

DOI: [10.7242/1999-6691/2017.10.4.35](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.4.35)

УДК 532.5

## О ТОЧНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ВИБРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

Д.А. Брацун<sup>1</sup>, В.А. Вяткин<sup>1</sup>, А.Р. Мухаматуллин<sup>2</sup><sup>1</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация<sup>2</sup> Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь, Российская Федерация

В работе рассматривается класс точных нестационарных решений уравнений конвекции, записанных в приближении Буссинеска–Обербека. На их основе моделируется движение неоднородной жидкости в сосуде, совершающем периодические линейные колебания (вибрации) конечной частоты. Под неоднородностью среды понимается существование в ней градиента плотности, который может возникать вследствие различных внешних или внутренних причин. Важным условием для получения точного решения в замкнутой форме является соблюдение ортогональности этого градиента к направлению вибраций в любой момент времени. Показано, что при выполнении этого условия существует класс точных решений, которые отвечают ламинарному течению жидкости. При этом в поперечном по отношению к нему направлении функция скорости может иметь сложную зависимость от координат, определяемую характером неоднородности плотности. В конечном итоге физическим механизмом, приводящим жидкость в движение, является неодинаковое воздействие переменного инерционного поля на ламинарные слои с различной плотностью. В качестве примеров рассмотрены решения следующих задач термо- и хемовибрационной конвекции: течение вязкой жидкости в плоском слое, подогреваемом сбоку и совершающем продольные периодические гармонические вибрации; течение вязкой тепловыделяющей жидкости в плоском слое под действием вибраций, направленных вдоль слоя; течение вязкой жидкости в слое, на границе которого задан постоянный градиент реагирующего вещества и протекает химическая реакция первого порядка, а сам слой периодически колеблется в продольном направлении; течение вязкой тепловыделяющей жидкости, заполняющей цилиндрический сосуд, который совершает периодические движения в направлении оси симметрии. В каждом из перечисленных случаев получены аналитические выражения для скорости жидкости, давления, температуры и концентрации реагента. Обсуждается общая процедура нахождения точных выражений для данного класса решений.

*Ключевые слова:* точные решения уравнений конвекции, вибрации конечной частоты, термовибрационная конвекция, хемоконвекция

## ON EXACT NONSTATIONARY SOLUTIONS OF EQUATIONS OF VIBRATIONAL CONVECTION

D.A. Bratsun<sup>1</sup>, V.A. Vyatkin<sup>1</sup> and A.R. Mukhamatullin<sup>2</sup><sup>1</sup> Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation<sup>2</sup> Perm State Humanitarian-Pedagogical University, Perm, Russian Federation

In this paper, we consider a class of exact non-stationary solutions of the Boussinesq equations, which describe the motion of an inhomogeneous fluid in a vessel performing periodic linear vibrations of a finite frequency. The inhomogeneity of the medium implies the existence of the density gradient, which can occur due to different factors (external or internal). An important condition for obtaining an exact solution in the closed form is the orthogonality of the density gradient and the direction of vibrations, which should be maintained at any time moment during the vibration period. If this condition is fulfilled, then there exists a class of exact unsteady solutions describing the laminar flow of fluid in the direction of vibrations. In this case, the velocity profile can have a complicated dependence on the coordinates, which are transverse to the fluid motion. This functional dependence is determined by the character of the density inhomogeneity. Finally, the inertial field, varying in time, differently affects the laminar layers of various densities and defines the main physical mechanism of the fluid flow. The final result of the calculations also depends essentially on the return flow condition. As examples, the following problems of thermo- and chemovibrational convection have been considered: the flow of a viscous fluid in a plane layer heated from the side and performing periodic harmonic vibrations along the layer; the flow of a viscous heat-generating fluid in a plane layer under the action of periodic vibrations directed along the layer; the flow of a viscous fluid in a plane layer at the boundary of which a constant gradient of the reactant is assigned, the chemical reaction of the first order occurs, and the layer itself performs longitudinal periodic vibrations; the flow of a viscous heat-generating fluid filling a cylindrical channel that performs periodic oscillations in the axis direction. In each case, we present analytical expressions for fluid velocity, pressure, temperature, and reagent concentration. A general procedure for finding exact expressions for a given class of solutions is discussed.

*Key words:* exact solutions of convection equations, finite-frequency vibrations, thermovibrational convection, chemoconvection

### 1. Введение

Точные решения в гидромеханике играют особую роль. В те времена, когда компьютеры ещё не существовали, они играли роль основного инструмента получения информации о движении жидкости. К классическим примерам стационарных изотермических задач с решениями такого рода можно отнести: течение Пуазейля в трубе под действием приложенного перепада давлений; течение Куэтта в плоском слое, одна из стенок которого движется относительно другой; течение Тейлора, возникающее между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами. Каждое из решений описывает ламинарное течение жидкости в полости с простой геометрией [1]. Кроме очевидного эстетического эффекта, получение решения в замкнутой форме позволяло по-новому осмыслить задачу, а также выявить основные физические механизмы, вызывающие движение жидкости.

В конвективных задачах, сформулированных в рамках приближения Буссинеска–Обербека [2], также были найдены свои точные решения. Такое решение получено, например, Гершуни для плоского вертикального слоя жидкости, подогреваемого сбоку [3]. Указанная работа, а также появившаяся вслед за ней работа Бэтчелора [4] открыли эру создания теории устойчивости конвективных течений. За ними следует внушительное число публикаций, посвященных изучению линейной и нелинейной устойчивости названных течений [2, 5]. В [3, 4] обсуждается ещё один важный прикладной аспект точных решений уравнений конвекции. Линейная теория конвективной устойчивости (гидродинамической устойчивости в случае изотермических задач) подразумевает изучение спектра бесконечно малых возмущений основного течения. Очень важную роль при этом играет существование для основного течения точного решения в замкнутой форме. Если такого решения нет, то анализ бесконечно малых возмущений во многом теряет смысл, и более предпочтительной стратегией становится прямое численное решение уравнений конвекции (гидродинамики). Не случайно именно нахождение неизвестного ранее точного решения играло роль зародыша нового направления исследований, поскольку неизбежно вставал вопрос об устойчивости описываемого им движения жидкости при различных значениях управляющих параметров. Красивым примером такого рода является решение, построенное Бирихом [6] для задачи ламинарного движения жидкости в плоском бесконечном горизонтальном слое со свободной верхней границей, вдоль которой приложен постоянный градиент температуры. Найденное решение, с одной стороны, дало толчок изучению устойчивости обнаруженного термокапиллярного конвективного течения [7]. С другой стороны, оно вызвало появление большого числа работ, рассматривающих формально целый класс решений, тип которых задаётся определённым сочетанием преобразований симметрии [8–10]. Стоит указать, однако, что впервые точное решение уравнений конвекции при действующем вдоль слоя градиенте температуры появилось в работе Остроумова [11], в которой приведено решение для случая твёрдых границ.

Отметим, что в механике существует самостоятельное направление, ставящее своей целью нахождение классов точных решений уравнений гидромеханики. Оно основывается на работах Овсянникова [12, 13], открывших дорогу групповому анализу дифференциальных уравнений. В данный момент по этой тематике можно привести внушительный список литературы [14–18].

Точные нестационарные решения уравнений гидромеханики малочисленны, так как получение функциональных зависимостей от двух и более переменных (времени и хотя бы одной координаты) в замкнутой форме является трудной задачей. Именно поэтому примеры таких решений и наиболее интересны. В 1882 году Громека нашёл точное решение задачи нестационарного изотермического движения вязкой жидкости в бесконечной цилиндрической трубе, к концам которой приложено периодически пульсирующая разность давлений [1, 19]. Фактически речь идет о нестационарном варианте точного решения Пуазейля, который не сводится к простой модуляции этого решения, так как в ходе своего движения ламинарные слои в трубе приобретают различную инерцию. Для того чтобы остановить, а затем снова разогнать слои у стенки сосуда и в его центре требуется различная энергия. Это приводит к нетривиально меняющимся во времени эпюрам скорости жидкости [1, 19]. Данная задача важна для авторов настоящей работы, так как она определяет класс решений задач, которые будут рассматриваться далее. Необходимо отметить, что классическая задача Громеки была решена без применения условия о замкнутости течения, то есть труба считалась открытой на концах. Вероятно, подобное решение можно построить и для случая замкнутого потока (концы трубы закрыты на бесконечности), но такие работы авторам неизвестны. Также авторами не выявлены работы по устойчивости течения Громеки.

Итак, Громека [19] первым показал, что в уравнениях движения вязкой жидкости, зависящих от двух переменных (время плюс одна координата), может быть проведена процедура разделения переменных, что даёт возможность найти точное нестационарное решение для движения жидкости. В этом смысле решение неизотермической конвективной задачи в работе Гершуни, Келлера и Смородина [20] мало чем отличается от решения путём разделения переменных, которое предложил Громека, хотя добавившееся тепловое поле несомненно усложняет процедуру нахождения решения. Тот же приём использовал Бирих [6]. Так как найденное конвективное решение имеет физический смысл, а решение задач для условий микрогравитации стало весьма актуальным направлением исследований в последнее время, то появилось несколько работ, посвященных изучению устойчивости этого течения [21–25]. В работах одного из авторов [23–25] показано, что решение может быть обобщено на случай запыленной среды (жидкости, несущей мелкую твёрдую примесь), для которой была решена задача устойчивости. Так как течение существенно нестационарное, то также оценивалось влияние на его устойчивость нестационарных сил трения между жидкой и твёрдой фазами [25]. Важный результат получен в работе [23]. Рассмотрено комбинированное течение в плоском слое жидкости, по одной из координат которого действует стационарная сила тяжести, а по другой — осуществляются вибрации с конечной частотой. Оказалось, что такое сложное течение не меняет свой ламинарный характер, что даёт возможность расщепить задачу по пространственным направлениям, найти отдельно аналитические выражения для двух компонент скорости вдоль слоя, рассчитать их эпюры поперек слоя, а затем отдельно решить задачи устойчивости компонент течений. По-видимому, этот подход открывает широкие возможности для конструирования точных нестационарных пространственных решений ламинарного типа.

По мнению авторов, этот тип точного решения не нашёл должного развития. Между тем, в научной среде активно обсуждаются, например, нестационарные аналоги течения Бириха [26–29]. Многие из них имеют нефизический характер и вряд ли могут быть реализованы в лаборатории из-за вероятного возникновения деформаций свободной поверхности, которые приводят к нарушению групповой симметрии уравнений.

В данной работе приведено несколько задач термо- и хемовибрационной конвекции, в каждой из которых получено точное нестационарное решение определяющих уравнений. Авторы не претендуют на теоретико-групповой анализ уравнений и широкое обобщение представленных решений. Целью является демонстрация возможностей конструирования разнообразных точных решений, аналогичных решениям в [19, 20], для привлечения внимания исследователей к сводящимся к ним задачам как при общем анализе, так и при поисках ответа на вопрос об устойчивости соответствующих нестационарных течений.

## 2. Комбинированная конвекция жидкости в плоском вертикальном слое, обогреваемом сбоку

В экспериментальной работе Зюзгина и Путина [30] исследовалось комбинированное течение жидкости в плоском вертикальном слое толщиной  $2h$ , подогреваемом сбоку до разности температур между стенками  $2\Theta$  (Рис. 1). Течение возникало за счёт двух физических воздействий: вдоль оси  $y$  (будем называть её

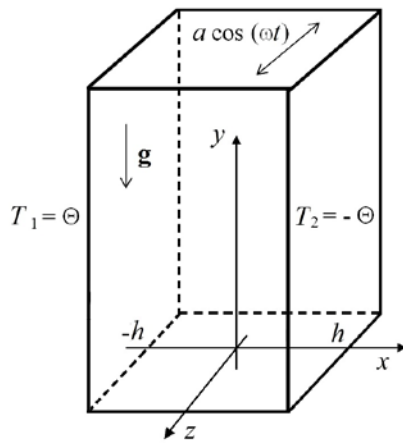


Рис. 1. Геометрия задачи конвективного движения жидкости в вертикальном слое, подогреваемом сбоку и совершающем горизонтальные поступательные вибрации конечной частоты

«вертикальной») оказывала влияние постоянная сила тяжести, а вдоль «горизонтальной» оси  $z$  — переменное инерционное поле, которое возникало вследствие поступательных вибраций с амплитудой  $a$  и частотой  $\omega$ . В качестве рабочей жидкости использовался авиационный керосин (его число Прандтля  $Pr=26$ ). Реакцией на нагружение было формирование в слое комбинированного ламинарного течения, устойчивость которого затем исследовалась при различных значениях амплитуды и частоты вибраций.

В результате экспериментов обнаружено, что при частоте вибраций меньшей, чем 19 Гц, в слое параметрически возбуждается вторичное течение, которое имеет структуру, представляющую собой последовательность вертикально ориентированных конвективных валов, существующих на фоне подъёмно-опускного течения. В данной работе не ставилось целью изучение вторичных течений, однако стоит отметить, что структура комбинированного вторичного течения натолкнула авторов на идею о независимости двух компонент скорости основного течения и возможности расщепления уравнений конвекции на две части [23].

Уравнения тепловой конвекции для несжимаемой жидкости, записанные в приближении Буссинеска–Обербека, для рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \beta T (g \mathbf{k} + a \omega^2 \cos(\omega t) \mathbf{n}), \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \chi \Delta T, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{3}$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости,  $T$  и  $p$  — отклонения температуры и давления от средних значений,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\beta$  — объёмный коэффициент теплового расширения,  $\chi$  — коэффициент температуропроводности,  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{n}$  — единичные векторы, соответственно, в направлении осей  $y$  и  $z$ .

К системе уравнений (1)–(3) нужно добавить граничные условия для скорости и температуры:

$$x = \pm h: \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = \mp \Theta. \tag{4}$$

Запишем задачу (1)–(4) в безразмерной форме, выбрав в качестве единиц измерения: длины — величину  $h$ , времени —  $h^2/\nu$ , скорости —  $\nu/h$ , температуры —  $\Theta$  и давления —  $\rho \nu^2/h^2$ :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \text{Gr} T (\mathbf{k} + A \cos(\Omega t) \mathbf{n}), \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \text{Pr} \Delta T, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (7)$$

$$x = \pm 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = \mp 1. \quad (8)$$

Как видим, в задаче появились безразмерные критерии подобия: число Грасгофа  $\text{Gr} = g\beta\Theta h^3/\nu^2$ ; амплитуда вибраций (параметр перегрузки)  $A = a\omega^2/g$ ; число Прандтля  $\text{Pr} = \nu/\chi$ ; частота вибраций  $\Omega = \omega h^2/\nu$ .

Предположим, что уравнения, описывающие структуру основного течения, инвариантны к трансляции системы координат в любом направлении вдоль слоя:  $\partial/\partial y = 0$ ,  $\partial/\partial z = 0$ . При этом основное течение остаётся ламинарным в каждый момент своей эволюции:  $v_x = 0$ . Будем искать решение в виде:  $\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{V}(0, V_y(x, t), V_z(x, t))$ ,  $T = T_0(x, t)$ ,  $P = P_0(x, t)$ . Тогда уравнение неразрывности (7) удовлетворится автоматически.

Запишем уравнения (5) и (6) покомпонентно:

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \text{Gr} T_0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \text{Gr} A T_0 \cos(\Omega t), \quad (10)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2}. \quad (11)$$

Отсюда следует, что  $T_0$  и  $V_y$  не зависят явно от времени, давление является константой, а нахождение распределения температуры (11) выделяется в отдельную задачу. Давление вдоль координат не меняется, хотя вполне может испытывать осцилляции по времени (уравнения это допускают). Система уравнений (9)–(11) решается последовательно: сначала (11), а затем находят компоненты скорости из (9) и (10). Так как уравнения (9), (10) имеют, вообще говоря, много возможных решений, необходимо выбрать из них физически осмысленные. Для этого дополнительно предположим наличие замкнутости потока вдоль обеих горизонтальных осей:

$$\int_{-1}^1 V_y(x) dx = 0, \quad \int_{-1}^1 V_z(x, t) dx = 0. \quad (12)$$

Уравнение (10) удобно решать в комплексной форме, заменяя  $\cos(\Omega t)$  на  $\exp(i\Omega t)$ . Тогда решение для  $z$ -компоненты скорости также можно разыскивать в форме, пропорциональной  $\exp(i\Omega t)$ . Исходя из этого, получим:

$$V_y(x) = \text{Gr}(x^3 - x)/6, \quad (13)$$

$$V_z(x, t) = \text{Re} \left( i \frac{\text{Gr} A}{\Omega} \left( x - \frac{\text{sh}(\mu x)}{\text{sh}(\mu)} \right) e^{i\Omega t} \right), \quad (14)$$

$$T_0 = -x, \quad (15)$$

$$P_0 = \text{const}(t), \quad (16)$$

где  $\text{Re}(\dots)$  — действительная часть комплексного выражения, а  $i$  — мнимая единица. Здесь введено обозначение  $\mu = (1+i)\sqrt{\Omega/2}$ .

Как видно из выражения (13), компонента  $V_y$  основного течения не зависит от времени и представляет собой классическую кубическую функцию [2], а нестационарное решение для компоненты скорости  $V_z$

(14) устроено более сложно. С учетом обеих компонент элемент жидкости движется не по прямой линии, как в статическом случае, а по некоторой кривой, лежащей в плоскости слоя. При этом ламинарность потока сохраняется. Обе компоненты скорости основного течения схематично показаны на рисунке 2а. Так как течение вдоль оси  $z$  носит пульсационный характер, то надо учитывать, что эпюры скорости отвечают какому-то фиксированному моменту времени. На рисунке 2б показаны профили скорости основного течения в плоскости  $(x, z)$  для последовательных моментов времени  $t = 0; 0,3\tau; 0,6\tau; 0,9\tau$ , где  $\tau$  — полупериод вибраций. Главным физическим механизмом, вызывающим движение жидкости, является разный вес ламинарных слоёв жидкости, который складывается под действием приложенной разности температур. Так как нагретый и холодный элементы жидкости имеют разную плотность, то они по-разному реагируют на пульсации инерционного поля. Более подвижный нагретый ламинарный слой, начиная движение первым, выталкивает холодные слои благодаря условию замкнутости течения (12), что приводит к причудливо изменяющейся во времени эпюре скорости (Рис. 2б).

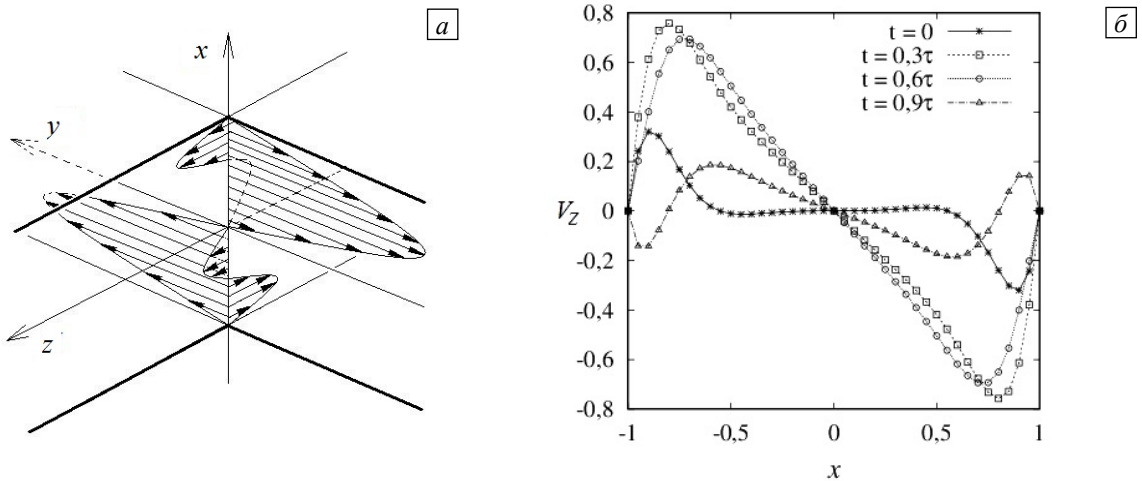


Рис. 2. Комбинированное ламинарное течение (а), описываемое уравнениями (5)–(8); эпюра  $z$ -компоненты скорости (б) в разные моменты времени при  $G\Gamma A = 100$  и  $\Omega = 100$

Необходимо отметить, что точное нестационарное решение (14) впервые было найдено в работе [20], где исследовались продольные линейные вибрации плоского слоя жидкости в невесомости. Важной особенностью этого решения является ортогональность градиента неоднородности (в данном случае — распределения температуры) и направления движения жидкости. Если это условие не выполняется, то разделение переменных осуществить невозможно. Это означает, что ламинарное движение жидкости не реализуется, и решение не может быть представлено в элементарных функциях.

В обобщённом виде уравнение (10) можно записать как

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + F(x)\cos(\Omega t), \tag{17}$$

где давление уже может быть не постоянным вдоль слоя, а неоднородность плотности  $F(x)$ , которая входит в осциллирующее слагаемое уравнения (17), может иметь сложную функциональную зависимость от поперечной координаты  $x$ . Тогда процедура получения решения становится весьма похожей на процедуру, осуществлённую Бирихом в задаче о термокапиллярной конвекции с продольным градиентом температуры, являющимся причиной движения жидкости [6]. Используя этот приём, можно конструировать точные нестационарные решения для различных геометрий и физических эффектов, вызывающих неоднородную стратификацию среды.

### 3. Термовибрационная конвекция жидкости в плоском слое с внутренними источниками тепла

В качестве следующего примера рассмотрим плоский слой жидкости, заключённый между высокотеплопроводными стенками. Предположим, что внутри слоя по объёму равномерно распределены источники тепла, имеющие мощность тепловыделения  $Q$ . Вся конструкция находится под воздействием поступательных вибраций, направленных для определённости вдоль оси  $z$ . Начало координат расположим точно так же, как это показано на рисунке 1. Если пластины, ограничивающие слой, поддерживаются при

постоянных одинаковых температурах, то температурное поле внутри слоя будет инвариантно по отношению к операции отражения относительно середины слоя. Найдём нестационарное распределение скорости жидкости в этой задаче.

Для рассматриваемого случая уравнение движения совпадает с уравнением движения (1) за исключением того, что теперь конструкция находится в условиях невесомости ( $g = 0$ ). В уравнении теплопереноса появляется слагаемое, учитывающее наличие внутренних источников тепла:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \chi \Delta T + \frac{Q}{\rho c_p}. \quad (18)$$

где  $c_p$  — теплоёмкость на единицу массы. Будет полагать, что  $Q$  не зависит от координат и времени. Так как внешний нагрев слоя, который мог бы задать единицу измерения для температуры, в этой задаче отсутствует, то такую единицу конструируем на основе мощности тепловыделения —  $Qh^2/(2\kappa v)$ , где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности. Все остальные единицы измерения остаются такими же, как и в предыдущем разделе. Тогда получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + Gr_v T \cos(\Omega t) \mathbf{n}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pr} \Delta T + \frac{2}{Pr}, \quad (20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (21)$$

$$x = \pm 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = 0. \quad (22)$$

В задаче появился новый критерий подобия — вибрационное число Грасгофа  $Gr_v = a\omega^2\beta h^2 Q/(2\kappa v^2)$ , выраженное через мощность источников тепла. Вновь полагая течение ламинарным, приходим к выводу, что температурное поле не зависит от времени, а его уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + 2 = 0. \quad (23)$$

Решив уравнение (23) с граничными условиями (22), приходим к следующему уравнению движения:

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial P_0}{\partial z} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + Gr_v (1-x^2) \cos(\Omega t). \quad (24)$$

Уравнение в частных производных (24) может быть разрешено, если правильно подобрать поле давления. Разделяя переменные  $V_z(x, t) = V(x) \exp(i\Omega t)$ , представляя уравнение (24) в комплексной форме, а также удовлетворяя граничным условиям (22) и условию замкнутости потока (12), имеем точное нестационарное решение для единственной

компоненты скорости, давления и температуры соответственно:

$$V_z(x, t) = \text{Re} \left( i \frac{Gr_v}{\Omega} \left( x^2 - 1 + \frac{2}{3} \frac{\mu}{(\mu - \text{th}(\mu))} \left( 1 - \frac{\text{ch}(\mu x)}{\text{ch}(\mu)} \right) \right) e^{i\Omega t} \right), \quad (25)$$

$$P_0(z, t) = \text{Re} \left( \frac{2}{3} Gr_v \left( \frac{\mu}{\mu - \text{th}(\mu)} + \frac{2i}{\Omega} \right) z e^{i\Omega t} \right), \quad (26)$$

$$T_0(x) = 1 - x^2. \quad (27)$$

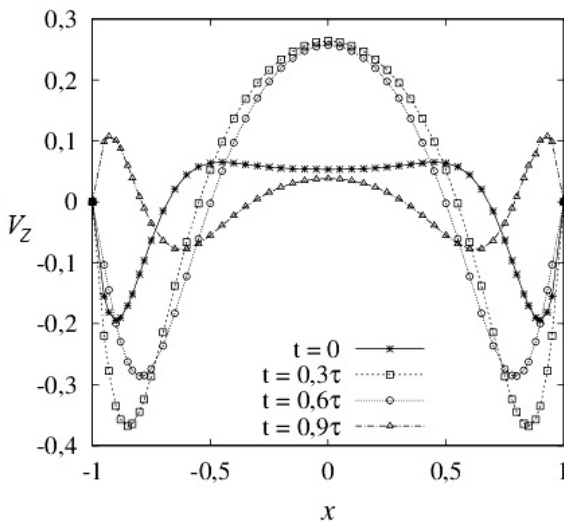


Рис. 3. Профили скорости основного течения (25) в разные моменты времени при  $Gr_v = 100$  и  $\Omega = 100$

Здесь введено обозначение  $\mu = (1+i)\sqrt{\Omega/2}$ . На рисунке 3 представлена динамика скорости основного течения в плоскости  $(x, z)$  при  $\Omega = 100$  для последовательных моментов времени  $t = 0; 0,3\tau; 0,6\tau; 0,9\tau$ , где  $\tau$  — как и ранее, полупериод вибраций. Течение (25) отличается от решения (14) своей симметрией.

#### 4. Хемовибрационная конвекция жидкости в плоском слое

Выше рассмотрены случаи, когда точные решения обладают определённой симметрией, навязываемой задачей. В первом из них профиль скорости остаётся антисимметричным («нечётным») по оси  $x$  в любой момент эволюции во времени (Рис. 2б). Во втором случае, показанном на рисунке 3, решение является симметричным («чётным»). Тем не менее, если течение сохраняет ламинарность, точное нестационарное решение может быть найдено и для асимметричного течения.

Пусть на левой границе плоского слоя задан постоянный градиент  $J$  реагента, который характеризуется концентрацией  $X$ . Будем считать, что реагент является тяжёлым компонентом по отношению к жидкой среде растворителя внутри слоя и подаётся в жидкость извне (например, посредством десорбции реагента с твёрдой стенки). Слой испытывает воздействие продольных поступательных вибраций, а вся конструкция находится в невесомости. Предположим также, что реагент, проникая внутрь слоя, вступает с жидкостью в химическую реакцию первого порядка:



где  $K$  — скорость реакции. Так как в слое за счёт механизмов реакции и диффузии происходит неоднородная стратификация по плотности, то среда становится чувствительной к внешнему инерционному полю. Система уравнений в безразмерной форме имеет вид:

$$\frac{1}{Sc} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + Ra X \cos(\Omega t) \mathbf{n}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) X = \Delta X - DX, \tag{30}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{31}$$

где для обезразмеривания выбраны диффузионные единицы: длины — величина  $h$ ; времени —  $h^2/D_x$ ; скорости —  $D_x/h$ ; давления —  $\rho \nu D_x/h^2$ ; концентрация —  $hJ$ . В задаче (29)–(31) появились три новых критерия подобия: число Шмидта  $Sc = \nu/D_x$ ; концентрационное число Рэлея  $Ra = a\omega^2 \beta_x J h^4 / (\nu D_x)$ ; число Дамкёлера  $D = h^2 K/D_x$ . Числа Шмидта и Дамкёлера определяют отношения характерного диффузионного времени, соответственно, к гидродинамическому времени и характерной скорости реакции. Здесь  $D_x$  — коэффициент диффузии реагента;  $\beta_x$  — концентрационный коэффициент объёмного расширения.

Граничные условия для полей скорости и концентрации зададим как

$$x = -1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial x} = -1. \tag{32}$$

$$x = 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial x} = 0. \tag{33}$$

Решение задачи (29)–(33) будем искать в классе плоскопараллельных ламинарных течений. При этом от нуля отлична одна — продольная — составляющая скорости  $V = V_z(x, t)$ . Однако следует помнить, что поле концентраций не должно меняться вдоль слоя:  $X = X(x, t)$ . В этом случае уравнение для концентрации (30) легко решается, а уравнение движения (29) сводится к виду:

$$\frac{1}{Sc} \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial P_0}{\partial z} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{Ra}{\sqrt{D}} \frac{\text{ch}(\sqrt{D}(x-1))}{\text{sh}(2\sqrt{D})} \cos(\Omega t). \tag{34}$$



В дифференциальном уравнении (34) можно произвести разделение переменных, если правильно подобрать поле давления. Используя замкнутость потока (12) и граничные условия (32), (33), находим точное нестационарное решение для несимметричного слоистого течения:

$$V_z(x,t) = \operatorname{Re} \left( \frac{\operatorname{Ra}}{2D(D-\eta^2)} \left( f_1 + (f_2 - f_1) \frac{\operatorname{ch}(\eta x)}{\operatorname{ch}(\eta)} - \frac{2\sqrt{D} \operatorname{ch}(\sqrt{D}(x-1))}{\operatorname{sh}(2\sqrt{D})} - \frac{\sqrt{D} \operatorname{th}(\sqrt{D})}{\operatorname{sh}(\eta)} e^{-\eta x} \right) e^{i\Omega t} \right), \quad (35)$$

$$P_0(z,t) = \operatorname{Re} \left( \frac{\operatorname{Ra}\eta^2}{2D(D-\eta^2)} \frac{(\sqrt{D} \operatorname{cth}(\sqrt{D}) - \eta \operatorname{cth}(\eta))}{(1 - \eta \operatorname{cth}(\eta))} z e^{i\Omega t} \right), \quad (36)$$

$$X_0(x) = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{D}(x-1))}{\sqrt{D} \operatorname{sh}(2\sqrt{D})}, \quad (37)$$

где введены обозначения

$$\eta = (1+i) \sqrt{\frac{\Omega}{2\operatorname{Sc}}}, \quad f_1 = \frac{\sqrt{D} \operatorname{cth}(\sqrt{D}) - \eta \operatorname{cth}(\eta)}{\eta \operatorname{cth}(\eta) - 1}, \quad f_2 = \frac{\sqrt{D} \operatorname{th}(\sqrt{D})}{\operatorname{sh}(\eta)} e^{-\eta} - \frac{2\sqrt{D}}{\operatorname{sh}(2\sqrt{D})}. \quad (38)$$

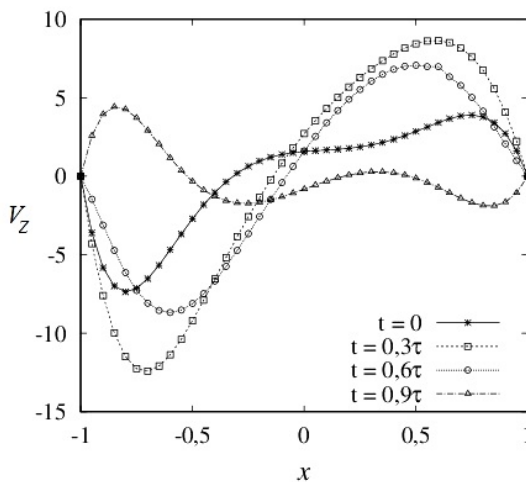


Рис. 4. Профили скорости основного течения (35) в разные моменты времени при  $D = 1$ ,  $\operatorname{Sc} = 1$ ,  $\Omega = 25$  и  $\operatorname{Ra} = 1200$

На рисунке 4 представлены эпюры скорости основного течения в плоскости  $(x, z)$  для последовательных моментов времени  $t = 0; 0,3\tau; 0,6\tau; 0,9$ . Из рисунка видно, что поступающий в слой компонент образует более тяжёлый и инертный подслой у левой границы, который реагирует на изменение внешнего инерционного поля по иному, чем однородная жидкость у правой границы. В силу протекающей реакции диффузия не может выровнять концентрацию реагента, в слое создаётся неоднородное распределение примеси. Это приводит к развитию хемовибрационной конвекции, механизм которой аналогичен тому, что вызывает термовибрационную конвекцию. Как видно из формул (35)–(38), вид течения существенно зависит от соотношения характерных времён реакции и диффузии. Последнее определяется числом Дамкёлера  $D$ . Чем выше значение этого числа, тем быстрее происходит реакция, течение ближе прижимается к левой стенке слоя и приобретает характер

погранслоного. При уменьшении  $D$  неоднородность среды становится менее выраженной, и интенсивность течения падает.

## 5. Термовибрационная конвекция в цилиндрической трубе с внутренними источниками тепла

Рассмотрим теперь пример точного осесимметричного решения для задачи движения равномерно тепловыделяющей жидкости в бесконечной цилиндрической трубе круглого сечения с радиусом  $R$ , находящейся в невесомости. Такая конструкция интересна тем, что течение в ней даёт пример точного пространственного решения. Цилиндрическая геометрия часто встречается в различных приложениях и популярна среди исследователей. Достаточно сказать, что одно из первых точных решений в гидродинамике было получено Прандтлем [1] для задачи течения в трубе, а его нестационарный вариант рассмотрен в пионерской работе Громеки [19].

Пусть поступательные гармонические вибрации с амплитудой  $a$  и частотой  $\omega$  направлены вдоль трубы, а вся конструкция находится в невесомости. Выберем в качестве единицы измерения температуры величину  $R^2 Q / (\rho c_p \nu)$ , где радиус трубы играет роль характерной длины. Тогда система уравнений термовибрационной конвекции с внутренними источниками тепла запишется в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \operatorname{Gr}_v T \cos(\Omega t) \mathbf{n}, \quad (39)$$



$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T + 1, \quad (40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (41)$$

Будем полагать, как и ранее, что градиент неоднородности и скорость жидкости остаются ортогональными друг другу в любой момент времени. В этом случае течение сохраняет ламинарность, то есть имеется только одна компонента скорости —  $V_z$ , которая направлена вдоль оси цилиндра. Тогда уравнение неразрывности (41) удовлетворится автоматически. Переходя в цилиндрическую систему координат и считая течение осесимметричным, получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial P_0}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \text{Gr}_v T_0 \cos(\Omega t), \quad (42)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_0}{\partial r} \right) + \text{Pr} = 0. \quad (43)$$

К уравнениям (42), (43) необходимо добавить граничные условия:

$$r = 1: \quad V_z = 0, \quad T_0 = 0, \quad (44)$$

а также условие ограниченности скорости на оси цилиндра  $r = 0$ . Так как распределение температуры не зависит от времени, то уравнение (43) легко решается. Подставляя это решение в уравнение движения (42), имеем:

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial P_0}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{4} \text{Gr}_v \text{Pr} (1 - r^2) \cos(\Omega t). \quad (45)$$

Дальнейшая процедура получения решения аналогична описанной выше: уравнение (45) записывается в комплексной форме, и все поля, осциллирующие по времени (скорость и давление), ищутся в пропорциональном  $\exp(i\Omega t)$  виде, производится разделение переменных по времени и радиусу. При выполнении условия замкнутости потока, существование которой предполагается и в данном случае, решение принимает вид:

$$\int_0^1 V_z(r, t) r dr = 0. \quad (46)$$

В итоге точное решение для нестационарного слоистого течения жидкости в трубе будет иметь вид:

$$V_z(x, t) = \text{Re} \left( \frac{\text{Gr}_v \text{Pr}}{4\Omega} \left( r^2 - 1 - \sqrt{i\Omega} \frac{J_0(i\sqrt{i\Omega}r) - J_0(i\sqrt{i\Omega})}{4i J_1(i\sqrt{i\Omega}) + \sqrt{i\Omega} J_0(i\sqrt{i\Omega})} \right) e^{i\Omega t} \right), \quad (47)$$

$$P_0(z, t) = \text{Re} \left( i \frac{\text{Gr}_v}{\Omega} \left( 1 - \frac{i\sqrt{i\Omega} J_0(i\sqrt{i\Omega})}{16i J_1(i\sqrt{i\Omega}) + 8\sqrt{i\Omega} J_0(i\sqrt{i\Omega})} \right) z e^{i\Omega t} \right), \quad (48)$$

$$T_0(r) = \text{Pr} (1 - r^2) / 4, \quad (49)$$

где  $J_0$  и  $J_1$  — функции Бесселя, соответственно, 0-го и 1-го порядка.

На рисунке 5 изображены пространственные эпюры скорости основного течения в разные моменты времени:  $t = 0; 0,3\tau; 0,6\tau; 0,9\tau$ . Физический механизм, вызывающий конвекцию, здесь точно такой же, как в задаче о теплоразогреве плоского слоя. Сердцевина трубы прогревается лучше, и плотность жидкости в ней уменьшается. Более холодные пристеночные слои становятся плотнее. Таким образом формируется неоднородная стратификация плотности, ортогональная оси цилиндра. При наложении внешнего инерционного поля система мгновенно отзывается неодинаковым сдвигом ламинарных слоёв. При замкнутости потока это приводит к нетривиальной перестройке эпюры скорости во времени. Например, в момент  $t = 0,9\tau$  (Рис. 5з) в цилиндре формируется сильная теплая струя в положительном направлении оси  $z$ . Парадоксально, но туда же течёт холодная жидкость у стенок цилиндра. А вот в средней зоне — между осью и стенками — формируется возвратное течение.

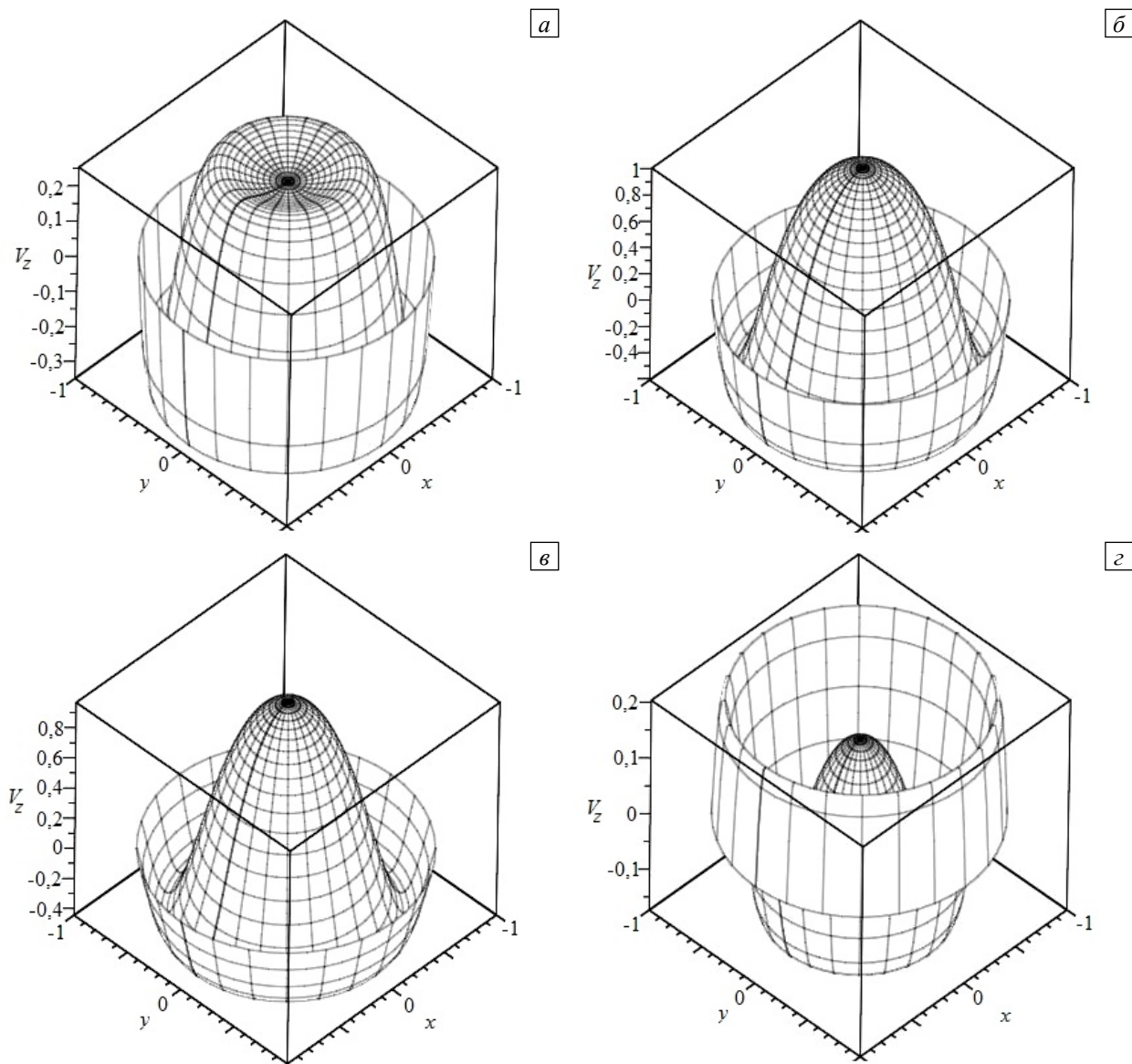


Рис. 5. Профили скорости основного течения при  $Gr, Pr=1000$  и  $\Omega=100$  в разные моменты времени  $t$ : 0 (а);  $0,3\tau$  (б);  $0,6\tau$  (в);  $0,9\tau$  (г)

## 6. Заключение

В работе построены точные нестационарные решения некоторых задач хемо- и термовибрационной конвекции. Показано, что главным условием их получения является выполнение условия ортогональности градиента неоднородности к движению жидкости. Важные особенности описанных решений заключаются в том, что они имеют явный физический смысл и дают возможность наблюдать процесс движения жидкости экспериментально. Авторы надеются, что работа привлечёт внимание исследователей к данному классу конвективных течений не только при необходимости отыскания нестационарных решений для более сложных комбинированных задач, но и при анализе устойчивости течений, осуществляемых в подобных условиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 3.6990.2017/8.9, выполняемый в рамках госзадания).

## Литература

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
3. Гершуни Г.З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости // ЖТФ. – 1953. – Т. 3, № 10. – С. 1838-1844.
4. Batchelor G.K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures // Quart. Appl. Math. – 1954. – Vol. 12, no. 3. – P. 209-233. [DOI](#)

5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
6. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. – 1966. – № 3. – С. 69-72. (English version [DOI](#)).
7. Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // ПМТФ. – 2013. – Т. 54, № 2. – С. 3-20. (English version [DOI](#)).
8. Пухначев В.В. Теоретико-групповая природа решения Бириха и его обобщения // Симметрия и дифференциальные уравнения: Труды II Международной конференции, Красноярск, 21-25 августа 2000 г. – Красноярск, 2000.
9. Катков В.Л. Точные решения некоторых задач конвекции // ПММ. – 1968. – Т. 32, № 3. – С. 11-18. (English version [DOI](#)).
10. Андреев В.К. Решение Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения: Препринт №1-10 / ИВМ СО РАН. – Красноярск, 2010. – 68 с.
11. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1952. – 256 с.
12. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
13. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // ДАН. – 1959. – Т. 125, № 3. – С. 492-495.
14. Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. – Новосибирск: Наука, 1994. – 320 с.
15. Андреев В.К., Рыжков И.И. Групповая классификация и точные решения уравнений термодиффузии // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 4. – С. 508-517. (English version [DOI](#)).
16. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Новый класс точных решений уравнений термодиффузии // ТОХТ. – 2016. – Т. 50, № 3. – С. 294-301. (English version [DOI](#)).
17. Гончарова О.Н. Точные решения линеаризованных уравнений слабосжимаемой жидкости // ПМТФ. – 2005. – Т. 46, № 2. – С. 52-63. (English version [DOI](#)).
18. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. – Пермь: Изд-во ПГУ, 2006. – 154 с.
19. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках // Учен. зап. Казан. ун-та. Отд. физ.-мат. наук. – 1882. – Кн. I. – С. 41-72.
20. Гершуни Г.З., Келлер И.О., Смородин Б.Л. О вибрационно-конвективной неустойчивости в невесомости плоского горизонтального слоя жидкости при конечных частотах вибрации // МЖГ. – 1996. – № 5. – с. 44-51. (English version [DOI](#)).
21. Pesch W., Palaniappan D., Tao J., Busse F.H. Convection in heated fluid layers subjected to time-periodic horizontal accelerations // J. Fluid Mech. – 2008. – Vol. 596. – P. 313-332. [DOI](#)
22. Smorodin B.L., Muznikova B.I., Keller I.O. Asymptotic laws of thermovibrational convection in a horizontal fluid layer // Microgravity Sci. Technol. – 2017. – Vol. 29, no. 1-2. – P. 19-28. [DOI](#)
23. Bratsun D.A., Teplov V.S. On the stability of the pulsed convective flow with small heavy particles // Eur. Phys. J. A. – 2000. – Vol. 10. – P. 219-230. [DOI](#)
24. Bratsun D.A., Teplov V.S. Parametric excitation of a secondary flow in a vertical layer of a fluid in the presence of small solid particles // J. Appl. Mech. Techn. Phys. – 2001. – Vol. 42, No. 1. – P. 42-48. [DOI](#)
25. Bratsun D.A. Effect of unsteady forces on the stability of non-isothermal particulate flow under finite-frequency vibrations // Microgravity Sci. Technol. – 2009. – Vol. 21, no. 1. – P. 153-158. [DOI](#)
26. Пухначев В.В. Нестационарные аналоги решения Бириха // Известия АлтГУ. – 2011. – № 1-2. – С. 62-69.
27. Пухначев В.В. Точные решения уравнений гидродинамики, построенные на основе частично инвариантных // ПМТФ. – 2003. – Т. 44, № 3. – С. 18-25. (English version [DOI](#)).
28. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю., Сневак Л.Ф. Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция Марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 445-455. [DOI](#)
29. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. – М.: Физматлит, 2008. – 368 с.
30. Зюзгин А.В., Путин Г.Ф. Устойчивость подъемно-опускного течения в вертикальном слое жидкости под воздействием высокочастотных вибраций // Вибрационные эффекты в гидродинамике. – Пермь: ПГУ, 1998. – Вып. 1. – С. 130-141.

## References

1. Loitsyanskii L.G. *Mechanics of liquids and gases*. New York: Begell House, 1995. 971 p.
2. Gershuni G.Z., Zhukovitskii E.M. *Convective stability of incompressible fluids*. Jerusalem: Keter Publications, 1976.
3. Gershuni G.Z. Ob ustojchivosti ploskogo konvektivnogo dvizheniya zhidkosti [On the stability of plane convective fluid flow]. *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*, 1953, vol. 3, no. 10, pp. 1838-1844.
4. Batchelor G.K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures. *Quart. Appl. Math.*, 1954, vol. 12, no 3, pp. 209-233. [DOI](#)
5. Gershuni G.Z., Zhukhovitsky E.M., Nepomnyashchy A.A. Ustojchivost' konvektivnykh techenij [Stability of convective flows]. Moscow: Nauka, 1989. 320 p.
6. Birikh R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1966, vol. 7, no. 3, pp. 43-47. [DOI](#)
7. Andreev V.K., Bekezhanova V.B. Stability of non-isothermal fluids (review). *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 171-184. [DOI](#)
8. Pukhnachev V.V. *Symmetry and differential equations: II International Conference 21-25 August 2000, Krasnoyarsk*.

9. Katkov V.L. Exact solutions of certain convection problems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1968, vol. 32, no. 3, pp. 482-487. [DOI](#)
10. Andreev V.K. *Reshenije Biriha uravnenij konvekcii i nekotorye ego obobshhenija* [Birikh solution of convection equations and some of its generalizations]. Preprint No 1-10, Inst. Comput. Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, 2010. 68 p.
11. Ostroumov G.A. *Svobodnaya konveksiya v usloviyah vnutrennei zadachi* [Free convection in internal tasks]. Moscow-Leningrad. Gostehizdat, 1952, 256 p.
12. Ovsyannikov L.V. *Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii* [Group analysis of differential equations]. Moscow: Nauka, 1978. 400 p.
13. Ovsyannikov L.V. Gruppovye svoystva uravnenii nelineinoi teploprovodnosti [Group properties of a nonlinear heat equation]. *Doklady Physics*, 1959, vol. 125, no. 3, pp. 492-495.
14. Andreev V.K., Kapstov O.V., Pukhnachev V.V., Rodionov A.A. *Primenenie teoretiko-gruppykh metodov v gidrodinamike* [The application of group-theoretical methods in hydrodynamics]. Novosibirsk: Nauka, 1994. 320 p.
15. Andreev V.K., Ryzhkov I.I. Symmetry classification and exact solutions of the thermal diffusion equations. *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 4, pp. 538-547. [DOI](#)
16. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286-293. [DOI](#)
17. Goncharova O.N. Exact solutions of linearized equations of convection of a weakly compressible fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2005, vol. 46, no. 2, pp. 191-201. [DOI](#)
18. Aristov S.N., Shvarts K.G. Vikhrevyte techeniya advektivnoi prirody vo vraschayuschemsya sloe zhidkosti [Vortex flow advective nature in a rotating fluid layer]. Perm', Izd-vo PGU, 2006, 154 P.
19. Gromeka I.S. K teorii dvizheniya zhidkosti v uzkih tsilindricheskikh trubkakh [The theory of motion of fluids in narrow cylindrical tubes]. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta*, 1882, book I, pp. 41-72.
20. Gershuni G.Z., Keller I.O., Smorodin B.L. Vibrational and convective instability of a plane horizontal fluid layer at finite vibration frequencies. *Fluid Dynamics*, 1996, vol. 31, no. 5, pp. 666-671. [DOI](#)
21. Pesch W., Palaniappan D., Tao J., Busse F.H. Convection in heated fluid layers subjected to time-periodic horizontal accelerations. *J. Fluid Mech.*, 2008, vol. 596, pp. 313-332. [DOI](#)
22. Smorodin B.L., Myznikova B.I., Keller I.O. Asymptotic laws of thermovibrational convection in a horizontal fluid layer. *Microgravity Sci. Technol.*, 2017, vol. 29, no. 1-2, pp. 19-28. [DOI](#)
23. Bratsun D.A., Teplov V.S. On the stability of the pulsed convective flow with small heavy particles, *Eur. Phys. J. A.*, 2000, vol. 10, pp. 219-230. [DOI](#)
24. Bratsun D.A., Teplov V.S. Parametric excitation of a secondary flow in a vertical layer of a fluid in the presence of small solid particles. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2001, vol. 42, no. 1, pp. 42-48. [DOI](#)
25. Bratsun D.A. Effect of unsteady forces on the stability of non-isothermal particulate flow under finite-frequency vibrations. *Microgravity Sci. Technol.*, 2009, vol. 21, no. 1, pp. 153-158. [DOI](#)
26. Pukhnachev V.V. Nestatsionarnye analogi resheniya Birikha [Non-stationary analogues of the Birikh solution]. *Izvestiya of Altai State University*, 2011, no. 1-2, pp. 62-69.
27. Pukhnachev V.V. Exact solutions of the hydrodynamic equations derived from partially invariant solutions. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2003, vol. 44, no. 3, pp. 317-323. [DOI](#)
28. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu., Spevak L.F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid. *Vychisl. mech. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 445-456. [DOI](#)
29. Andreev S.N., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Sovremennye matematicheskie modeli konveksii* [Modern mathematical models of convection]. Moscow: Fizmatlit, 2008. 368 p.
30. Zyuzgin A.V., Putin G.F. Ustoichivost' pod'emno-opusknogo techeniya v vertival'nom sloe zhidkosti pod vozdeistviem vysokochastotnykh vibratsii [The stability of the lifting and lowering of the flow in a vertical fluid layer under the influence of high frequency vibrations]. *Vibratsionnye efekty v gidrodinamike* [Vibration effects in hydrodynamics]. Perm: Perm State University, 1998, no. 1, pp. 130-141.

Поступила в редакцию 20.11.2017; опубликована в электронном виде 30.12.2017

#### Сведения об авторах

Брацун Дмитрий Анатольевич, дфмн., зав.каф., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614013, Пермь, ул. Профессора Поздеева, 11; e-mail: dmitribratsun@rambler.ru

Вяткин Владимир Александрович, б/с, мнс, ПНИПУ; e-mail: vva063@bk.ru

Мухаматуллин Айназ Радикович, студ., Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет (ПГГПУ), 614000, Пермь, ул. Сибирская, 24; e-mail: mukhamatullin.ainaz@yandex.ru