

DOI: [10.7242/1999-6691/2017.10.4.32](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.4.32)

УДК 534-13

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЧАСТИЧНО ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

С.А. Бочкарёв

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

В работе приводятся результаты исследований собственных колебаний круговых цилиндрических оболочек, покоящихся на упругом основании, которое описывается двухпараметрической моделью Пастернака. В меридиональном направлении упругая среда является неоднородной, при этом неоднородность представляет собой чередование участков с наличием или отсутствием среды. Поведение оболочки рассматривается в рамках классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява. Соответствующие геометрические и физические соотношения совместно с уравнениями движения сводятся к системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений относительно новых неизвестных. Решение сформулированной краевой задачи осуществляется методом ортогональной прогонки Годунова с численным интегрированием дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты четвёртого порядка точности. Для вычисления собственных частот колебаний используется сочетание пошаговой процедуры с последующим уточнением посредством метода деления пополам. Достоверность полученных результатов подтверждена путём сравнения с известными численно-аналитическими решениями. Для свободно опёртых, жёстко закреплённых и консольных цилиндрических оболочек продемонстрированы зависимости минимальных частот колебаний от характеристик упругой среды с разными вариантами ее неоднородности. Показано, что нарушение гладкости построенных кривых обусловлено как сменой моды с минимальной частотой колебаний, так и отношением размера упругого основания к полной длине оболочки и его жёсткостью, а также комбинацией граничных условий, заданных на торцах тонкостенной конструкции.

Ключевые слова: классическая теория оболочек, цилиндрическая оболочка, метод ортогональной прогонки Годунова, собственные колебания, упругая среда Пастернака

NATURAL VIBRATIONS OF CYLINDRICAL SHELL PARTIALLY RESTING ON ELASTIC FOUNDATION

S.A. Bochkarev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

The paper presents the results of an investigation of the natural vibrations of circular cylindrical shells resting on an elastic foundation, which is described by the two-parameter Pasternak model. The elastic medium is inhomogeneous along the shell length, and the inhomogeneity is an alternation of areas with the presence or absence of a medium. The behavior of the shell is considered in the framework of the classical shell theory, which is based on the Kirchhoff–Lyav hypotheses. The corresponding geometrical and physical relations together with the equations of motion are reduced to the system of eight ordinary differential equations for new unknowns. The problem is solved by the Godunov orthogonal sweep method, and the differential equations are integrated using the Runge–Kutta method with fourth-order accuracy. The eigenfrequencies are calculated in the stepwise iterative procedure, followed by further refinement by a bisection method. A comparison of the obtained results with the known numerical-analytical solutions confirmed their validity. The numerical calculations made for cylindrical shells under various combinations of boundary conditions revealed the dependence of minimum vibration frequencies on the characteristics of elastic medium exhibiting different types of inhomogeneity. It is shown that a discontinuity in the smoothness of the curves is caused both by a change in the mode with a minimum frequency of oscillations and by the ratio of the size of the elastic foundation to the total length of the shell and its rigidity, as well as by the combination of boundary conditions specified at the ends of the thin-walled structure.

Key words: classical shell theory, cylindrical shell, Godunov's orthogonal sweep method, natural vibrations, elastic Pasternak's medium

1. Введение

При изучении балок, пластин и оболочек вращения в статическом или динамическом состоянии, покоящихся на упругом основании, широкое распространение получили приближённые модели упругого основания (модели Винклера и Пастернака, модель упругого полупространства и другие [1–3]). Реакция основания описывается при этом дифференциальными операторами, действующими на прогибы упругих тел. Соответствующая библиография, охватывающая различные объекты исследования, изготовленные из разнородных материалов, находящиеся под действием статических или динамических нагрузок и рассмотренные с применением как аналитических, так и численных методов, является весьма обширной. В качестве примера приведём лишь публикации [4–21], в которых осуществлён анализ влияния упругого основания на линейные или нелинейные колебания круговых цилиндрических оболочек.

В работе [4] исследовались собственные частоты свободно опёртых цилиндрических оболочек. Показано, что каждый из коэффициентов постели в моделях Винклера или Пастернака по-разному сказывается на частотах, отвечающих радиальным, продольным и крутильным модам. Трёхмерный случай свободных колебаний погружённых в двухпараметрическую упругую среду толстостенных цилиндрических оболочек с различными граничными условиями при разных комбинациях коэффициентов постели представлен в [5]. Колебания в упругой среде (модель Пастернака) неоднородной по толщине

оболочки, свойства материала которой зависят от температуры, изучены в [6]. В [7] исследовано влияние инерционности упругого основания (модель Пастернака) на собственные колебания трёхслойных оболочек. Результаты, полученные в рамках разработанного в [8] унифицированного метода, предназначенного для анализа собственных колебаний толстостенных оболочек, основанного на трёхмерной теории упругости, предлагается использовать в качестве эталонных для покоящихся на упругом основании оболочек с произвольными граничными условиями. В [9] продемонстрировано, что наличие упругой среды (модель Винклера) существенно увеличивает частоты радиальных колебаний трёхслойных оболочек с толстым заполнителем. Собственные частоты и формы колебаний изотропных и ортотропных оболочек, имеющих переменную в окружном направлении толщину, рассматривались в [10]. Из приведённых в работе данных следует, что с ростом отношения максимальной толщины к минимальной влияние упругого основания возрастает. Нелинейные колебания оболочек, расположенных на нелинейном основании, изучались в [11]. Показано, что учёт нелинейных коэффициентов упругого основания вызывает дальнейший рост частот колебаний. В работе [12] обнаружено, что с ростом перепада температуры на поверхностях функционально-градиентной (ФГ) оболочки со свойствами, зависящими от температуры, погруженной в упругое основание винклеровского типа, имеет место уменьшение частот колебаний. Собственные и крутильные колебания ФГ оболочки, лежащей на двухпараметрическом упругом основании, проанализированы в [13, 14]. В статьях [15–17] проведены аналогичные исследования. В первой из них приняты во внимание пьезоэлектрические свойства материала оболочки, а во второй — геометрия (конструкции типа «сэндвич»). Изучению нелинейных колебаний ФГ оболочек, расположенных на линейном или нелинейном упругих основаниях, посвящены публикации [18–21]. В частности, в [18] продемонстрировано, что с возрастанием жёсткости упругой среды влияние геометрической нелинейности, неоднородности материала, количества слоёв намотки и величины углов армирования на частоты колебаний снижается. В [19] выявлено, что нелинейный коэффициент постели способствует смене жёсткого режима возбуждения на мягкий и наоборот.

Однако в контексте настоящей работы наибольший интерес представляют статьи [22–27], где объекты исследования — оболочки, частично покоящиеся на упругом основании. Если в работах [22–26] упругое основание неоднородно в окружном направлении с параллельными краями вдоль меридионального направления, то в [27] оно имеет наклонный край и, следовательно, ограничено по длине. В [24, 25] подверглись обсуждению варианты упругого основания, которое неоднородно как в окружном, так меридиональном направлениях. Здесь отмечается, что неоднородность упругого основания по длине оболочки может быть обусловлена изменениями жёсткости самого основания или его полным отсутствием на некоторых участках. В последнем случае такие участки остаются «подвешенными» в воздухе. В качестве обоснования важности владения информацией о динамических характеристиках тонкостенных конструкций, расположенных на неоднородном упругом основании, можно привести вывод из работы [28], согласно которому локализованное увеличение жёсткости, например в центральной части пластины, является эффективным средством повышения границ аэроупругой и гидроупругой устойчивости.

Таким образом, влияние однородного в окружном направлении и неоднородного в меридиональном направлении упругого основания на собственные частоты колебаний оболочек вращения остается неизученным. В выполнении такого исследования заключается цель настоящей работы.

2. Постановка задачи

Рассматривается упругая цилиндрическая оболочка (Рис. 1) длиной L , радиусом R и толщиной h ,

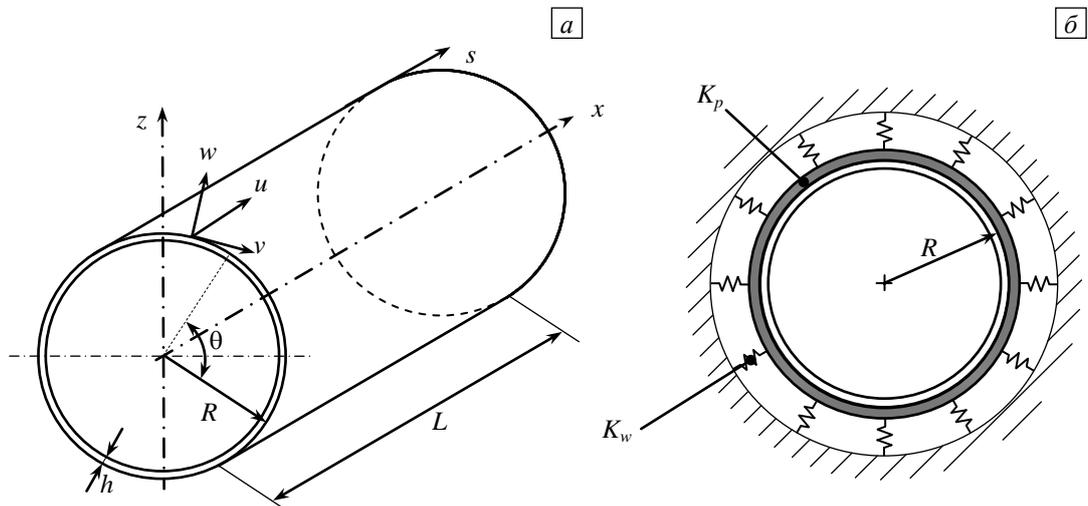


Рис. 1. Расчётная схема цилиндрической оболочки, лежащей на упругом основании

полностью погружённая в двухпараметрическое упругое основание с коэффициентами постели K_w и K_p , отвечающими, соответственно, за растяжение–сжатие (согласно модели Винклера) и сдвиг (согласно модели Пастернака). В меридиональном направлении упругое основание является неоднородным, состоящим из участков, на которых оно или есть, или отсутствует. Чередование участков имеет три различных комбинации (Рис. 2). В первом случае (Рис. 2а) оболочка разбивается на два участка, из которых только один (l_1) заключён в упругое основание. Длина основания изменяется от нуля до L . Безразмерный коэффициент длины ξ , характеризующий область контакта основания и поверхности оболочки, определяется в этом случае как $\xi = l_1/L$. Во втором варианте (Рис. 2б) оболочка разбивается на три участка, из которых два концевых опираются на упругое основание, и размеры участков изменяются от нуля до $L/2$, при этом $\xi = [l_1 + l_3]/L$. Наконец, в третьем варианте (Рис. 2в) оболочка также разбивается на три участка, из которых только центральный погружён в упругое основание, а размер участка равномерно увеличивается от середины оболочки к её торцам, $\xi = l_2/L$. Цель работы заключается в исследовании влияния неоднородного упругого основания на собственные частоты колебаний оболочки при различных вариантах граничных условий, задаваемых на её торцах.

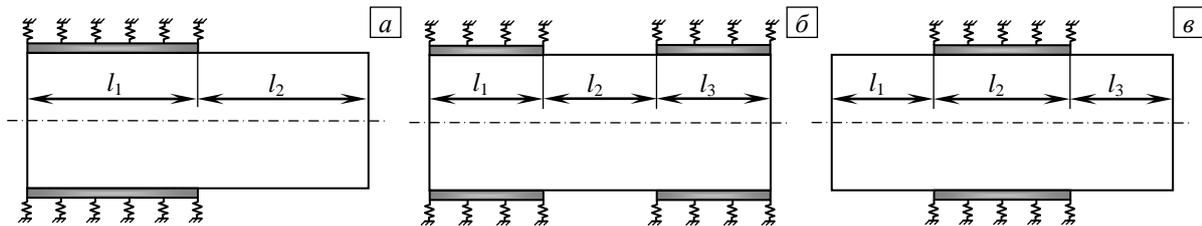


Рис. 2. Неоднородное по длине оболочки упругое основание: а – вариант I; б – вариант II; в – вариант III

3. Основные соотношения и метод решения

Для классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, компоненты вектора деформации E_{ij} в криволинейных координатах s , θ , z могут быть записаны в виде [29]:

$$E_{11} = \varepsilon_{11} + z\kappa_{11}, \quad E_{22} = \varepsilon_{22} + z\kappa_{22}, \quad E_{12} = \varepsilon_{12} + 2z\kappa_{12},$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial s}, & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}, & \kappa_{11} &= \frac{\partial \theta_1}{\partial s}, \\ \kappa_{22} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta}, & \kappa_{12} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta} \right), & \theta_1 &= -\frac{\partial w}{\partial s}, & \theta_2 &= \frac{1}{R} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь: u , v , w — меридиональная, окружная и нормальная составляющие вектора перемещений оболочки; θ_i — углы поворота недеформируемой нормали.

Физические соотношения, устанавливающие связь между вектором усилий и моментов $\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, S, M_{11}, M_{22}, H\}^T$ и вектором обобщённых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}\}^T$ в матричном виде записываются как

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

где коэффициенты, входящие в матрицу жёсткостей \mathbf{D} , определяются по формулам:

$$\begin{aligned} (\bar{a}_{ij}, \bar{b}_{ij}, \bar{c}_{ij}) &= \int_h (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} dz \quad (i, j = \overline{1, 3}), \\ \bar{Q}_{11} = \bar{Q}_{22} &= E/[1 - \nu^2], \quad \bar{Q}_{12} = \bar{Q}_{21} = \nu \bar{Q}_{11}, \quad \bar{Q}_{33} = E/2/[1 + \nu]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного материала оболочки.

Уравнения движения оболочки с учётом реакции упругой среды имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \left(Q_{22} + \frac{\partial H}{\partial s} \right) - \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial Q_{11}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{22}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} T_{22} - \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K_w w + K_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial \theta} - Q_{11} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta} - Q_{22} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где Q_{ii} — поперечные силы, $\rho_0 = \int_h \rho dz$, ρ — плотность материала.

С учётом разложения в ряд Фурье по окружной координате θ геометрические (1) и физические (2) соотношения, а также уравнения движения (4) могут быть сведены к системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно новых неизвестных [29]:

$$\begin{aligned} y_1 = T_{11}, \quad y_2 = S + 2H/R, \quad y_3 = M_{11}, \quad y_4 = Q_{11} + j_R H, \\ y_5 = u, \quad y_6 = v, \quad y_7 = w, \quad y_8 = \theta_1. \end{aligned}$$

Здесь $j_R = j/R$, j — номер гармоники при разложении в ряд Фурье. Учитывая это и принимая во внимание, что $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y} \exp(i\omega t)$, запишем систему следующим образом:

$$\partial \mathbf{y} / \partial s = \mathbf{f}(j, \omega, \mathbf{y}), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 = j_R (2H/R - y_2) - \omega^2 \rho_0 y_5, \quad f_2 = j_R T_{22} - Q_{22}/R - \omega^2 \rho_0 y_6, \\ f_3 = y_4 - 2j_R H, \quad f_4 = T_{22}/R - j_R Q_{22} - \omega^2 \rho_0 y_7 + K_w y_7 + K_p (\kappa_{11} + j_R^2 y_7), \\ f_5 = \varepsilon_{11}, \quad f_6 = \varepsilon_{12} + j_R y_5, \quad f_7 = -y_8, \quad f_8 = \kappa_{11}, \end{aligned} \quad (6)$$

ω — характеристический показатель, i — мнимая единица ($i^2 = -1$), t — время. Входящие в выражения (6) величины вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} = j_R y_6 + y_7/R, \quad \kappa_{22} = j_R \theta_2, \quad \theta_2 = y_6/R - j_R y_7, \\ H = \bar{b}_{33} \varepsilon_{12} + 2\bar{c}_{33} \kappa_{12}, \quad Q_{22} = -j_R M_{22}, \quad \bar{\omega} = \bar{a}_{11} \bar{c}_{11} - \bar{b}_{11}^2, \\ \kappa_{11} = \left[\bar{a}_{11} (y_3 - \bar{b}_{12} \varepsilon_{22} - \bar{c}_{12} \kappa_{22}) - \bar{b}_{11} (y_1 - \bar{a}_{12} \varepsilon_{22} - \bar{b}_{12} \kappa_{22}) \right] / \bar{\omega}, \\ \varepsilon_{11} = (y_1 - \bar{a}_{12} \varepsilon_{22} - \bar{b}_{11} \kappa_{11} - \bar{b}_{12} \kappa_{22}) / \bar{a}_{11}, \quad \kappa_{12} = (\varepsilon_{12} + j_R y_5) / R - j_R y_8, \\ T_{22} = \bar{a}_{12} \varepsilon_{11} + \bar{a}_{22} \varepsilon_{22} + \bar{b}_{12} \kappa_{11} + \bar{b}_{22} \kappa_{22}, \quad M_{22} = \bar{b}_{12} \varepsilon_{11} + \bar{b}_{22} \varepsilon_{22} + \bar{c}_{12} \kappa_{11} + \bar{c}_{22} \kappa_{22}, \\ \varepsilon_{12} = \left[y_2 - 2(\bar{b}_{33} + 2\bar{c}_{33}/R) j_R (y_5/R + y_8) \right] / \left[\bar{a}_{33} + 4(\bar{b}_{33} + \bar{c}_{33}/R)/R \right]. \end{aligned}$$

На краях оболочки зададим однородные граничные условия:

$$y_i \Big|_{s=0} \delta_i + y_{i+4} \Big|_{s=0} (1 - \delta_i) = 0 \quad (i = \overline{1,4}), \quad (7)$$

$$y_i \Big|_{s=L} \delta_{i+4} + y_{i+4} \Big|_{s=L} (1 - \delta_{i+4}) = 0 \quad (i = \overline{1,4}), \quad (8)$$

где $\delta_i = 0$ или $\delta_i = 1$, если, соответственно, известны кинематические или статические граничные условия.

Систему (5) с граничными условиями (7), (8) решим методом ортогональной прогонки Годунова [30] с численным интегрированием дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты четвёртого порядка точности. Для этих целей общее решение системы (5) представим в виде:

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^4 C_j \mathbf{y}_j,$$

где C_j — некоторые константы и \mathbf{y}_j — совокупность линейно независимых решений системы (5), удовлетворяющих граничным условиям (7). В результате интегрирования по заданному интервалу

и удовлетворения граничных условий (8) для определения постоянных C_j получаем следующую алгебраическую систему:

$$\sum_{j=1}^4 C_j f_{ij} = 0 \quad (i = \overline{1,4}). \quad (9)$$

Решение задачи сводится к вычислению таких значений ω , при которых существует нетривиальное решение системы (9). Необходимым условием существования такого решения является равенство нулю определителя матрицы: $|f_{ij}(\omega)| = 0$. Воспользуемся комбинацией шагового метода (посредством его вычислим те значения ω , при которых происходит смена знака определителя $|f_{ij}(\omega)|$) и метода, уточняющего ω в полученном диапазоне. В качестве последнего возьмём метод деления отрезка пополам. При необходимости по найденным частотам могут быть установлены собственные формы колебаний путём выполнения обратной прогонки при задании одного из перемещений [29].

4. Результаты численного решения

В численных примерах рассматривается цилиндрическая оболочка с параметрами $L/R = 6$, $h/R = 0,01$, $\nu = 0,3$, которая или свободно опёрта (условное обозначение типа граничных условий — SS) $v = w = T_{11} = M_{11} = 0$, или жёстко закреплена на обоих торцах (CC) $u = v = w = \theta_1 = 0$, или имеет консольное закрепление (CF) $T_{11} = 0$, $S + 2H/R = 0$, $M_{11} = 0$, $Q_{11} + j_R H = 0$. В результате вычислительных экспериментов установлено, что для обсуждаемых конфигураций упругого основания для нахождения пяти низших собственных частот с приемлемой точностью достаточно 120 точек интегрирования при условии одновременного ортонормирования в этих точках. Для отображения полученных результатов введём безразмерные параметры: частоту Ω и коэффициенты постели k_w и k_p [10]:

$$\Omega = (\omega R \zeta) \times 10, \quad k_w = K_w (R^4/D), \quad k_p = K_p (R^2/D),$$

где $\zeta = \sqrt{[\rho(1-\nu^2)]/E}$, $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$.

Для верификации разработанного алгоритма было осуществлено сравнение результатов, установленных на его основе, с представленными в работе [10], где проведён численно-аналитический анализ колебаний цилиндрических оболочек с аналогичными параметрами при условии полного погружения в упругое основание, которое однородно как в окружном, так и меридиональном направлениях. Данные для сопоставления содержит Таблица. Здесь приведены значения пяти низших безразмерных собственных частот Ω , полученных как без учёта упругого основания, так и при различных комбинациях безразмерных коэффициентов постели k_w, k_p . Из данных таблицы следует, что в рамках разработанного алгоритма авторский расчёт достаточно хорошо согласуется с известным из литературы.

На рисунке 3 показаны зависимости минимальной частоты колебаний Ω от безразмерного коэффициента постели k для полностью погружённых в упругое основание ($\xi = 1$) оболочек с разными граничными условиями. Приведённые графики, полученные для комбинаций значений безразмерных коэффициентов постели (k_w, k_p) и при условии $k_w = k_p$, когда присутствуют оба коэффициента,

Таблица. К сравнению безразмерных собственных частот колебаний Ω свободно опёртой цилиндрической оболочки, ($\xi = 1$), при различных комбинациях значений коэффициентов постели (k_w, k_p)

n	Комбинации коэффициентов постели (k_w, k_p)							
	(0, 0)		(50, 0)		(0, 50)		(50, 50)	
	Значения частоты Ω							
	[10]	Расчёт	[10]	Расчёт	[10]	Расчёт	[10]	Расчёт
1	0,34928	0,34935	0,39943	0,39924	0,66523	0,66471	0,68946	0,68894
2	0,45397	0,45451	0,49523	0,49572	0,68392	0,68439	0,71070	0,71116
3	0,54928	0,54919	0,57838	0,57829	0,91776	0,91865	0,93886	0,93972
4	0,69296	0,69405	0,72130	0,72232	1,10352	1,10407	1,12152	1,12160
5	0,74253	0,74265	0,76913	0,76848	1,18021	1,17920	1,19580	1,19482

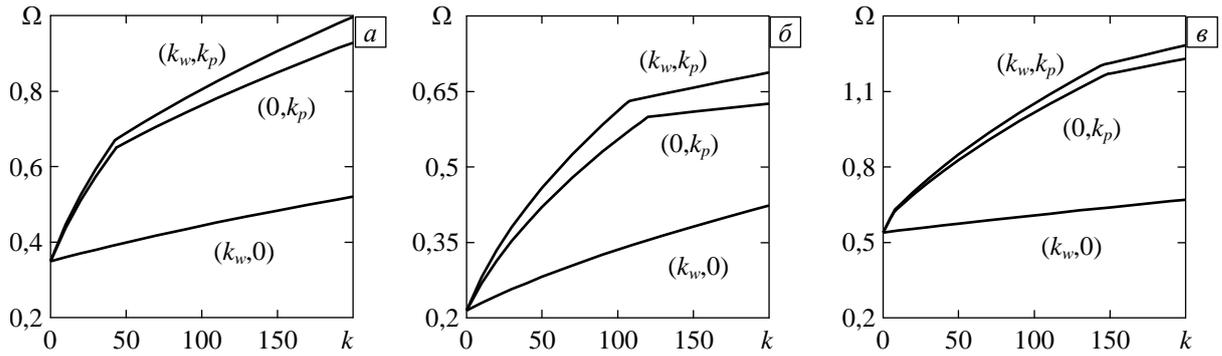


Рис. 3. Безразмерная минимальная частота колебаний Ω при $\xi=1$ как функция безразмерного коэффициента упругого основания k для оболочек с разными граничными условиями: a – SS; b – CF; v – CC

позволяют оценить влияние на собственные колебания оболочки, оказываемое каждым из упругих оснований, изображённых на рисунке 2. Характерные изломы на кривых, соответствующих вариантам с $k_p \neq 0$, информируют об изменении гармоник с номером j в окружном направлении с минимальной частотой. Например, для свободно опёртых оболочек (Рис. 3а) при $0 < k_p \leq 43,5$ минимальная частота имеет место для $j = 3$, тогда как при $k_p \geq 43,6$ — для $j = 2$. Для жёстко закреплённых оболочек (Рис. 3в) наблюдается более сложная картина: минимальная частота при $0 < k_p \leq 7,7$ соответствует $j = 4$, при $7,8 \leq k_p \leq 147,8$ — $j = 3$, при $k_p \geq 147,9$ — $j = 2$. Следовательно, с повышением жёсткости упругого основания минимальная частота колебаний смещается в область низших гармоник, а поведение оболочки становится подобным поведению балки. Из представленных данных можно также сделать вывод о том, что для более жёстких систем влияние упругого основания является менее выраженным. В дальнейших расчётах использована только модель Пастернака, при которой $k = k_w = k_p$.

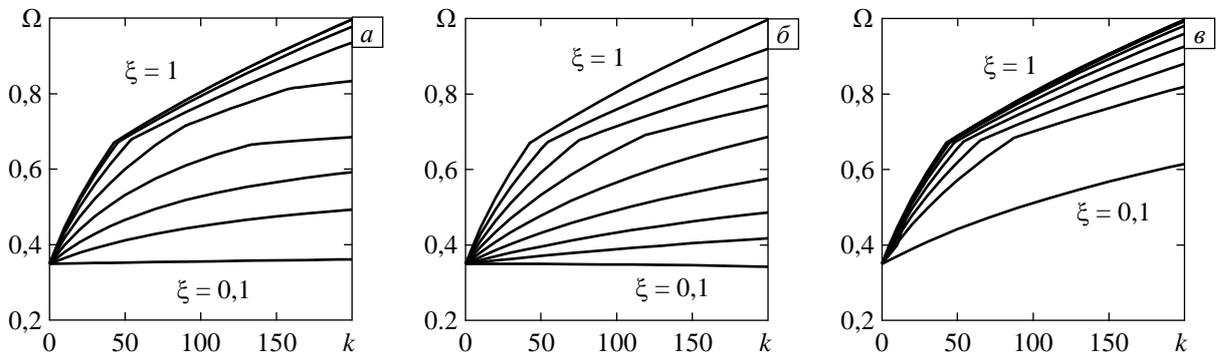


Рис. 4. Изменение минимальной частоты колебаний Ω в зависимости от безразмерного коэффициента упругого основания k для свободно опёртых оболочек при различных значениях безразмерной длины ξ разных вариантов упругого основания: a – вариант I; b – вариант II; v – вариант III

Рисунок 4 содержит графики связи безразмерной минимальной частоты колебаний Ω с безразмерным коэффициентом постели k для свободно опёртых оболочек, лежащих на неоднородном в меридиональном направлении упругом основании. Здесь и далее, если не оговорено иное, кривые построены при следующих значениях безразмерной длины ξ : 0,1; 0,3; 0,4; 0,5, ..., 1,0. Из рисунка видно, что характер минимальной частоты колебаний по мере приближения к положению, соответствующему однородному случаю ($\xi = 1$), зависит от размера, занимаемого упругим основанием, и заметно отличается для каждого из рассмотренных вариантов, его неоднородности. Для каждого из них проявляются свои особенности. Так, для варианта I (Рис. 4а) при $\xi = 0,6$ смена окружной формы с минимальной частотой колебаний происходит дважды, причём при второй смене формы наблюдается рост окружной гармоник с $j = 2$ до $j = 4$. Для варианта II (Рис. 4б) при $\xi = 0,1$ имеет место небольшое снижение минимальной частоты. Для варианта III (Рис. 4в) при $\xi > 0,8$ изменение частоты становится незначительным.

На рисунке 5 изображены безразмерные частоты колебаний Ω для трёх гармоник (номер гармоники в меридиональном направлении $m=1$) как функции безразмерной длины упругого основания ξ

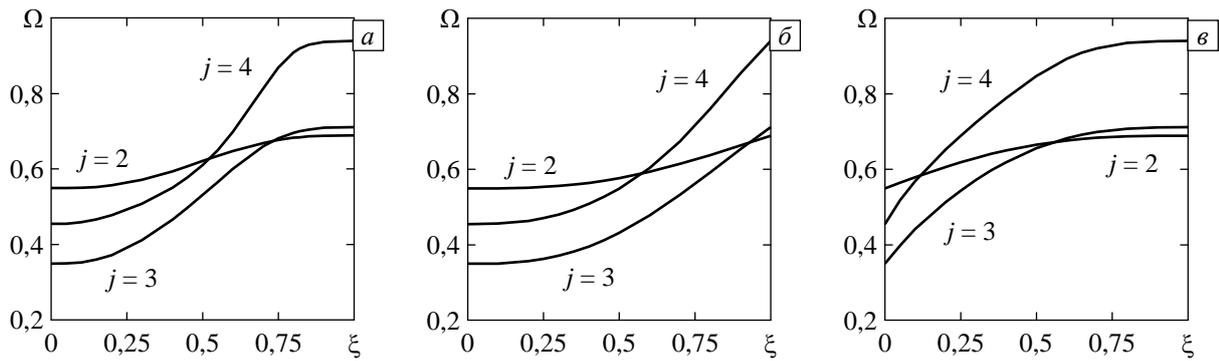


Рис. 5. Зависимости трёх безразмерных частот колебаний Ω от безразмерной длины упругого основания ξ для свободно опёртых оболочек при $k = 50$, $m = 1$ с разными вариантами неоднородности упругого основания: *a* – вариант I; *b* – вариант II; *e* – вариант III.

для оболочки, свободно опёртой на двух торцах при $k = k_w = k_p = 50$. На рисунке хорошо видно различие в эволюции частот, соотносящейся с каждым из вариантов неоднородности. При этом различная чувствительность гармоник к размеру упругого основания обуславливает смену формы с минимальной частотой колебаний, что прослеживается на рисунке 4. Однако, несмотря на сильную зависимость частот колебаний от жёсткости упругого основания, влияние последнего на собственные формы колебаний оболочки является крайне малым.

Аналогичные вычисления были проведены и для оболочек с другими комбинациями граничных условий: на рисунках 6, 7 представлены результаты для оболочек, имеющих консольное закрепление, а на рисунках 8, 9 — для жёстко закреплённых оболочек. Данные демонстрируют качественно похожие картины поведения собственных частот в зависимости от протяжённости упругого основания. Небольшие особенности имеют место при консольном закреплении. Так, обращает на себя внимание вариант неоднородности II (Рис. 6*b*), который при других граничных условиях близок по характеру поведения к варианту III (см. Рис. 4*b* и 8*b*), в частности в том, что наиболее значительное изменение в частоте

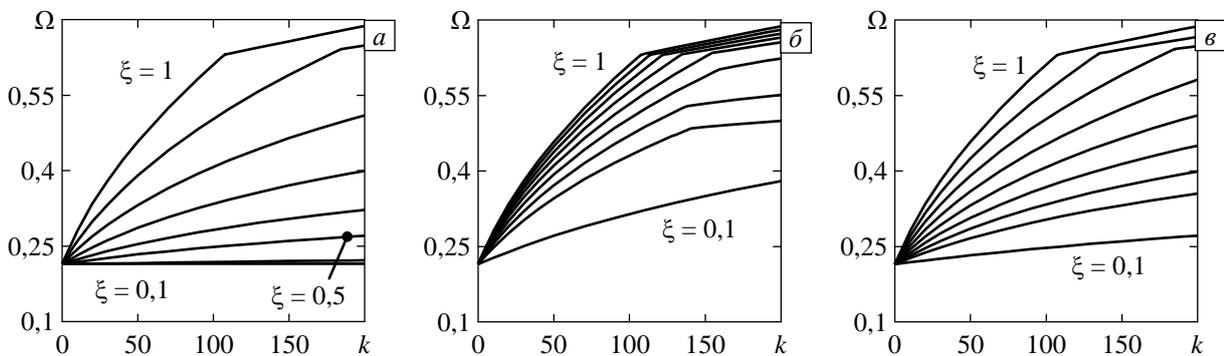


Рис. 6. Изменение минимальной частоты колебаний Ω в зависимости от коэффициента упругого основания k для консольно закреплённых оболочек при различных значениях длины ξ и разных вариантах неоднородности упругого основания: *a* – вариант I; *b* – вариант II; *e* – вариант III

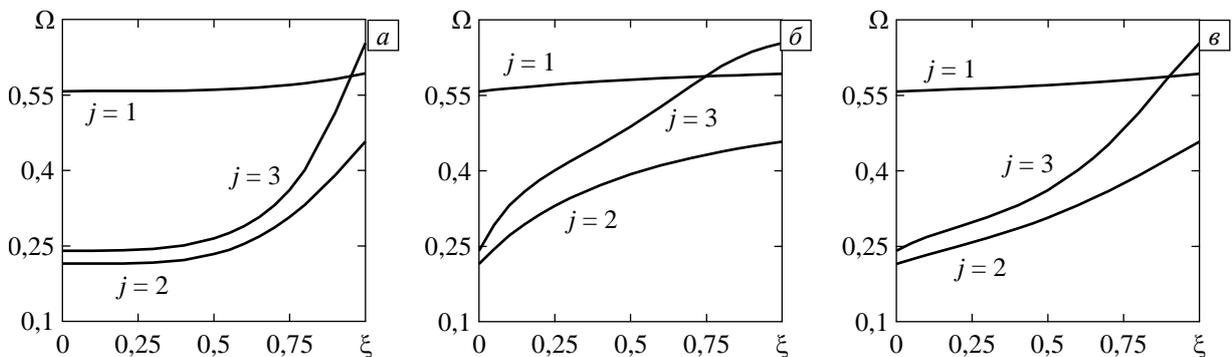


Рис. 7. Зависимости трёх безразмерных частот колебаний Ω от безразмерной длины упругого основания ξ для консольно закреплённых оболочек при $k = 50$, $m = 1$ с разными вариантами неоднородности упругого основания: *a* – вариант I; *b* – вариант II; *e* – вариант III

происходит только тогда, когда длина упругого основания достигает некоторого порогового значения, вследствие чего формируется характерное сгущение кривых. Для других граничных условий жёсткость системы, обеспечиваемая закреплением в радиальном направлении, начинает существенно возрастать с ростом длины упругого основания. В случае консольного закрепления и, следовательно, отсутствия ограничений на правом краю, оболочка становится более жёсткой вследствие того, что упругое основание со стороны этого края, увеличиваясь в размере, начинает компенсировать имеющиеся здесь прогибы. Выше отмечалось, что консольное закрепление обеспечивает оболочке меньшую жёсткость, на основании чего влияние упругого основания проявляется в большей степени. При невысоких значениях коэффициента постели эта зависимость проявляется еще ярче. При этом обеспечивается достаточно равномерный рост частот по всем гармоникам, что препятствует появлению новой формы с минимальной частотой колебаний. Также можно отметить, что для большинства из рассмотренных конфигураций наиболее заметные изменения в частотах происходят тогда, когда протяжённость упругого основания превышает половину длины оболочки.

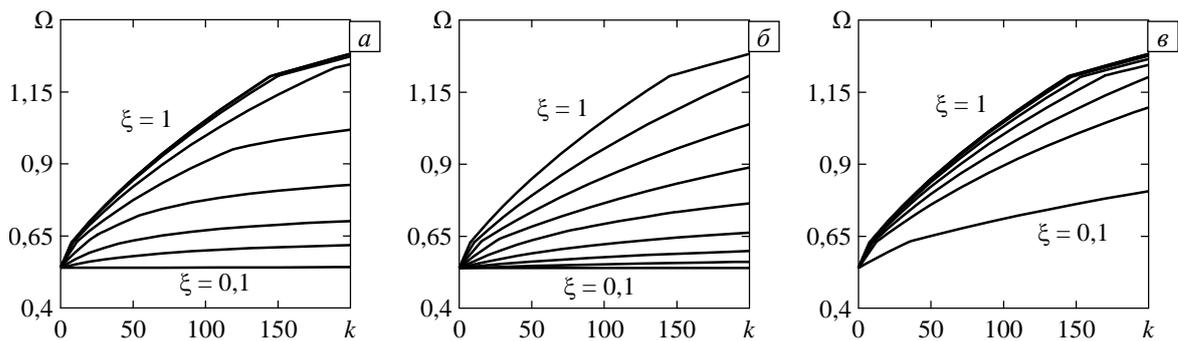


Рис. 8. Изменение минимальной частоты колебаний Ω в зависимости от коэффициента упругого основания k для жёстко закреплённых оболочек при различных значениях безразмерной длины ξ с разными вариантами неоднородности упругого основания: a – вариант I; $б$ – вариант II; $в$ – вариант III

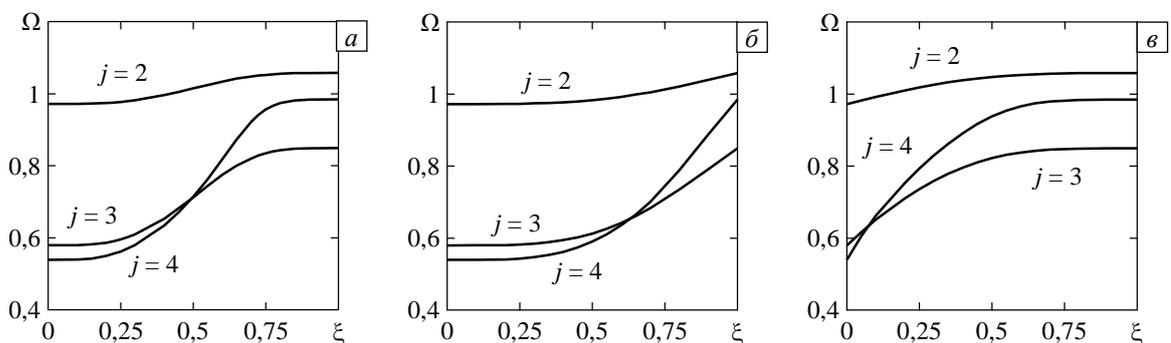


Рис. 9. Зависимости трёх безразмерных частот колебаний Ω от безразмерной длины упругого основания ξ для жёстко закреплённых оболочек при $k=50$, $m=1$ с разными вариантами неоднородности упругого основания: a – вариант I; $б$ – вариант II; $в$ – вариант III

5. Заключение

Представлены результаты численного анализа собственных частот колебаний круговых цилиндрических оболочек, полностью погруженных в двухпараметрическую упругую среду, однородную в окружном направлении и неоднородную по длине конструкции. Рассмотрено несколько вариантов неоднородности, представляющей собой комбинацию различных участков, содержащих и не содержащих упругое основание. При разных вариантах неоднородности оценено влияние коэффициентов постели на минимальные частоты колебаний оболочек, имеющих различные граничные условия. Показано, что размер упругого основания по отношению к полной длине оболочки оказывает значительное влияние на динамические характеристики системы и должен приниматься во внимание, например, при изучении вынужденных или параметрических колебаний.

Литература

1. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.: Госстройиздат, 1954. – 56 с.
2. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматгиз, 1960. – 491 с.

3. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А. Расчет конструкций на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1973. – 627 с.
4. Paliwal D.N., Pandey R.K., Nath T. Free vibrations of circular cylindrical shell on Winkler and Pasternak foundations // Int. J. Pres. Ves. Pip. – 1996. – Vol. 69, no. 1. – P. 79-89. DOI
5. Malekzadeh P., Farid M., Zahedinejad P., Karami G. Three-dimensional free vibration analysis of thick cylindrical shells resting on two-parameter elastic supports // J. Sound Vib. – 2008. – Vol. 313, no. 3-5. – P. 655-675. DOI
6. Gheisari M., Molatefi H., Ahmadi S.S. Third order formulation for vibrating non-homogeneous cylindrical shells in elastic medium // J. Solid Mech. – 2011. – Vol. 3, no. 4. – P. 346-352.
7. Леоненко Д.В. Свободные колебания трехслойных цилиндрических оболочек в упругой среде Пастернака // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 4(25). – С. 57-59.
8. Ye T., Jin G., Shi S., Ma X. Three-dimensional free vibration analysis of thick cylindrical shells with general end conditions and resting on elastic foundation // Int. J. Mech. Sci. – 2014. – Vol. 84. – P. 120-137. DOI
9. Кузнецова Е.Л., Леоненко Д.В., Старовойтов Э.И. Собственные колебания трехслойных круговых цилиндрических оболочек в упругой среде // МТТ. – 2015. – № 3. – С. 152-160. (English version DOI).
10. Khalifa M.A. Natural frequencies and mode shapes of variable thickness elastic cylindrical shells resting on a Pasternak foundation // J. Vib. Control. – 2016. – Vol. 22, no. 1. – P. 37-50. DOI
11. Sofiyev A.H., Karaca Z., Zerim Z. Non-linear vibration of composite orthotropic cylindrical shells on the non-linear elastic foundations within the shear deformation theory // Compos. Struct. – 2017. – Vol. 159. – P. 53-62. DOI
12. Sheng G.G., Wang X. Thermal vibration, buckling and dynamic stability of functionally graded cylindrical shells embedded in an elastic medium // J. Reinf. Plast. Comp. – 2008. – Vol. 27, no. 2. – P. 117-134. DOI
13. Shah A.G., Mahmood T., Naeem M.N., Iqbal Z., Arshad S.H. Vibrations of functionally graded cylindrical shells based on elastic foundations // Acta Mech. – 2010. – Vol. 211, no. 3-4. – P. 293-307. DOI
14. Najafov A.M., Sofiyev A.H., Kuruoglu N. Torsional vibration and stability of functionally graded orthotropic cylindrical shells on elastic foundations // Meccanica. – 2013. – Vol. 48, no. 4. – P. 829-840. DOI
15. Mohammadimehr M., Moradi M., Loghman A. Influence of the elastic foundation on the free vibration and buckling of thin-walled piezoelectric-based FGM cylindrical shells under combined loading // J. Solid Mech. – 2014. – Vol. 6, no. 4. – P. 347-365.
16. Kamarian S., Sadighi M., Shakeri M., Yas M.H. Free vibration response of sandwich cylindrical shells with functionally graded material face sheets resting on Pasternak foundation // J. Sandwich Struct. Mater. – 2014. – Vol. 16, no. 5. – P. 511-533. DOI
17. Bahadori R., Najafzadeh M.M. Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded axisymmetric cylindrical shell on Winkler-Pasternak elastic foundation by first-order shear deformation theory and using Navier-differential quadrature solution methods // Appl. Math. Model. – 2015. – Vol. 39, no. 16. – P. 4877-4894. DOI
18. Sofiyev A.H., Keskin S.N., Sofiyev Ali H. Effects of elastic foundation on the vibration of laminated non-homogeneous orthotropic circular cylindrical shells // Shock Vib. – 2004. – Vol. 11, no. 2. – P. 89-101. DOI
19. Sheng G.G., Wang X., Fu G., Hu H. The nonlinear vibrations of functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic foundation // Nonlinear Dynam. – 2014. – Vol. 78, no. 2. – P. 1421-1434. DOI
20. Sofiyev A.H. Large amplitude vibration of FGM orthotropic cylindrical shells interacting with the nonlinear Winkler elastic foundation // Compos. Part B-Eng. – 2016. – Vol. 98. – P. 141-150. DOI
21. Sofiyev A.H., Hui D., Hacıyev V.C., Erdem H., Yuan G.Q., Schnack E., Guldal V. The nonlinear vibration of orthotropic functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic foundation within first order shear deformation theory // Compos. Part B-Eng. – 2017. – Vol. 116. – P. 170-185. DOI
22. Amabili M., Dalpiaz G. Free vibrations of cylindrical shells with non-axisymmetric mass distribution on elastic bed // Meccanica. – 1997. – Vol. 32, no. 1. – P. 71-84. DOI
23. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with non-uniform constraints, elastic bed and added mass; Part I: empty and fluid-filled shells // J. Fluids Struct. – 2000. – Vol. 14, no. 5. – P. 669-690. DOI
24. Gunawan H., Mikami T., Kanie S., Sato M. Finite element analysis of cylindrical shells partially buried in elastic foundations // Comput. Struct. – 2005. – Vol. 83, no. 21-22. – P. 1730-1741. DOI
25. Gunawan H., Mikami T., Kanie S., Sato M. Free vibration characteristics of cylindrical shells partially buried in elastic foundations // J. Sound Vib. – 2006. – Vol. 290, no. 3-5. – P. 785-793. DOI
26. Bakhtiari-Nejad F., Mousavi Bideleh S.M. Nonlinear free vibration analysis of prestressed circular cylindrical shells on the Winkler/Pasternak foundation // Thin Wall. Struct. – 2012. – Vol. 53. – P. 26-39. DOI
27. Kim Y.-W. Free vibration analysis of FGM cylindrical shell partially resting on Pasternak elastic foundation with an oblique edge // Compos. Part B-Eng. – 2015. – Vol. 70. – P. 263-276. DOI
28. Tan B.H., Lucey A.D., Howell R.M. Aero-/hydro-elastic stability of flexible panels: Prediction and control using localised spring support // J. Sound Vib. – 2013. – Vol. 332, no. 26. – P. 7033-7054. DOI
29. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.
30. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – Т. 16, № 3. – С. 171-174.

References

1. Pasternak P.L. *Osnovy novogo metoda rascheta fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshchi dvukh koeffitsientov posteli* [On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants]. Moscow: Gosstroyizdat, 1954. 56 p.
2. Vlasov V.Z., Leontev N.N. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, plates and shells on elastic foundation]. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 491 p.
3. Gorbunov-Posadov M.I., Malikova T.A. *Raschet konstruksij na uprugom osnovanii* [Calculation of structures on elastic foundation]. Moscow: Stroyizdat, 1973. 627 p.

4. Paliwal D.N., Pandey R.K., Nath T. Free vibrations of circular cylindrical shell on Winkler and Pasternak foundations. *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 1996, vol. 69, no. 1, pp. 79-89. DOI
5. Malekzadeh P., Farid M., Zahedinejad P., Karami G. Three-dimensional free vibration analysis of thick cylindrical shells resting on two-parameter elastic supports. *J. Sound Vib.*, 2008, vol. 313, no. 3-5, pp. 655-675. DOI
6. Gheisari M., Molatefi H., Ahmadi S.S. Third order formulation for vibrating non-homogeneous cylindrical shells in elastic medium. *J. Solid Mech.*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 346-352.
7. Leonenko D.V. Natural vibrations of the three-layered cylindrical shells in the elastic Pasternak's medium. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov – Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*, 2013, no. 4(25), pp. 57-59.
8. Ye T., Jin G., Shi S., Ma X. Three-dimensional free vibration analysis of thick cylindrical shells with general end conditions and resting on elastic foundations. *Int. J. Mech. Sci.*, 2014, vol. 84, pp. 120-137. DOI
9. Kuznetsova E.L., Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium. *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 3, pp. 359-366. DOI
10. Khalifa M.A. Natural frequencies and mode shapes of variable thickness elastic cylindrical shells resting on a Pasternak foundation. *J. Vib. Control.*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 37-50. DOI
11. Sofiyev A.H., Karaca Z., Zerir Z. Non-linear vibration of composite orthotropic cylindrical shells on the non-linear elastic foundations within the shear deformation theory. *Compos. Struct.*, 2017, vol. 159, pp. 53-62. DOI
12. Sheng G.G., Wang X. Thermal vibration, buckling and dynamic stability of functionally graded cylindrical shells embedded in an elastic medium. *J. Reinf. Plast. Comp.*, 2008, vol. 27, no. 2, pp. 117-134. DOI
13. Shah A.G., Mahmood T., Naeem M.N., Iqbal Z., Arshad S.H. Vibrations of functionally graded cylindrical shells based on elastic foundations. *Acta Mech.*, 2010, vol. 211, no. 3-4, pp. 293-307. DOI
14. Najafov A.M., Sofiyev A.H., Kuruoglu N. Torsional vibration and stability of functionally graded orthotropic cylindrical shells on elastic foundations. *Meccanica*, 2013, vol. 48, no. 4, pp. 829-840. DOI
15. Mohammadimehr M., Moradi M., Loghman A. Influence of the elastic foundation on the free vibration and buckling of thin-walled piezoelectric-based FGM cylindrical shells under combined loading. *J. Solid Mech.*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 347-365.
16. Kamarian S., Sadighi N., Shakeri M., Yas M.H. Free vibration response of sandwich cylindrical shells with functionally graded material face sheets resting on Pasternak foundation. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2014, vol. 16, no. 5, pp. 511-533. DOI
17. Bahadori R., Najafzadeh M.M. Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded axisymmetric cylindrical shell on Winkler-Pasternak elastic foundation by first-order shear deformation theory and using Navier-differential quadrature solution methods. *Appl. Math. Model.*, 2015, vol. 39, no. 16, pp. 4877-4894. DOI
18. Sofiyev A.H., Keskin S.N., Sofiyev Ali H. Effects of elastic foundation on the vibration of laminated non-homogeneous orthotropic circular cylindrical shells. *Shock Vib.*, 2004, vol. 11, no. 2, pp. 89-101. DOI
19. Sheng G.G., Wang X., Fu G., Hu H. The nonlinear vibrations of functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic foundation. *Nonlinear Dynam.*, 2014, vol. 78, no. 2, pp. 1421-1434. DOI
20. Sofiyev A.H. Large amplitude vibration of FGM orthotropic cylindrical shells interacting with the nonlinear Winkler elastic foundation. *Compos. Part B-Eng.*, 2016, vol. 98, pp. 141-150. DOI
21. Sofiyev A.H., Hui D., Hacıyev V.C., Erdem H., Yuan G.Q., Schnack E., Guldal V. The nonlinear vibration of orthotropic functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic foundation within first order shear deformation theory. *Compos. Part B-Eng.*, 2017, vol. 116, pp. 170-185. DOI
22. Amabili M., Dalpiaz G. Free vibrations of cylindrical shells with non-axisymmetric mass distribution on elastic bed. *Meccanica*, 1997, vol. 32, no. 1, pp. 71-84. DOI
23. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with non-uniform constraints, elastic bed and added mass; Part I: empty and fluid-filled shells. *J. Fluids Struct.*, 2000, vol. 14, no. 5, pp. 669-690. DOI
24. Gunawan H., Mikami T., Kanie S., Sato M. Finite element analysis of cylindrical shells partially buried in elastic foundations. *Comput. Struct.*, 2005, vol. 83, no. 21-22, pp. 1730-1741. DOI
25. Gunawan H., Mikami T., Kanie S., Sato M. Free vibration characteristics of cylindrical shells partially buried in elastic foundations. *J. Sound Vib.*, 2006, vol. 290, no. 3-5, P. 785-793. DOI
26. Bakhtiari-Nejad F., Mousavi Bideleh S.M. Nonlinear free vibration analysis of prestressed circular cylindrical shells on the Winkler/Pasternak foundation. *Thin Wall. Struct.*, 2012, vol. 53, pp. 26-39. DOI
27. Kim Y.-W. Free vibration analysis of FGM cylindrical shell partially resting on Pasternak elastic foundation with an oblique edge. *Compos. Part B-Eng.*, 2015, vol. 70, pp. 263-276. DOI
28. Tan B.H., Lucey A.D., Howell R.M. Aero-/hydro-elastic stability of flexible panels: Prediction and control using localised spring support. *J. Sound Vib.*, 2013, vol. 332, no. 26, pp. 7033-7054. DOI
29. Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N. *Statika i dinamika tonkostennykh obolocheknykh konstruksij* [The statics and dynamics of thin-walled shell structures]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1975. 376 p.
30. Godunov S.K. O chislennom reshenii kraevykh zadach dlya sistem linejnykh obyknovennykh differentsialnykh uravnenij [Numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations]. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1961, vol. 16, no. 3, pp. 171-174.

Поступила в редакцию 29.10.2017; опубликована в электронном виде 30.12.2017