. The inverse problem is to determine the material characteristics of a finite inhomogeneous thermoelectric body as a function of the coordinates. A weak formulation is formulated. To solve the inverse problem on the basis of a weak formulation in Laplace transforms and the linearization method, operator equations are obtained that relate the functions sought and measured in the experiment. As an example, we consider the problem for a thermoelectroelastic rod. The direct problem of thermoelectroelasticity for a rod after the Laplace transform is solved on the basis of reduction to the system of Fredholm integral equations of the second kind, construction of solutions in the form of rational functions relative to transformants, and finding the originals on the basis of the theory of residues. To solve the inverse thermoelasticity problem, an iterative process is constructed, at each stage of which there are corrections of the reconstructed characteristics by solving the Fredholm integral equations of the first kind. The effect of changing the material characteristics on the additional information needed to solve the inverse problem is investigated. Computational experiments were carried out to reconstruct the laws of distribution of inhomogeneity in the classes of power and exponential functions, most often used in the modeling of functional gradient materials. Recommendations are given on the choice of the most informative time ranges for the extraction of additional information. A series of computational experiments showed that the error in restoring the dimensionless characteristics does not exceed 5%.

Key words: thermoelectroelasticity, weak setting, identification, rod, computational experiment

1. Введение

В последние годы во многих отраслях промышленности стали широко применяться диагностические приборы и датчики, функционирование которых базируется на явлении пирозффекта, а поведение материала описывается уравнениями термоэлектроупругости.

Уравнения термоэлектроупругости впервые были получены в начале 60-х годов XX века Миндлиным [1, 2]. В настоящее время задачи, рассматривающие колебания однородных и слоистых термоэлектроупругих тел, представлены в литературе достаточно подробно [3–8].

Для совершенствования работы устройств на основе пирозффекта используются новые, в том числе функционально-градиентные пироматериалы (ФГПМ) и учитывается неоднородность поляризации. Под ФГПМ понимаются пьезокомпозицы, обладающие переменными физическими свойствами. Их материальные характеристики являются не константами, а некоторыми функциями пространственных координат; скачки свойств при переходе через поверхность раздела, а также расслоение и растрескивание, присущие слоистым материалам, исключаются.

Решения задач термоэластостатики для ФГПМ рассмотрены главным образом для степенных и экспоненциальных законов неоднородности [9–13]. В тоже время актуальным является решение связанной задачи термоэластостатики при произвольном распределении неоднородности. Пример такого рода содержится в [14], где анализируется тепловой удар по функционально-градиентному термоэластостатическому слою. Решение сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода в трансформантах Лапласа и последующему применению теории вычетов.

Для правильного расчета характеристик устройств, в которых присутствуют неоднородные пироматериалы, необходимо знание функций, представляющих собой законы распределения неоднородности. Задача идентификации этих функций для термоэластостатических тел по некоторой дополнительной информации о граничных физических полях относится к коэффициентным обратным задачам (КОЗ) термоэластостатики, которые практически не исследованы, что объясняется сложностью построения операторных соотношений, связывающих заданные и измеряемые в эксперименте функции.

На практике широко распространены два типа постановки обратных задач математической физики. Для первого типа дополнительная информация считается известной во внутренних точках тела в какой-либо момент времени, для второго типа — лишь на части границы и на некотором временном интервале. Чаще всего экспериментально реализуемым является второй тип, несмотря на то, что в этом случае обратная задача нелинейна. В последние годы получил развитие новый подход к решению нелинейных обратных задач механики связанных полей, базирующийся на итерационном процессе, на каждом этапе которого решается соответствующая линейная задача.

С использованием такого подхода успешно проведена идентификация неоднородных характеристик линейных электроупругих [16–19] и термоупругих [20, 21] тел. В [18] для решения КОЗ электроупругости сформулирована слабая постановка и решена задача о реконструкции закона изменения неоднородности модуля податливости стержня при анализе его установившихся продольных колебаний. В [19] предложен способ восстановления свойств неоднородного по толщине электроупругого слоя из анализа плоской задачи об установившихся колебаниях. С помощью преобразования Фурье решены две более простые — несвязанные — краевые задачи относительно усредненных смещения и потенциала. Решение обратной задачи строится на основе метода линеаризации и итерационного процесса, на каждом этапе которого необходимо решать систему интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. В работе приведены примеры одновременного восстановления законов неоднородности пьезомодуля и упругого модуля.

В [20, 21] представлено решение обратной задачи термоупругости применительно к стержню. При этом рассмотрено два способа нагружения — механический и тепловой. В качестве дополнительной информации выступали температура или смещение, измеренные на части границы тела. Для КОЗ термоупругости был построен итерационный процесс, на каждом шаге которого для нахождения поправок восстанавливаемых коэффициентов решались линеаризованные интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода.

Цель данной работы состоит в постановке обратной задачи термоэластостатики, выводе операторных уравнений для решения поставленной задачи путем итераций, применении полученных уравнений для идентификации неоднородных характеристик термоэластостатического стержня из пьезокерамики класса 6 ттп, анализе результатов вычислительных экспериментов по восстановлению законов распределения неоднородности для функций различных классов (степенных, экспоненциальных, тригонометрических и логарифмических), как монотонных, так и немонотонных.

2. Постановка обратной задачи термоэластостатики для неоднородного тела

Уравнения связанной термоэластостатики в отсутствие объемных сил, внутренних источников тепла и электрических зарядов имеют вид [14]

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad (1)$$

$$D_{k,k} = 0, \quad (2)$$

$$-q_{k,k} + T_0 \dot{\eta} = 0, \quad (3)$$

а определяющие соотношения представляются в форме

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} - \gamma_{ij} \theta + e_{kij} \varphi_{,k}, \quad (4)$$

$$\eta = \gamma_{ij} u_{i,j} + \frac{c_\varepsilon}{T_0} \theta - g_i \varphi_{,i}, \quad (5)$$

$$D_i = e_{ikl} u_{k,l} + g_i \theta - \varepsilon_{ik} \varphi_{,k}, \quad (6)$$

$$q_i = -k_{ij} \theta. \quad (7)$$

Здесь: σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; u_i — компоненты вектора перемещений; ρ — плотность; D_i — компоненты вектора электрической индукции; q_i — компоненты вектора потока тепла; T_0 — температура естественного состояния; η — энтропия; c_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости; γ_{ij} — компоненты тензора температурных напряжений; $\theta = T - T_0$ — приращение температуры T ; e_{kij} — компоненты тензора пьезоэлектрических модулей; ϕ — электрический потенциал; c_ϵ — удельная объемная теплоемкость при постоянном тензоре деформации; g_i — компоненты тензора пироккоэффициентов; ε_{ij} — компоненты тензора диэлектрических проницаемостей; k_{ij} — компоненты тензора теплопроводности. Точка над символом означает однократное дифференцирование по времени, запятая в нижних индексах — дифференцирование по следующей за ней координате.

Рассмотрим движение неоднородного термоэлектроупругого тела V , ограниченного поверхностью S и находящегося под действием механических, тепловых и электрических нагрузок при отсутствии внутренних источников тепла и массовых сил. Поверхность тела может быть представлена в виде: $S = S_u \cup S_\sigma$, $S = S_T \cup S_q$, $S = S_+ \cup S_- \cup S_H$ где индексами u , σ , T и q помечены части границы тела, на которых заданы, соответственно, перемещения, напряжения, температура и тепловой поток. На части границы S_- и S_+ наводится электрический потенциал, граница S_H неэлектродирована. Тогда граничные и нулевые начальные условия будут иметь вид:

$$\theta|_{S_T} = 0, \quad q_i n_j = -k_{ij} \theta_{,i} n_j|_{S_q} = Q, \quad (8)$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = P_i, \quad (9)$$

$$\phi|_{S_\pm} = \pm\phi_0, \quad D_i n_i|_{S_H} = 0, \quad (10)$$

$$\theta(x, 0) = u_i(x, 0) = \dot{u}_i(x, 0) = 0. \quad (11)$$

Прямая задача термоэлектроупругости заключается в установлении функций u_i , θ , ϕ из уравнений (1)–(11) при известных характеристиках c_{ijkl} , ρ , c_ϵ , k_{ij} , γ_{ij} , e_{kij} , ε_{ij} , g_i .

В обратной же задаче термоэлектроупругости требуется определить характеристики c_{ijkl} , ρ , c_ϵ , k_{ij} , γ_{ij} , e_{kij} , ε_{ij} , g_i как функции координат по дополнительной информации, измеренной на доступной для наблюдения части границы S тела. Дополнительной информацией могут служить:

– компоненты вектора перемещения d_i , измеренные на временном отрезке $[T_1, T_2]$ на границе S_σ :

$$u_i|_{S_\sigma} = d_i(x, t), \quad t \in [T_1, T_2]; \quad (12)$$

– приращение температуры y , измеренное на временном отрезке $[T_3, T_4]$ на границе S_q :

$$\theta|_{S_q} = y(x, t), \quad t \in [T_3, T_4]. \quad (13)$$

3. Формулировка операторных уравнений для решения обратной задачи термоэлектроупругости

Основная проблема исследования обратных задач — это построение операторных соотношений, связывающих искомые и измеряемые в эксперименте функции. Для решения поставленной выше КОЗ запишем слабую постановку прямой задачи термоэлектроупругости в трансформантах Лапласа. Для этого сначала применим к уравнениям (1)–(3) и граничным условиям (8)–(10) преобразование Лапласа по времени с параметром p при начальных условиях (11). В результате получим:

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} = p^2 \rho \tilde{u}_i, \quad (14)$$

$$\tilde{D}_{k,k} = 0, \quad (15)$$

$$-\tilde{q}_{k,k} + p T_0 \tilde{\eta} = 0, \quad (16)$$

$$\tilde{\theta}|_{S_T} = 0, \quad -k_{ij} \tilde{\theta}_{,i} n_j|_{S_q} = \tilde{Q}, \quad (17)$$

$$\tilde{u}_i|_{S_u} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{ij} n_j|_{S_\sigma} = \tilde{P}_i, \quad (18)$$

$$\tilde{\phi}|_{S_\pm} = \pm \tilde{\phi}_0, \quad \tilde{D}_i n_i|_{S_H} = 0. \quad (19)$$

Здесь знак «тильда» обозначает трансформанту Лапласа соответствующей функции.

Введем в рассмотрение гладкие пробные функции $\tilde{v}_i, \tilde{\tau}_0$ и $\tilde{\psi}$, удовлетворяющие главным граничным условиям задачи в трансформантах: $\tilde{v}_i|_{S_u} = 0, \tilde{\tau}_0|_{S_r} = 0, \tilde{\psi}|_{S_{\pm}} = \pm\tilde{\varphi}_0$. Воспользуемся методом множителей Лагранжа. Умножим уравнение (14) на \tilde{v}_i , уравнение (15) — на $\alpha_1\tilde{\psi}$, уравнение (16) — на $\alpha_2\tilde{\tau}_0$, где α_i — неопределенные множители Лагранжа, а затем проинтегрируем их по объему V . Аналогично поступим с граничными условиями: условие на части S_{σ} умножим на $\alpha_3\tilde{v}_i$, на части S_H — на $\alpha_4\tilde{\psi}$, на части S_q — на $\alpha_5\tilde{\tau}_0$ и проинтегрируем по соответствующим частям поверхности S . Найдем сумму всех построенных функционалов:

$$\int_V \left[(\tilde{\sigma}_{ij,j} + p^2\rho\tilde{u}_i)\tilde{v}_i + \alpha_1\tilde{D}_{k,k}\tilde{\psi} + \alpha_2(-pT_0\tilde{\eta} + \tilde{q}_{i,i})\tilde{\tau}_0 \right] dV + \\ + \alpha_3 \int_{S_{\sigma}} (\tilde{\sigma}_{ij}n_j - \tilde{P}_i)\tilde{v}_i dS + \alpha_4 \int_{S_H} \tilde{D}_i n_i \tilde{\psi} dS + \alpha_5 \int_{S_q} (\tilde{q}_i n_i - \tilde{Q})\tilde{\tau}_0 dS = 0. \quad (20)$$

Используя формулу Остроградского–Гаусса и определяющие соотношения, перепишем уравнение (20) в виде:

$$\int_V \left(\frac{1}{2} p^2 \rho \tilde{u}_i \tilde{v}_i - c_{ijkl} \tilde{u}_{i,j} \tilde{v}_{k,l} + \gamma_{ij} \tilde{\theta} \tilde{v}_{i,j} + e_{kij} \tilde{\varphi}_{,k} \tilde{v}_{i,j} - \alpha_1 (e_{ikl} \tilde{u}_{k,l} + g_i \tilde{\theta} - \varepsilon_{ik} \tilde{\varphi}_{,k}) \tilde{\psi}_{,i} \right) dV + \\ + \int_V \left(\alpha_2 k_{ij} \tilde{\theta}_{,j} \tilde{\tau}_{0,i} - \alpha_2 p T_0 \left(\gamma_{ij} \tilde{u}_{ij} + c_{\varepsilon} \frac{\tilde{\theta}}{T_0} - g_i \tilde{\varphi}_{,i} \right) \tilde{\tau}_0 \right) dV + \\ + \int_{S_{\sigma}} \left((1 + \alpha_3) \tilde{\sigma}_{ij} n_j - \alpha_3 \tilde{P}_i \right) \tilde{v}_i dS + (\alpha_1 + \alpha_4) \int_{S_H} \tilde{D}_i n_i \tilde{\psi} dS + \int_{S_q} \left((\alpha_2 + \alpha_5) \tilde{q}_i n_i - \alpha_5 \tilde{Q} \right) \tilde{\tau}_0 dS = 0. \quad (21)$$

Далее, полагая в (21) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1/(pT_0), \alpha_3 = \alpha_4 = -1, \alpha_5 = 1/(pT_0)$, окончательно получим:

$$\int_V \left(\frac{1}{2} p^2 \rho \tilde{u}_i \tilde{v}_i - \frac{1}{2} c_{ijkl} \tilde{u}_{i,j} \tilde{v}_{k,l} + e_{kij} (\tilde{\varphi}_{,k} \tilde{v}_{i,j} + \tilde{\psi}_{,k} \tilde{u}_{i,j}) + \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} \tilde{\varphi}_{,k} \tilde{\psi}_{,i} \right) dV + \\ + \int_V \left(\frac{c_{\varepsilon}}{2T_0} \tilde{\theta} \tilde{\tau}_0 - \frac{1}{2pT_0} k_{ij} \tilde{\theta}_{,j} \tilde{\tau}_{0,i} + \gamma_{ij} (\tilde{\theta} \tilde{v}_{i,j} + \tilde{\tau}_0 \tilde{u}_{i,j}) - g_i \tilde{\varphi}_{,i} \tilde{\tau}_0 \right) dV + \\ + \int_{S_{\sigma}} \tilde{P}_i \tilde{v}_i dS - \frac{1}{pT_0} \int_{S_q} \tilde{Q} \tilde{\tau}_0 dS = 0. \quad (22)$$

Слабым решением задачи (14)–(19) будем называть компоненты физических полей $\tilde{u}_i, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi}$, удовлетворяющие интегральному равенству (22) при произвольных гладких функциях $\tilde{v}_i, \tilde{\tau}_0$ и $\tilde{\psi}$.

Запишем равенство (22) в виде:

$$A(a, \tilde{u}, \tilde{v}) = B(\tilde{v}), \quad (23)$$

где $A(a, \tilde{u}, \tilde{v}) = \int_V \left(\frac{1}{2} p^2 \rho \tilde{u}_i \tilde{v}_i - \frac{1}{2} c_{ijkl} \tilde{u}_{i,j} \tilde{v}_{k,l} + e_{kij} (\tilde{\varphi}_{,k} \tilde{v}_{i,j} + \tilde{\psi}_{,k} \tilde{u}_{i,j}) + \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} \tilde{\varphi}_{,k} \tilde{\psi}_{,i} \right) dV + \int_V \left(\frac{c_{\varepsilon}}{2T_0} \tilde{\theta} \tilde{\tau}_0 - \frac{1}{2pT_0} k_{ij} \tilde{\theta}_{,j} \tilde{\tau}_{0,i} + \gamma_{ij} (\tilde{\theta} \tilde{v}_{i,j} + \tilde{\tau}_0 \tilde{u}_{i,j}) - g_i \tilde{\varphi}_{,i} \tilde{\tau}_0 \right) dV$ — трилинейная форма, то есть форма, линейная по коэффициентам дифференциальных операторов $a = (c_{ijkl}, \rho, c_{\varepsilon}, k_{ij}, \gamma_{ij}, e_{kij}, \varepsilon_{ij}, g_i)$, компонентам трансформант

физических полей $\tilde{u}(\tilde{u}_i, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ и пробным функциям $\tilde{v}(\tilde{v}_i, \tilde{\tau}_0, \tilde{\psi})$; $B(\tilde{v}) = - \int_{S_{\sigma}} \tilde{P}_i \tilde{v}_i dS + \frac{1}{pT_0} \int_{S_q} \tilde{Q} \tilde{\tau}_0 dS$ —

линейная форма от трансформант гладких пробных полей $\tilde{v}_i, \tilde{\tau}_0$. Под решением обратной задачи термоэлектроупругости понимается множество элементов (a, \tilde{u}) , удовлетворяющих равенству (23) для любых пробных функций \tilde{v} . Легко показать [17], что при двух разных решениях $(a^{(1)}, \tilde{u}^{(1)})$ и $(a^{(2)}, \tilde{u}^{(2)})$ выполняется обобщенное соотношение взаимности или формула Грина:

$$A(a^{(1)} - a^{(2)}, \tilde{u}^{(1)}, \tilde{u}^{(2)}) = B(\tilde{u}^{(2)} - \tilde{u}^{(1)}). \quad (24)$$

Представленная обратная задача является нелинейной, что вызывало бы существенные затруднения при отыскании ее решения, если бы не трилинейность формы A . Свойство трилинейности позволяет значительно упростить процедуру решения за счет сведения к последовательности слабых постановок и интегральных уравнений первого рода с гладкими ядрами, которые дают возможность реализовать итерационный вычислительный алгоритм, идеология которого описана в [17]. В соответствии с ним сначала из условия минимума функционала невязки выбирается некоторое начальное приближение коэффициентов $a^{(0)}$, например, в классе линейных функций.

Пусть $\tilde{u}^{(0)}$ — соответствующее поле, удовлетворяющее слабой постановке $A(a^{(0)}, \tilde{u}^{(0)}, \tilde{v}) = B(\tilde{v})$. Применяя линеаризацию в окрестности $(a^{(0)}, \tilde{u}^{(0)})$, вычисляя $\tilde{u}^{(0)}|_{S_\sigma} = \tilde{d}^{(0)}$ и используя формулу (24), получим линейное уравнение для нахождения поправок $\delta a^{(0)}$:

$$A(\delta a^{(0)}, \tilde{u}^{(0)}, \tilde{u}^{(0)}) = B(\tilde{d} - \tilde{d}^{(0)}). \quad (25)$$

Затем определим элемент $a^{(1)} = a^{(0)} + \delta a^{(0)}$. Тогда последовательность задач для отыскания $(a^{(n)}, \tilde{u}^{(n)})$ будет формироваться следующим образом: $A(a^{(n)}, \tilde{u}^{(n)}, \tilde{v}) = B(\tilde{v})$, а поправки $\delta a^{(n)}$ вычислим из линейного операторного уравнения первого рода с компактным оператором:

$$A(\delta a^{(n)}, \tilde{u}^{(n)}, \tilde{u}^{(n)}) = B(\tilde{d} - \tilde{d}^{(n)}). \quad (26)$$

4. Задача термоэлектроупругости для стержня

Покажем конкретное применение предложенного подхода для реконструкции неоднородных характеристик. Рассмотрим одномерную динамическую задачу термоэлектроупругости для неоднородного стержня из пьезокерамики класса 6 mm [14]. Стержень имеет длину l и поляризован вдоль оси x_3 . Торцы стержня $x_3 = 0$ жестко защемлены, закорочены и поддерживаются при нулевой температуре. На другом торце $x_3 = l$ действует нестационарная нагрузка, которая может быть тепловой или механической. Тогда начально-краевая задача термоэлектроупругости, в предположении одномерности исследуемого процесса ($u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = u(x_3, t)$, $\theta = \theta(x_3, t)$, $\varphi = \varphi(x_3, t)$), опишется следующей системой уравнений:

$$(c_{33}u')' + (e_{33}\varphi')' - (\gamma_{33}\theta)' = \rho\ddot{u}, \quad (27)$$

$$(e_{33}u')' - (\varepsilon_{33}\varphi')' + (g_3\theta)' = 0, \quad (28)$$

$$-T_0(\gamma_{33}\dot{u}' - g_3\dot{\varphi}') + (k_{33}\theta)' - c_\varepsilon\dot{\theta} = 0, \quad (29)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \sigma_{33}(l, t) = p(t), \quad (30)$$

$$\theta(0, t) = 0, \quad -k_{33}(l)\theta'(l, t) = q(t), \quad (31)$$

$$\varphi(0, t) = 0, \quad \varphi(l, t) = 0, \quad (32)$$

$$\theta(x, 0) = u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0. \quad (33)$$

Символ «штрих» в уравнениях означает дифференцирование по координате x_3 .

Для обезразмеривания задачи (27)–(33) с целью выявления малых параметров введем обозначения:

$$z = \frac{x_3}{l}, \quad U = \frac{u}{l}, \quad W = \frac{\theta}{\theta_0}, \quad \theta_0 = \sqrt{\frac{T_0 c_{33}(0)}{c_\varepsilon(0)}}, \quad Q_1 = \frac{q}{q_0}, \quad q_0 = \frac{k_{33}(0)\theta_0}{l}, \quad V_1 = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad \varphi_0 = \sqrt{\frac{c_{33}(0)l}{\varepsilon_{33}(0)}},$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{c_{33}(0)}{\rho(0)}}, \quad \varepsilon = \frac{t_1}{t_2}, \quad t_1 = \frac{l}{v_1}, \quad t_2 = \frac{c_\varepsilon(0)l^2}{k_{33}(0)}, \quad \tau = \frac{t}{t_2}, \quad \bar{\rho}(z) = \frac{\rho(x_3)}{\rho(0)}, \quad \bar{s}(z) = \frac{c_{33}(x_3)}{c_{33}(0)}, \quad \bar{k}(z) = \frac{k_{33}(x_3)}{k_{33}(0)},$$

$$\bar{c}(z) = \frac{c_\varepsilon(x_3)}{c_\varepsilon(0)}, \quad \bar{\varepsilon}_{33}(z) = \frac{\varepsilon_{33}(x_3)}{\varepsilon_{33}(0)}, \quad \bar{\gamma}(z) = \frac{\gamma_{33}(x_3)}{\gamma_{33}(0)}, \quad \bar{e}_{33}(z) = \frac{e_{33}(x_3)}{e_{33}(0)}, \quad \bar{g}(z) = \frac{g_3(x_3)}{g_3(0)}, \quad \delta_1 = \frac{e_{33}(0)}{\sqrt{c_{33}(0)\varepsilon_{33}(0)}},$$

$$\delta_2 = \gamma_{33}(0)\sqrt{\frac{T_0}{c_{33}(0)c_\varepsilon(0)}}, \quad \delta_3 = g_3(0)\sqrt{\frac{T_0}{\varepsilon_{33}(0)c_\varepsilon(0)}}, \quad \Omega = \frac{\sigma_{33}(x_3)}{c_{33}(0)}, \quad P_1(\tau) = \frac{p(t)}{c_{33}(0)}.$$

В результате уравнения (27)–(33) примут вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{s}(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \delta_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{e}_{33}(z) \frac{\partial V_1}{\partial z} \right) - \delta_2 \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\gamma}(z)W) = \varepsilon^2 \bar{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (34)$$

$$\delta_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{e}_{33}(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\varepsilon}_{33}(z) \frac{\partial V_1}{\partial z} \right) + \delta_3 \frac{\partial}{\partial z} (\bar{g}(z)W) = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z} \right) - \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau} - \delta_2 \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau} + \delta_3 \bar{g}(z) \frac{\partial^2 V_1}{\partial z \partial \tau} = 0, \quad (36)$$

$$U(0, \tau) = 0, \quad \Omega(1, \tau) = P_1(\tau), \quad (37)$$

$$W(0, \tau) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial W}{\partial \tau}(1, \tau) = Q_1(\tau), \quad (38)$$

$$V_1(0, \tau) = V_1(1, \tau) = 0, \quad (39)$$

$$W(z, 0) = U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, 0) = 0. \quad (40)$$

Прямая задача термоэлектроупругости заключается в определении функций U , W , V_1 из решения начально-краевой задачи (34)–(40) при известных характеристиках $\bar{s}(z)$, $\bar{\rho}(z)$, $\bar{\gamma}(z)$, $\bar{c}(z)$, $\bar{k}(z)$, $\bar{\varepsilon}_{33}(z)$, $\bar{e}_{33}(z)$, $\bar{g}(z)$. При произвольных законах изменения коэффициентов дифференциальных операторов осуществить это можно лишь численно. Поступим аналогично работе [14]: применим преобразование Лапласа, аппарат решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода и обращение трансформант на основе теории вычетов.

В обратной задаче термоэлектроупругости для стержня требуется одновременное нахождение характеристик $\bar{s}(z)$, $\bar{\rho}(z)$, $\bar{\gamma}(z)$, $\bar{c}(z)$, $\bar{k}(z)$, $\bar{\varepsilon}_{33}(z)$, $\bar{e}_{33}(z)$, $\bar{g}(z)$ по дополнительной информации о смещении U или температуре W , измеренной на свободном торце стержня $z=1$ в некоторых точках временного диапазона:

$$U(1, \tau) = d(\tau), \quad \tau \in [a, b], \quad (41)$$

$$W(1, \tau) = Y(\tau), \quad \tau \in [c, d]. \quad (42)$$

5. Итерационная процедура решения обратной задачи термоэлектроупругости для стержня

Слабая постановка задачи (23) позволяет решать обратную задачу идентификации характеристик неоднородного термоэлектроупругого стержня с помощью итерационной процедуры, которой отвечают формулы (26). Первый этап итерационного процесса требует знания начального приближения. Начальное приближение выбиралось из класса положительных ограниченных линейных функций $\bar{a}^{(0)}(z) = C_1 z + C_2$ на основе минимизации функционала невязки на компактном множестве. Из априорной информации о значениях коэффициентов $0 < a_- < a_0(z) < a_+$, где a_- и a_+ — минимальное и максимальное значения коэффициентов соответственно, устанавливались ограничения на искомые константы C_1 и C_2 в виде системы неравенств $a_- < C_1 < a_+$, $a_- < C_1 + C_2 < a_+$, которые формируют их область изменения в виде компактного множества. После перехода от этой области к сеточной из условия минимума соответствующего функционала на построенном компактном множестве осуществлялся подбор пары (C_1, C_2) .

В работе рассмотрено два способа нагружения торца $z=1$ термоэлектроупругого стержня — механический (силой $P_1(\tau)$) и тепловой (тепловым потоком $Q_1(\tau)$). Функционал невязки имел вид:

– при механическом нагружении

$$J_1^{(n-1)} = \int_a^b (d(\tau) - U^{(n-1)}(1, \tau))^2 d\tau; \quad (43)$$

– при тепловом нагружении

$$J_2^{(n-1)} = \int_c^d (Y(\tau) - W^{(n)}(1, \tau))^2 d\tau. \quad (44)$$

Далее уточнялись законы изменения неоднородных характеристик путем учета поправок $\delta\bar{s}^{(n-1)}$, $\delta\bar{\rho}^{(n-1)}$, $\delta\bar{\gamma}^{(n-1)}$, $\delta\bar{c}^{(n-1)}$, $\delta\bar{k}^{(n-1)}$, $\delta\bar{\varepsilon}_{33}^{(n-1)}$, $\delta\bar{e}_{33}^{(n-1)}$, $\delta\bar{g}^{(n-1)}$, которые находились из условия удовлетворения обезразмеренному операторному уравнению 1-го рода в трансформантах Лапласа, полученному на основе формул (22), (26) применительно к стержню. В развернутом виде операторное уравнение для одновременного нахождения поправок неоднородных свойств термоэлектроупругого стержня выглядело так:

$$\begin{aligned} & -\frac{p^2}{2} \int_0^1 \delta\bar{\rho}^{(n-1)} (\tilde{U}^{(n-1)})^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^1 \delta\bar{s}^{(n-1)} \left(\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + 2\delta_1 \int_0^1 \delta\bar{e}_{33}^{(n-1)} \frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz} \frac{d\tilde{V}_1^{(n-1)}}{dz} dz - \\ & -\frac{1}{2} \int_0^1 \delta\bar{\varepsilon}_{33}^{(n-1)} \left(\frac{d\tilde{V}_1^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz - \frac{1}{2T_0} \int_0^1 \delta\bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}^{(n-1)})^2 dz + \frac{1}{2pT_0} \int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} \left(\frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz - \\ & -\delta_2 \int_0^1 \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} \frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz} \tilde{W}^{(n-1)} dz + \delta_3 \int_0^1 \delta\bar{g}^{(n-1)} \frac{d\tilde{V}_1^{(n-1)}}{dz} \tilde{W}^{(n-1)} dz = \\ & = \tilde{P}_1(p)(\tilde{d}(p) - \tilde{U}^{(n-1)}(1, p)) - \frac{1}{p} \tilde{Q}_1(p)(\tilde{Y}(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1, p)). \end{aligned} \quad (45)$$

Ясно, что в общей постановке (34)–(42) задача является недоопределенной, поскольку на практике обычно требуется установить все компоненты тензоров в рамках описанной выше модели, а дополнительной информации (41) или (42) недостаточно для обеспечения единственности решения обратной задачи в рамках одного эксперимента, поскольку операторных уравнений меньше, чем искомым функций. Вопрос о том, возможно ли в принципе обеспечить единственность при нескольких режимах нагружения, не достаточно изучен даже для более простых моделей [22].

Для анализа проблем, которые возникают при решении обратных задач термоэлектроупругости для неоднородных тел, в работе проведено исследование, при котором неизвестной была только одна характеристика, остальные считались известными. В случае восстановления только одной из величин уравнение (45), с учетом конкретного вида нагружения стержня, преобразуется к более простому виду.

При идентификации механических — $\bar{s}(z)$, $\bar{\rho}(z)$, и электрофизических — $\bar{\varepsilon}_{33}(z)$, $\bar{e}_{33}(z)$, характеристик в вычислительных экспериментах использовался механический способ нагружения стержня и дополнительная информация вида (41). При идентификации характеристик теплофизических — $\bar{c}(z)$, $\bar{k}(z)$, $\bar{\gamma}(z)$, и электрофизической — $\bar{g}(z)$, имел место тепловой способ нагружения стержня, а дополнительной информации отвечала формула (42).

При решении обратной задачи на конечном временном промежутке к операторным уравнениям в трансформантах применялись теоремы операционного исчисления о свертке и дифференцировании оригинала. Операторные уравнения для нахождения поправок в оригиналах выглядели следующим образом:

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 \delta\bar{\rho}^{(n-1)} M_1(z, \tau) dz = \int_0^\tau P_1(\tau - \tau_1)(d(\tau_1) - U^{(n-1)}(1, \tau_1)) d\tau_1, \quad (46)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \delta\bar{s}^{(n-1)} M_2(z, \tau) dz = \int_0^\tau P_1(\tau - \tau_1)(d(\tau_1) - U^{(n-1)}(1, \tau_1)) d\tau_1, \quad (47)$$

$$2\delta_1 \int_0^1 \delta\bar{e}_{33}^{(n-1)} M_3(z, \tau) dz = \int_0^\tau P_1(\tau - \tau_1)(d(\tau_1) - U^{(n-1)}(1, \tau_1)) d\tau_1, \quad (48)$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 \delta\bar{\varepsilon}_{33}^{(n-1)} M_4(z, \tau) dz = \int_0^\tau P_1(\tau - \tau_1)(d(\tau_1) - U^{(n-1)}(1, \tau_1)) d\tau_1, \quad (49)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \delta\bar{c}^{(n-1)} M_5(z, \tau) dz = \int_0^\tau Q_1(\tau - \tau_1)(Y(\tau_1) - W^{(n-1)}(1, \tau_1)) d\tau_1, \quad (50)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} M_6(z, \tau) dz = -\int_0^\tau Q_1(\tau - \tau_1)(Y(\tau_1) - W^{(n-1)}(1, \tau_1)) d\tau_1, \quad (51)$$

$$\delta_2 \int_0^1 \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} M_7(z, \tau) dz = \int_0^\tau Q_1(\tau - \tau_1)(Y(\tau_1) - W^{(n-1)}(1, \tau_1)) d\tau_1, \quad (52)$$

$$\delta_3 \int_0^1 \delta\bar{g}^{(n-1)} M_8(z, \tau) dz = -\int_0^\tau Q_1(\tau - \tau_1)(Y(\tau_1) - W^{(n-1)}(1, \tau_1)) d\tau_1. \quad (53)$$

Ядра интегральных уравнений (46)–(53) вычислялись с помощью соотношений:

$$\begin{aligned}
 M_1(z, \tau) &= \int_0^\tau \frac{\partial U^{(n-1)}}{\partial \tau}(z, \tau) \frac{\partial U^{(n-1)}}{\partial \tau}(z, \tau - \tau_1) d\tau_1, & M_2(z, \tau) &= \int_0^\tau \frac{\partial U^{(n-1)}}{\partial z}(z, \tau) \frac{\partial U^{(n-1)}}{\partial z}(z, \tau - \tau_1) d\tau_1, \\
 M_3(z, \tau) &= \int_0^\tau \frac{\partial U^{(n-1)}}{\partial z}(z, \tau) \frac{\partial V_1^{(n-1)}}{\partial z}(z, \tau - \tau_1) d\tau_1, & M_4(z, \tau) &= \int_0^\tau \frac{\partial V_1^{(n-1)}}{\partial z}(z, \tau) \frac{\partial V_1^{(n-1)}}{\partial z}(z, \tau - \tau_1) d\tau_1, \\
 M_5(z, \tau) &= \int_0^\tau \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \tau}(z, \tau) W^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1) d\tau_1, & M_6(z, \tau) &= \int_0^\tau \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial z}(z, \tau) \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial z}(z, \tau - \tau_1) d\tau_1, \\
 M_7(z, \tau) &= \int_0^\tau \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \tau}(z, \tau) \frac{\partial U^{(n-1)}}{\partial z}(z, \tau - \tau_1) d\tau_1, & M_8(z, \tau) &= \int_0^\tau \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \tau}(z, \tau) \frac{\partial V_1^{(n-1)}}{\partial z}(z, \tau - \tau_1) d\tau_1.
 \end{aligned}$$

Нахождение поправок из решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода (46)–(53) является некорректной задачей, которая требует регуляризации. В работе применялся метод регуляризации Тихонова А.Н. с выбором параметра регуляризации по обобщенной невязке [23].

В результате реализации итерационного процесса скорректированные функции имели вид

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}^{(n)}(z) &= \bar{\rho}^{(n-1)}(z) + \delta \bar{\rho}^{(n-1)}(z), & \bar{s}^{(n)}(z) &= \bar{s}^{(n-1)}(z) + \delta \bar{s}^{(n-1)}(z), & \bar{e}_{33}^{(n)}(z) &= \bar{e}_{33}^{(n-1)}(z) + \delta e_{33}^{(n-1)}(z), \\
 \bar{\varepsilon}_{33}^{(n)}(z) &= \bar{\varepsilon}_{33}^{(n-1)}(z) + \delta \bar{\varepsilon}_{33}^{(n-1)}(z), & \bar{c}^{(n)}(z) &= \bar{c}^{(n-1)}(z) + \delta \bar{c}^{(n-1)}(z), & \bar{k}^{(n)}(z) &= \bar{k}^{(n-1)}(z) + \delta \bar{k}^{(n-1)}(z), \\
 \bar{\gamma}^{(n)}(z) &= \bar{\gamma}^{(n-1)}(z) + \delta \bar{\gamma}^{(n-1)}(z), & \bar{g}^{(n)}(z) &= \bar{g}^{(n-1)}(z) + \delta \bar{g}^{(n-1)}(z)
 \end{aligned}$$

и представляли собой приближенное решение обратной задачи термоэлектроупругости при удовлетворении условиям выхода из итерационного процесса. Условиями выхода служили следующие неравенства:

– при механическом нагружении стержня

$$J_1^{(n-1)} < \delta_0; \quad (54)$$

– при тепловом с нагружении

$$J_2^{(n-1)} < \delta_0. \quad (55)$$

6. Результаты вычислительных экспериментов

В расчетах принято, что на свободном торце стержня приложены нагрузки: механическая $P_1(\tau) = H(\tau)$; тепловая $Q_1(\tau) = H(\tau)$. Здесь $H(\tau)$ — функция Хевисайда. Предельное значение для выхода из итерационного процесса составляло $\delta_0 = 10^{-4}$. При нахождении безразмерных параметров, входящих в уравнения (34)–(40), использовались значения физических постоянных титаната бария (представителя керамики класса 6 mm). Исходя из данных в [14], полагалось, что $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-9}$, $\delta_1 = 0,3$, $\delta_2 = 10^{-2}$, $\delta_3 = 2 \cdot 10^{-2}$.

При решении обратных задач важно, чтобы изменение восстанавливаемых функций ощутимо отражалось на измеримой в эксперименте дополнительной информации. Для того чтобы узнать, какие из безразмерных характеристик стержня существеннее всего связаны со снимаемой на свободном торце стержня дополнительной информацией, была проведена серия вычислительных экспериментов. Расчеты показали, что на температуру наиболее сильно влияют теплофизические характеристики — коэффициент теплопроводности $\bar{k}(z)$ и удельная теплоемкость $\bar{c}(z)$, а на смещения — упругий модуль $\bar{s}(z)$, плотность $\bar{\rho}(z)$, пьезомодуль $\bar{e}_{33}(z)$, коэффициент диэлектрической проницаемости $\bar{\varepsilon}_{33}(z)$. В тоже время изменение функций $\bar{\gamma}(z)$ и $\bar{g}(z)$ практически не сказывается на снимаемых на торце экспериментальных данных. Этот факт объясняется малостью безразмерных параметров δ_2 и δ_3 , входящих в операторные уравнения (52) и (53).

Путем анализа дополнительной информации выявлены наиболее значимые с точки зрения идентификации временные интервалы в окрестности начала отсчета. Выяснено, что измерение смещения наиболее информативно на интервале $[a, b] = [0, 0.6]$, а измерение температуры — на интервале $[c, d] = [0, 0.4]$ при четырех точках наблюдения внутри этих интервалов.

С целью более детальной проверки предложенного метода проведены многочисленные эксперименты по восстановлению законов распределения неоднородности, описываемых функциями различных классов (степенными, экспоненциальными, тригонометрическими и логарифмическими), а также как монотонными, так и немонотонными.

На рисунках представлены результаты реконструкции характеристик функционально-градиентного материала титаната бария, из которого был изготовлен стержень. На рисунке 1 показаны исходные и восстановленные монотонные функции: коэффициент диэлектрической проницаемости $\bar{\epsilon}_{33}(z) = 1,3 - 0,2z^2$ — функция убывающая, и модуль упругости $\bar{\nu}(z) = \ln(1+15z) + 0,5$ — функция возрастающая. Рисунок 2 содержит графики реконструкции немонотонных функций: удельной теплоемкости — $\bar{c}(z) = -1,6z^3 + 1,8z^2 + 0,5$, и коэффициента теплопроводности — $\bar{k}(z) = 2,5 - 0,5\sin(\pi z)$. Для сравнения приведены их исходные зависимости от координаты z . Видно, что безразмерные характеристики реконструируются с хорошей точностью: погрешность восстановления функций не превышает 5%. При этом для выполнения условий выхода (54) или (55) требовалось не более 12 итераций.

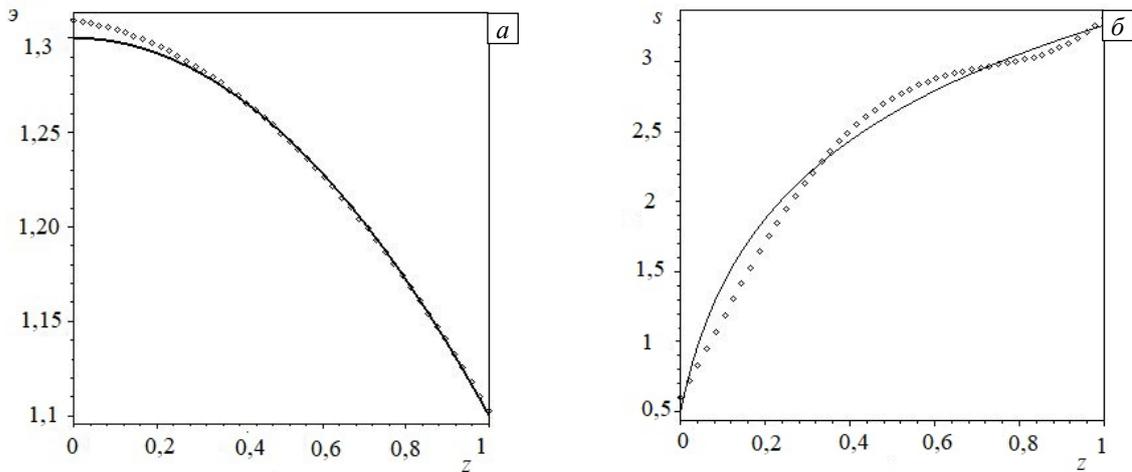


Рис. 1 Результат реконструкции коэффициента диэлектрической проницаемости (а) и упругого модуля (б); исходная функция показана сплошной линией, восстановленная – квадратами

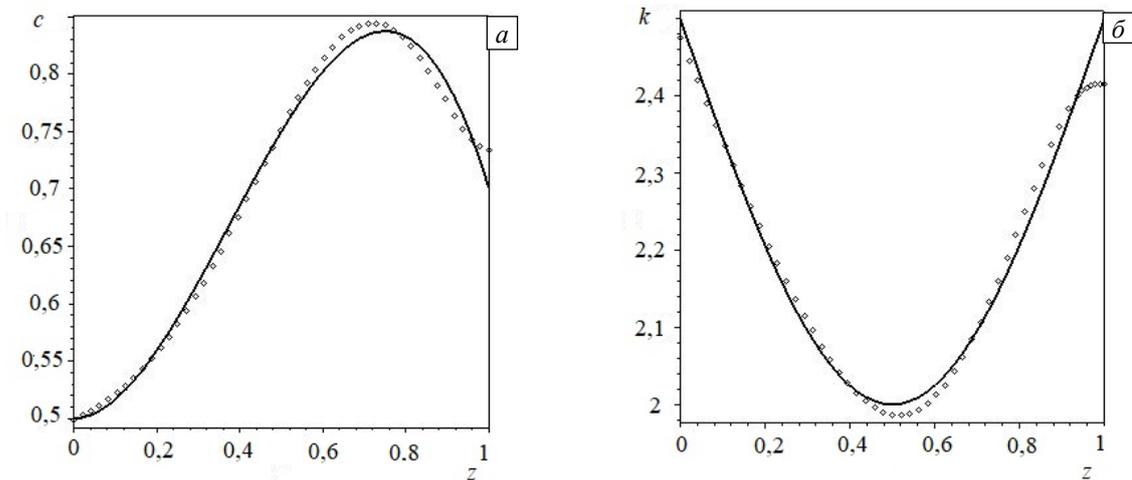


Рис. 2 Результат реконструкции удельной теплоемкости (а) и коэффициента теплопроводности (б); исходная функция показана сплошной линией, восстановленная – квадратами

7. Выводы

В работе рассмотрена динамическая коэффициентная обратная задача термоэлектродупругости, которая состоит в определении законов изменения материальных характеристик конечных термоэлектродупругих тел по дополнительной информации о граничных физических полях. Предложен итерационный метод нахождения законов изменения характеристик, основанный на слабой постановке задачи термоэлектродупругости в трансформантах Лапласа и последующей линеаризации. В качестве примера решена обратная задача термоэлектродупругости для стержня из пьезокерамики класса 6 mm. Осуществлена задача идентификации одной из характеристик стержня при известных остальных. Прямая задача после

обезразмеривания и преобразования Лапласа решалась с помощью аппарата интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода и нахождении оригиналов решений на основе теории вычетов. Для отыскания поправок восстанавливаемых характеристик в итерационном процессе использовались интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода в оригиналах.

Проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению характеристик, изменение которых оказывает существенное влияние на дополнительную информацию. Реконструировались законы распределения неоднородности, описываемых функциями из классов степенных, экспоненциальных, тригонометрических и логарифмических функций. Результаты расчетов показали, что дополнительные условия (41) или (42) являются достаточными для однозначного установления одной характеристики при известных остальных и позволяют рассчитать искомую функцию с небольшой погрешностью.

Предложенный метод определения неоднородных характеристик термоупругого стержня может оказать большое влияние на совершенствование теоретической базы неразрушающего контроля конструкций из пироматериалов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00354-а) и Южного математического института — филиала ВНИЦ РАН.

Литература

1. Mindlin R. D. On the equations of motion of piezoelectric crystals // Problems of continuum mechanics / Ed. by N.I. Muskhilishvili. – Philadelphia: SIAM, 1961. – P. 282-290.
2. Mindlin R. D. Equations of high frequency, vibrations of thermopiezoelectric crystal plates // Int. J. Solid. Struct. – 1974. – Vol. 10, no 6. – P. 625-637. [DOI](#)
3. Nowacki W. Some general theorems of thermopiezoelectricity // J. Therm. Stresses. – 1978. – Vol. 1, no. 2. – P. 171-182. [DOI](#)
4. Ватульян А.О., Кирюченко А.Ю., Наседкин А.В. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектроупругости // ПМТФ. – 1996. – Т. 37, № 5. – С.135-142. (English version [DOI](#))
5. Ватульян А.О. Тепловой удар по термоэлектроупругому слою // Вестник ДГТУ. – 2001. – Т. 1(7), № 1. – С.82 -89.
6. Bassiouny E., Youssef H.M. Two-temperature generalized thermopiezoelectricity of finite rod subjected to different types of thermal loading // J. Therm. Stresses. – 2008. – Vol. 31, no. 3. – P. 233-245. [DOI](#)
7. Bassiouny E., Youssef H.M. Thermo-elastic properties of thin ceramic layers subjected to thermal loadings // JOT. – 2013. – Vol. 1, no. 1. – P. 4-12. [DOI](#)
8. Shen S., Kuang Z.-B. An active control model of laminated piezothermoelastic plate // Int. J. Solids Struct. – 1999. – Vol. 36, no. 13. – P. 1925-1947. [DOI](#)
9. Wu X.-H., Shen Y.-P., Chen C. An exact solution for functionally graded piezothermoelastic cylindrical shell as sensor or actuators // Mater Lett. – 2003. – Vol. 57, no. 22-23. – P. 3532-3542. [DOI](#)
10. Ying C., Zhefei S. Exact solutions of functionally gradient piezothermoelastic cantilevers and parameter identification // J. Intel. Mat. Syst. Str. – 2005. Vol. 16, no. 6. – P. 531-539. [DOI](#)
11. Zhong Z., Shang E.T. Exact analysis of simply supported functionally graded piezothermoelastic plates // J. Intel. Mat. Syst. Str. – 2005. – Vol. 16, no. 7-8. – P. 643-651. [DOI](#)
12. Ootao Y., Tanigawa Y. The transient piezothermoelastic problem of a thick functionally graded thermopiezoelectric strip due to nonuniform heat supply // Arch. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 74, no. 7. – P. 449-465. [DOI](#)
13. Ootao Y., Tanigawa Y. Transient piezothermoelastic analysis for a functionally graded thermopiezoelectrical hollow sphere // Compos. Struct. – 2007. – Vol. 81, no. 7. – P. 540-549. [DOI](#)
14. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2017. – Т. 10, № 2. – С. 117-126. [DOI](#)
15. Gonzalez M.G., Sorichetti P.A., Ciocci Brazzano L., Santiago G.D. Electromechanical characterization of piezoelectric polymer thin films in a broad frequency range // Polym. Test. – 2014. – Vol. 37. – P. 163-169. [DOI](#)
16. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел. – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2008. – 176 с.
17. Ватульян А.О. К теории обратных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ. – 2010. – Т. 74, № 6. – С. 909-916. (English version [DOI](#)).
18. Ватульян А.О., Дударев В.В. О реконструкции неоднородных свойств пьезоэлектрических тел // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. Т. 5, № 3. – С. 259-264. [DOI](#)
19. Богачев И.В., Ватульян А.О., Явруян О.В. Идентификация свойств неоднородной электроупругой среды // ПММ. – 2012. – Т. 76, № 5. – С. 860-866. (English version [DOI](#)).
20. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // ИФЖ. – 2014. – Т. 87, № 1. – С. 217-224. (English version [DOI](#)).
21. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // Int. J. of Solid. Struct. – 2014. – Vol. 51(3). – P. 767-773. [DOI](#)
22. R. Nedin, S. Nesterov, A. Vatulyan. Identification of thermal conductivity coefficient and volumetric heat capacity of functionally graded materials // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2016. – Vol. 102. – P. 213-218. [DOI](#)
23. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1990. – 230 с.

References

1. Mindlin R. D. On the equations of motion of piezoelectric crystals. *Problems of continuum mechanics*: – Philadelphia SIAM, 1961, pp. 282-290.
2. Mindlin R. D. Equations of high frequency, vibrations of thermopiezoelectric crystal plates. *Int. J. Solid. Struct.*, 1974, vol. 10, no 6, pp. 625-637. [DOI](#)
3. Nowacki W. Some general theorems of thermopiezoelectricity. *J. Therm. Stresses*, 1978, vol. 1, pp. 171-182. [DOI](#)
4. Vatulyan, A.O., Kiryutenko, A.Y., Nasedkin, A.V. Plane waves and fundamental solutions in linear thermoelectroelasticity. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1996, vol. 37, issue 5, pp. 727–733. [DOI](#)
5. Vatulyan A.O. *Teplovoy udar po termoelektrouprugomu sloyu* [Thermal shock on thermoelectroelasticity layer]. *Vestnik DSTU*, 2001, vol. 1, no. 1, pp. 82-89.
6. Bassionny E., Youssef H. Two-temperature generalized thermopiezoelectricity of finite rod subjected to different types of thermal loading. *J. Therm. Stresses*, 2008, vol. 31, pp. 233-245. [DOI](#)
7. Bassionny E., Youssef H. Thermo-elastic properties of thin ceramic layers subjected to thermal loadings. *JOT*, 2013, vol. 1, no. 1, pp. 4 -12. [DOI](#)
8. Shen S., Kuang Z.B. An active control model of laminated piezothermoelastic plate. *Jnt. J. Solid. Struct.*, 1999, vol. 13, pp. 1925-1947. [DOI](#)
9. Wu X.-H., Shen Y.-P., Chen C. An exact solution for functionally graded piezothermoelastic cylindrical shell as sensor or actuators. *Mater Lett.*, 2003, vol. 57, pp. 3532-3542. [DOI](#)
10. Ying C., Zhefei S. Exact solutions of functionally gradient piezothermoelastic cantilevers and parameter identification. *J. Intel. Mat. Sys Str.*, 2005, vol. 16, pp. 531-539. [DOI](#)
11. Zhong Z., Shang E. Exact analysis of simply supported functionally graded piezothermoelastic plates. *J. Intel. Mat. Sys. Str.*, 2005, vol. 16, pp. 643-651. [DOI](#)
12. Ootao Y., Tanigawa Y. Transient piezothermoelastic problem of a thick functionally graded thermopiezoelectric strip due to nonuniform heat supply. *Arch Appl. Mech.*, 2005, vol. 74, pp. 449-465. [DOI](#)
13. Ootao Y., Tanigawa Y. Transient piezothermoelastic analysis for a functionally graded thermopiezoelectrical hollow sphere. *Compos. Struct.*, 2007, vol. 81, pp. 540-549. [DOI](#)
14. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. *Dinamicheskaya zadacha termoelektrouprugosti dlya funktsionalno-gradientnogo sloya* [The dynamic problem of thermoelectroelasticity for functionally graded layer]. *Vycisl. mekh. splos. sred*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 117-126. [DOI](#)
15. Gonzalez M.G., Sorichetti P.A., Ciocci Brazzano L., Santiago G.D. Electromechanical characterization of piezoelectric polymer thin films in a broad frequency range. *Polym. Test.*, 2014, vol. 37, pp. 163-169. [DOI](#)
16. Vatulyan A.O., Soloviev A.N. *Pryamie i obratnie zadachi dlya odnorodnykh i neodnorodnykh uprugikh i electroupugikh tel* [Direct and inverse problem for elastic and electroelastic bodies]. Rostov-on-Don.: SFU. 2008. 176 p.
17. Vatulyan A.O. The theory of inverse problems in the linear mechanics of a deformable solid. *PMM - J. Appl.Math. Mec.*, 2010, vol. 74, issue 6, pp. 648-653. [DOI](#)
18. Vatulyan A.O., Dudarev V.V. *O rekonsruktsii neodnorodnykh svoystv piezoelektricheskikh tel* [On reconstruction of inhomogeneous properties of piezoelectric solids]. *Vycisl. mekh. splos. sred*, 2012, vol. 5, no. 3, pp. 259-264. [DOI](#)
19. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. Identification of the properties of an inhomogeneous electroelastic medium. *PMM - J. Appl.Math. Mec.*, 2012, vol. 76, issue 5, pp. 506-510. [DOI](#)
20. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. A method of identifying thermoelastic characteristics for inhomogeneous bodies. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2014, vol. 87, no. 1, pp. 225-232. [DOI](#)
21. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod. *Int. J. Solid. Struct.*, 2014, vol. 51, no. 3-4, pp. 767-773. [DOI](#)
22. R. Nedin, S. Nesterov, A. Vatulyan. Identification of thermal conductivity coefficient and volumetric heat capacity of functionally graded materials. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2016, vol. 102, pp. 213-218. [DOI](#)
23. Tikhonov A.N., Goncharsky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Chislennye metody resheniya nekorektnykh zadach* [The numerical methods of the solving of incorrect problems]. Moscow: Nauka, 1990, 230 p.

Поступила в редакцию 07.08.2017; опубликована в электронном виде 30.12.2017

Сведения об авторах

Ватульян Александр Ованесович, дфмн., проф, зав. каф., Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (ИММиКН ЮФУ), 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-а; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Нестеров Сергей Анатольевич, кфмн., снс, Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН (ЮМИ ВНИЦ РАН), 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, д. 22; e-mail: 1079@list.ru