

DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.4.30

УДК 539.3

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ: СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ В СВЯЗАННОЙ И НЕСВЯЗАННОЙ ПОСТАНОВКАХ

М.Е. Кожевникова¹, Т.А. Ротанова¹, А.В. Валов^{1,2}¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация²Новосибирский государственный национальный исследовательский университет, Новосибирск, Российская Федерация

Проведено компьютерное моделирование плоской линейной задачи термоупругости в связанной и несвязанной постановках для неоднородной среды с отверстием. В случае несвязанной постановки сначала решалась независимая часть задачи термоупругости: уравнение нестационарной теплопроводности без учета члена, отвечающего за механическую мощность внутренних сил, при граничных условиях Дирихле. Находилась температурное поле, при котором из уравнений равновесия и соотношения Дюамеля–Неймана определялись статические термоупругие напряжения при граничных условиях в напряжениях. Дискретизация дифференциальных уравнений осуществлялась в соответствии с методом конечных элементов, базирующимся на построении векторно-матричной системы уравнений на основе слабой формы уравнений термомеханики при условии квазистатического деформирования. Метод конечных элементов реализован в коде PIONER, разработанном в ИГиЛ СО РАН. В качестве тестовой задачи рассматривалась задача охлаждения и деформирования полого цилиндра с заданными температурами и напряжениями на внутренней и внешней поверхностях. При решении задачи были использованы 8-узловые конечные элементы с неполной биквадратичной аппроксимацией геометрии и перемещений, позволяющие моделировать плоскую деформацию. Численные эксперименты показали, что для данного класса задач решения уравнений термоупругости в связанной и несвязанной постановках при определенных ограничениях, упрощающих задачу, а именно в отсутствие массовых сил, начальных напряжений, подвода тепла и конвекции на части поверхности, дают близкие по значениям температуры, напряжения, перемещения. Тем самым подтверждается сформировавшееся в научной среде мнение о том, что в линейной термоупругости член в уравнении теплопроводности, отвечающий за механическую мощность внутренних сил, не оказывает существенного влияния на результат решения термоупругой системы.

Ключевые слова: задача термоупругости, связанная и несвязанная постановки, метод конечных элементов

COMPUTER SIMULATION OF THE PLANE THERMOELASTICITY PROBLEMS: COMPARATIVE ANALYSIS OF COUPLED AND UNCOUPLED STATEMENTS

M.E. Kozhevnikova¹, T.A. Rotanova¹ and A.V. Valov^{1,2}¹Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation²Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

A computer simulation of a plane problem of linear thermoelasticity was carried out in coupled and uncoupled statements for an inhomogeneous medium with a hole. In the case of uncoupled statement at first we solve an independent part of the thermoelasticity problem, the nonstationary heat conduction equation without taking into account the term responsible for the mechanical power of internal forces with the Dirichlet boundary conditions, and determine the distribution of temperature. Then we proceed to the static problem of thermoelastic stresses based on the equilibrium equations and the Duhamel–Neumann law with the Neumann boundary condition and a given temperature distribution. For the discretization of differential equations, we use the finite element method which is based on the construction of a vector-matrix system of equations formed on the weak form of thermomechanical equations under the condition of quasistatic deformation. The finite element method is implemented in the specially designed home-made code PIONER. As a test problem, we considered a problem of cooling a hollow cylinder with prescribed temperatures and stresses on the inner and outer surfaces. The problem was solved using eight-node finite elements with a reduced biquadratic approximation of geometry and displacements within a plane strain model. Numerical experiments have shown that under certain restrictions that simplify the problem: the absence of mass forces, initial stresses, heat sources and convection on a part of the surface, for the given class of problems, the distribution of displacements, stresses, and temperature in coupled problems is close to that in uncoupled formulation. The obtained results are consistent with the fact that in the linear thermoelasticity the term in the heat conduction equation, responsible for the mechanical power of internal forces, has no significant effect on the solution of the thermoelastic system.

Key words: thermoelasticity problem, coupled and uncoupled statements, finite element method

1. Введение

Существует ряд важных проблем, требующих анализа термических эффектов, о роли которых можно судить по сопровождающим их термическим напряжениям и деформациям в конструкциях, подвергающихся большим температурным перепадам. Подобные задачи решались, например, в [1] в рамках теории несвязанной термоупругости, в которой предполагается, что изменение температуры способствует появлению термических деформаций, а деформации, возникающие из-за нагрузок на границе и внутренних сил в теле, вызывают в материале небольшие изменения температуры, которыми можно пренебречь. Считается, что такой приближенный полужамкнутый подход является удовлетворительным, особенно для металлов, и активно используется в настоящее время, в частности, при определении термических напряжений в циклической зоне сжатия перед вершиной трещины [2], воздействии сферического гауссова источника на бесконечную твердую среду [3], лазерном отжиге высокотемпературной керамики [4].

Однако имеются задачи, при решении которых предпочтительнее обращаться к связанной теории термоупругости [5, 6]. Сомнения в применимости несвязанной теории термоупругости для инженерных и геологических материалов (почв, горных пород), которые, как правило, находятся в адиабатических, а не в изотермических условиях, были высказаны еще в работе [7]. Для таких материалов на основе метода конечных элементов был разработан код общего назначения AFENA, позволяющий решать связанную (для изотермических условий) и несвязанную (для адиабатических условий) задачу термоупругости [8]. С помощью этого кода получены численные результаты для некоторых задач геотехнической инженерии. Так, рассматривалась задача охлаждения и деформирования термоупругой однородной изотропной массы горных пород, окружающей стенки длинного квадратного туннеля. При связанном подходе использовались адиабатические модули, при несвязанном — изотермические. Данные вычислений показали, что при различии адиабатических и изотермических модулей менее чем на 25% связанность слегка замедляет диффузию тепла через массив горной породы, но мало влияет на распределение внутренних напряжений. В [9], где с помощью разработанного конечно-элементного алгоритма, метода Ньюмарка и схемы Кранка–Николсон исследовался термодинамический отклик материала на сильный аэродинамический нагрев, выявлены также некоторые запаздывания реакций полей температуры и смещения на учитываемое в расчете деформационное воздействие на температурное поле.

Таким образом, связанная постановка задачи термоупругости рекомендуется для задач, когда материал находится в адиабатических условиях, а также для динамических задач, где обнаружен качественно новый эффект — затухание упругих волн [1, 10]. Кроме того, установлено, что связанность механических и температурных полей становится существенной при высокочастотных периодических и импульсных воздействиях [11, 12] и для тел с характерными размерами порядка микрометра [13]. Относительно остальных случаев в научной среде сложилось мнение, что решения, построенные в рамках связанной и несвязанной линейной задачи термоупругости, количественно не слишком отличаются друг от друга.

Однако пренебрежение членом в уравнении теплопроводности, отвечающим за механическую мощность внутренних сил и связанность задачи, влечет за собой потерю точности. Чтобы понять, насколько эта потеря существенна, нужно обладать собственной методикой решения численных задач и уметь реализовать эту методику в «домашнем» коде.

В настоящей статье проводится анализ численных решений плоской линейной задачи термоупругости для неоднородной среды с отверстием в связанной и несвязанной постановках с одинаковыми входными материальными параметрами. Эти решения получены с помощью метода конечных элементов, встроенного в специально разработанный и неоднократно модифицированный программный код общего назначения PIONER, написанный на языке Fortran [14]. Тестирование кода PIONER осуществлялось на разных задачах: динамических, статических, линейных и нелинейных механических и температурных; связанных и несвязанных квазистатических термомеханических. Численные результаты сравнивались либо с точными решениями, либо с численными решениями других исследователей, в частности, из работ [15–17], либо с решениями, найденными с помощью свободного кода FreeFEM++. Новизна обсуждаемых в данной работе исследований заключается во введении в код PIONER связанной и несвязанной формулировок плоской линейной задачи термоупругости и проведении сравнительных количественных расчетов характеристик неоднородной среды.

Основные уравнения несвязанной задачи термоупругости, как правило, соответствуют квазистатической постановке, когда, помимо обеспечивающего связность члена в уравнении теплопроводности, отбрасываются еще и инерционные члены в уравнениях движения. Объясняется это тем, что в обычных условиях тепловые потоки, образующиеся вследствие деформации, и динамические эффекты, обусловленные нестационарным нагревом, невелики. При этом связанная задача термоупругости может решаться как без учета динамических эффектов, так и в рамках динамической теории упругости. Поэтому для корректного сравнения численных решений будем рассматривать связанную и несвязанную задачи теплопроводности без учета инерционных членов в уравнениях движения.

В общем случае задача линейной термоупругости в связанной постановке при малых деформациях включает:

– уравнение теплопроводности

$$\rho c_m \dot{\theta} = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} \theta) + \dot{q} - 3K\alpha_T T_0 \operatorname{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (1)$$

– уравнения равновесия

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{F} = 0, \quad (2)$$

– соотношения Дюамеля–Неймана

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} - 3K\alpha_T \theta \mathbf{I}, \quad (3)$$

где $\theta = (T - T_0)$, T_0 — абсолютная температура в естественном состоянии, T — текущая температура, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши, $\boldsymbol{\sigma}^0$ — тензор начальных напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — линеаризованный тензор деформаций

с компонентами $\varepsilon_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$ (здесь и далее индексы i, j пробегают значения 1 и 2; по повторяющимся индексам проводится суммирование), u_i — компоненты вектора перемещений \mathbf{u} , \mathbf{F} — вектор массовых сил, \mathbf{I} — единичный тензор, $\mathbf{\kappa} = \kappa \mathbf{I}$ — тензор теплопроводности для изотропного материала, κ — коэффициент теплопроводности, ρ — плотность вещества, c_m — теплоемкость материала, α_T — коэффициент линейного теплового расширения, $K = \lambda + 2\mu/3$ — изотермический модуль всестороннего сжатия, λ, μ — коэффициенты Ламе, \dot{q} — интенсивность подвода тепла (точка над величиной обозначает её частную производную по времени);
– механические граничные условия, которые задаются как компоненты вектора перемещений на части границы S_u и компоненты вектора напряжений Коши на части поверхности S_p

$$u_i|_{S_u} = u_i^*, \quad \sigma_{ij} \bar{n}_j|_{S_p} = p_i^* \quad (4)$$

при условии, что $S = S_u \cup S_p$, $S_u \cap S_p = 0$, S — граница рассматриваемой области V , \bar{n}_j — направляющие косинусы внешней нормали к граничным поверхностям, p_i^* — компоненты вектора контурных усилий;
– тепловые граничные условия, за которые в качестве основных обычно принимаются разность температур на S_θ (условие Дирихле), поток тепла через поверхность S_q (условие Неймана), поток тепла за счет теплопроводности через поверхность S_h (условие Роббина или конвективное граничное условие)

$$\theta|_{S_\theta} = \theta^*, \quad -\kappa \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_{S_q} = q^{S_q}, \quad -\kappa \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_{S_h} = \pm h(T_{S_h} - T_0) \quad (5)$$

при $S = S_\theta \cup S_q \cup S_h$, $S_\theta \cap S_q \cap S_h = 0$. В (5) через n обозначена координатная ось в направлении единичного вектора нормали \mathbf{n} к площадке поверхности, h — коэффициент теплообмена, T_{S_h} — неизвестная температура на границе;
– начальные условия при $t = 0$ ставятся следующим образом:

$$u_i|_{S_u^0} = u_i^0, \quad \sigma_{ij}|_{S_p^0} = \sigma_{ij}^0, \quad \theta|_{S_\theta^0} = \theta^0;$$

– радиационное граничное условие для задачи теплопроводности записывается только при нелинейном анализе.
При отбрасывании в уравнении теплопроводности (1) члена, представляющего механическую мощность внутренних сил ($3K\alpha_T T_0 \dot{\varepsilon}_{kk} = 0$), получаем несвязанную квазистатическую задачу термоупругости, решить которую можно поэтапно: сначала рассмотреть независимую часть задачи термоупругости — уравнение нестационарной теплопроводности (1) при граничных условиях (5) и найти температурное поле, после чего — статическую задачу (2), (3) при заданном температурном поле и выполнении граничных условий (4) и определить термоупругие напряжения и деформации.

2. Дискретизация уравнений задачи термоупругости в связанной и несвязанной постановках

Произведем в уравнениях (1)–(3) некоторые упрощения. Предположим, что в образце отсутствуют начальные напряжения ($\sigma^0 = 0$), подвод тепла ($\dot{q} = 0$) и конвекция на части поверхности S_h . Действием массовых сил пренебрежем ($\mathbf{F} = 0$).

Для численной реализации системы дифференциальных уравнений (1)–(3) воспользуемся методом конечных элементов, который при построении дискретной векторно-матричной системы уравнений требует формулировки исходных дифференциальных уравнений в слабой форме.

Запишем исходные уравнения для задачи теплопроводности в связанной постановке в слабой форме. В декартовой системе координат при линейном анализе и принятых упрощениях уравнение (1) с граничным условием (5), уравнения (2), (3) с граничным условием (4) в компонентной форме для случая плоской деформации примут вид [5]:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_V (C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} - 3K\alpha_T \theta \delta \varepsilon_{kk}) dV &= \int_{S_p} p_i^* \delta u_i dS, \quad \delta u_i \in \{ \delta u_i | \delta u_i \in H^1, \delta u_i = 0 \text{ на } S_u \}, \\ \int_V \left[(3K\alpha_T \dot{\varepsilon}_{kk} + c_m \dot{\theta}/T) \delta \theta + \kappa \theta_{,k} (\delta \theta)_{,k} / T_0 \right] dV &= \int_{S_q} q^{S_q} \delta \theta dS, \quad \delta \theta \in \{ \delta \theta | \delta \theta \in H^1, \delta \theta = 0 \text{ на } S_\theta \}, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

где C_{ijkl} — компоненты тензора упругости четвертого ранга (индексы i, j, k, l пробегает значения 1 и 2), δu_i — компоненты вектора виртуальных перемещений, $\delta \varepsilon_{ij} = ((\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i})/2$ — компоненты тензора виртуальных деформаций, $\delta \theta$ — виртуальные температуры, запятой обозначаем частную производную величины по соответствующей координате. В случае изолированной от тепловых потоков адиабатической границы градиенты разности температур на S_q равны нулю $q^{S_q} = \theta_{,1} = \theta_{,2} = 0$.

Заметим, что в слабой форме уравнений несвязанной постановки для задачи теплопроводности будет отсутствовать слагаемое, содержащее $\dot{\varepsilon}_{kk}$.

Дискретизация уравнений термоупругости (6) подразумевает разбиение области V на M подобластей: $V = V^1 \cup V^2 \cup \dots \cup V^M$. Каждая из подобластей, согласно концепции изопараметрических конечных элементов [18], параметризуется введением локальных координат r, s таких, что $-1 \leq r \leq 1, -1 \leq s \leq 1$. Тогда смещения, температуры и координаты некоторой точки внутри каждого элемента являются функциями смещений, температур и координат в узловых точках элемента, число которых обозначим как N :

$$u_i(r, s) = \sum_{k=1}^N h_k(r, s) u_i^k, \quad \theta(r, s) = \sum_{k=1}^N h_k(r, s) \theta^k, \quad x_i(r, s) = \sum_{k=1}^N h_k(r, s) x_i^k,$$

где h_k — интерполяционные полиномы (функции формы), u_i^k, θ^k, x_i^k — значения смещений, температур и координат в k -й узловой точке ($k = 1, \dots, N$) соответственно. Функции формы должны удовлетворять двум требованиям:

- 1) $h_k = 1$ в k -м узле и $h_k = 0$ в остальных узлах;
- 2) $\sum_{k=1}^N h_k = 1$ в любой точке (r, s) из области определения.

Введем вектор узловых неизвестных элемента e :

$$\mathbf{U}^e \equiv [u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, \dots, u_1^N, u_2^N, \theta^1, \theta^2, \dots, \theta^N]^T,$$

где верхний индекс k указывает на принадлежность данной величины к k -й узловой точке. Здесь и далее верхний индекс «Т» обозначает операцию транспонирования. Разобьем вектор \mathbf{U}^e на два подвектора

$$\mathbf{U}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_u^e \\ \mathbf{U}_\theta^e \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{U}_u^e \equiv [u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, \dots, u_1^N, u_2^N]^T$, $\mathbf{U}_\theta^e \equiv [\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^N]^T$.

После проведения пространственной аппроксимации неизвестных, а также их аппроксимации по времени с первым порядком точности, например, $\dot{\mathbf{U}}_0^e = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{U}_0^e - {}^t\mathbf{U}_0^e)$ (Δt — шаг интегрирования по времени, вектор \mathbf{U}_0^e относится ко времени $t + \Delta t$, вектор ${}^t\mathbf{U}_0^e$ — ко времени t), получаем систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}, \\ \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}^0, \end{cases} \quad (7)$$

где эффективные матрица $\mathbf{K} = A_{e=1}^M \mathbf{K}^e$ и векторы $\mathbf{R} = A_{e=1}^M \mathbf{R}^e$, $\mathbf{U} \equiv A_{e=1}^M \mathbf{U}^e$ находятся с помощью операции ассемблирования [19] (обозначена как $A_{e=1}^M$), \mathbf{U}^0 — вектор начальных перемещений и температур. Матрица элемента \mathbf{K}^e , вектор узловых неизвестных элемента \mathbf{U}^e и вектор правой части для элемента \mathbf{R}^e в связанной задаче термоупругости определяются следующим образом:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u^e & -\mathbf{K}_{u\theta}^e \\ -\mathbf{K}_{u\theta}^{eT} & -\mathbf{C}_0^e - \Delta t \mathbf{K}_\theta^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_u^e \\ \mathbf{U}_\theta^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_p^e \\ -\mathbf{K}_{u\theta}^{eT} \mathbf{U}_u^e - \mathbf{C}_0^e {}^t\mathbf{U}_0^e \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{K}_0^e \equiv \int_{V^e} \frac{\mathbf{K}}{T_0} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{B}} dV$, $\mathbf{K}_u^e \equiv \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV$, $\mathbf{K}_{u\theta}^e \equiv \int_{V^e} 3\mathbf{K} \alpha_T \tilde{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{B}} dV$, $\mathbf{C}_0^e \equiv \int_{V^e} \frac{C_m}{T_0} \hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}} dV$, $\mathbf{R}_p^e \equiv \int_{S_p^e} \mathbf{H}^T \mathbf{P}^* dS$,

$$\mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & \dots & h_N & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & \dots & 0 & h_N \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{H}} = [h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_N], \quad \check{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \dots & h_{N,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & \dots & h_{N,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & 0 & h_{2,1} & 0 & \dots & h_{N,1} & 0 \\ 0 & h_{1,2} & 0 & h_{2,2} & \dots & 0 & h_{N,2} \\ h_{1,2} & h_{1,1} & h_{2,2} & h_{2,1} & \dots & h_{N,2} & h_{N,1} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = [h_{1,1} \quad h_{1,2} \quad h_{2,1} \quad h_{2,2} \quad \dots \quad h_{N,1} \quad h_{N,2}], \quad h_{k,j} \equiv \frac{\partial h_k}{\partial x_j}.$$

Матрица \mathbf{C} составлена из компонент тензора упругости четвертого порядка C_{ijkl} :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix},$$

где $c_3 = E/(2(1+\nu))$, $c_2 = \nu c_3/(1-2\nu)$, $c_1 = c_2 + c_3$, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Для несвязанной задачи термоупругости система матричных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_0 \mathbf{U}_0 = \mathbf{R}_0; \\ \mathbf{K}_u \mathbf{U}_u = \mathbf{R}_u, \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad (8)$$

где $\mathbf{K}_0 = A_{e=1}^M (\mathbf{C}_0^e + \Delta t \mathbf{K}_0^e)$, $\mathbf{U}_0 = A_{e=1}^M \mathbf{U}_0^e$, $\mathbf{R}_0 = A_{e=1}^M (\mathbf{C}_0^e \mathbf{U}_0^e)$, $\mathbf{U} = A_{e=1}^M \mathbf{U}_u^e$, $\mathbf{K}_u = A_{e=1}^M \mathbf{K}_u^e$, $\mathbf{R}_u = A_{e=1}^M (\mathbf{R}_p^e + \mathbf{K}_{u0}^e \mathbf{R}_0^e)$. Чтобы решить систему уравнений (8), следует, как отмечалось ранее, сначала из (8)₁ определить температурный вектор \mathbf{U}_0 , после чего уже с его учетом из (8)₂ найти вектор смещений \mathbf{U}_u .

Решая системы линейных алгебраических уравнений (7) или (8) на каждом временном шаге, получаем вектор искомых величин \mathbf{U}^e или векторы \mathbf{U}_u^e , \mathbf{U}_0^e в узловых точках элемента. Интерполяция деформаций и температур, соответствующая N узлам элемента, задается формулами

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{U}_u^e, \quad \theta = \hat{\mathbf{H}} \mathbf{U}_0^e,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}]^T$.

Хорошо известно, что компоненты тензора напряжений и тензора деформаций, определяемые с помощью метода конечных элементов, являются разрывными на краях элементов, и, как следствие, они разрывны и в узловых точках [20]. В то же время наиболее точные значения этих величин находятся в гауссовых точках следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11}^0 + c_1 \varepsilon_{11} + c_2 \varepsilon_{22} - 3K\alpha_T \theta, \\ \sigma_{22} &= \sigma_{22}^0 + c_2 \varepsilon_{11} + c_1 \varepsilon_{22} - 3K\alpha_T \theta, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{12}^0 + 2c_3 \varepsilon_{12}, \\ \sigma_{33} &= \sigma_{33}^0 + c_2 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - 3K\alpha_T \theta. \end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить компоненты тензора напряжений в произвольной точке элемента, введем особый набор интерполяционных полиномов: $\bar{h}^k(r_i, s_i) = \delta_{ki}$, где δ_{ki} — символ Кронекера, для которых узлами служат квадратурные точки (гауссовы точки интегрирования). Тогда имеем:

$$\sigma(r, s) = \sum_{k=1}^{N_{int}} \bar{h}^k(r, s) \sigma^k,$$

где σ^k — значения компонент тензора напряжений в k -й точке интегрирования ($k = 1, \dots, N_{int}$), N_{int} — число точек интегрирования. При этом полиномы $\bar{h}^k(r, s)$ формируются как произведения одномерных полиномов $\hat{h}_l(r)$, $\hat{h}_m(s)$:

$$\bar{h}^k(r, s) = \hat{h}_l(r) \hat{h}_m(s) \quad (l = 1, \dots, N_{int}^r, \quad m = 1, \dots, N_{int}^s),$$

где N_{int}^r, N_{int}^s — число точек интегрирования в r, s направлениях соответственно. Например, для интегрирования 2×2 по Гауссу $N_{int}^r = 4, N_{int}^r = N_{int}^s = 2, r_1 = s_1 = -a, r_2 = s_2 = a, a = 0,57735,$
 $\hat{h}_1(r) = \frac{r-r_2}{r_1-r_2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{r}{a}\right), \hat{h}_2(r) = \frac{r-r_1}{r_2-r_1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{r}{a}\right), \hat{h}_1(s) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{a}\right), \hat{h}_2(s) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{s}{a}\right),$
 $\sigma(r,s) = \hat{h}_1(r)\hat{h}_1(s)\sigma^1 + \hat{h}_1(r)\hat{h}_2(s)\sigma^2 + \hat{h}_2(r)\hat{h}_1(s)\sigma^3 + \hat{h}_2(r)\hat{h}_2(s)\sigma^4.$

3. Сравнительный анализ численных решений нестационарной задачи термоупругости об охлаждении полого цилиндра в связанной и несвязанной постановках

В рамках линейной теории термоупругости рассмотрим нестационарную задачу охлаждения и деформирования длинного полого стального цилиндра. Внутренний и внешний радиусы цилиндра положим следующими: $r_1 = 80$ мм и $r_2 = 400$ мм. Внутри и снаружи цилиндра поддерживаются постоянные температуры, разность которых составляет $\theta = T_{int}^* - T_0^* = -80$ К (см. Рис. 1). Механические граничные условия зададим в напряжениях: пусть на внутренней поверхности цилиндра действует равномерное нормальное давление

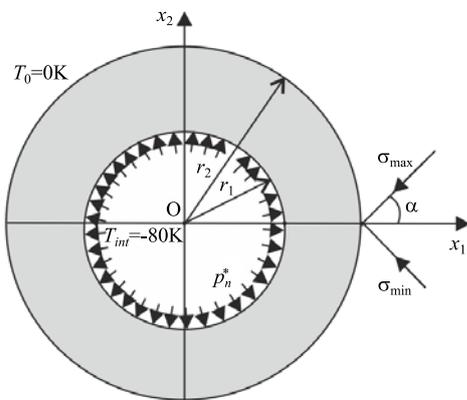


Рис. 1. Графическая интерпретация тепловых и механических граничных условий на внутренней и внешней поверхностях цилиндра

$p_n^*|_{S_{int}} = -100$ МПа; внешняя поверхность цилиндра находится в поле действия однородных сжимающих напряжений σ^* .

На внешней границе компоненты вектора напряжений Коши определяются как (см. [21])
 $p^*|_{S_{ext}} = \sigma^* n:$

$$p_1^*|_{S_{ext}} = \sigma_{11}^* n_1 + \sigma_{12}^* n_2,$$

$$p_2^*|_{S_{ext}} = \sigma_{12}^* n_1 + \sigma_{22}^* n_2,$$

где $n_1 = \cos(\mathbf{n}, x_1), n_2 = \cos(\mathbf{n}, x_2)$ — направляющие косинусы вектора нормали \mathbf{n} к внешней поверхности цилиндра,

$$\sigma_{11}^* = \sigma_{max} \cos^2 \alpha + \sigma_{min} \sin^2 \alpha,$$

$$\sigma_{22}^* = \sigma_{max} \sin^2 \alpha + \sigma_{min} \cos^2 \alpha,$$

$$\sigma_{12}^* = \sigma_{21}^* = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Здесь $\sigma_{max} = \sigma_1, \sigma_{min} = \sigma_2$ — главные напряжения тензора σ^*, α — заданный угол между площадкой максимальных касательных напряжений и направлением оси x_1 , являющийся входным параметром задачи. Значения $\sigma_{max}, \sigma_{min}$ и угла α приведены в таблице 1, теплофизические характеристики — в таблице 2.

Таблица 1. Значения $\sigma_{max}, \sigma_{min}$ и угла α для компьютерного моделирования задачи

$\sigma_{max},$ МПа	$\sigma_{min},$ МПа	$\alpha,$ град
-45	-15	90

Таблица 2. Материальные параметры области моделирования

Название параметра	Обозначение	Значение (для стали)	Единица измерения
Модуль Юнга	E	200000	МПа
Коэффициент Пуассона	ν	0,27	—
Коэффициент линейного теплового расширения	α_T	$1,2 \cdot 10^{-5}$	K^{-1}
Коэффициент теплопроводности	κ	15	МПа·мм ² /(с·К)
Удельная теплоемкость	c_m	3,968	МПа/К
Температура окружающей среды	T_0	0	К

Начальные условия при $t=0$ полагаем нулевыми на всей поверхности $S^0 = S_0^0 = S_u^0: u_i(x_1, x_2, 0)|_{S^0} = 0$ ($i = 1, 2$), $\theta(x_1, x_2, 0)|_{S^0} = 0$ К.

Для создания конечно-элементной модели использовано 96 двумерных 8-узловых элементов с пониженным 2×2 порядком интегрирования по Гауссу, позволяющих моделировать плоскую деформацию. Общее число узлов равнялось 324 и включало четыре фиксированных «угловых» узла (узлы 321, 322, 323, 324 на Рис. 2а), связанных с областью решения задачи с помощью восьми одномерных элементов (Рис. 2а). Введение последних обуславливалось необходимостью исключить перемещение тела как жесткого целого. Нумерация узлов осуществлялась по секциям в радиальном направлении. Принцип нумерации узлов и элементов показан на рисунке 2б. Сетка, при сохранении общего числа элементов, сгущалась по мере приближения к центральному отверстию.

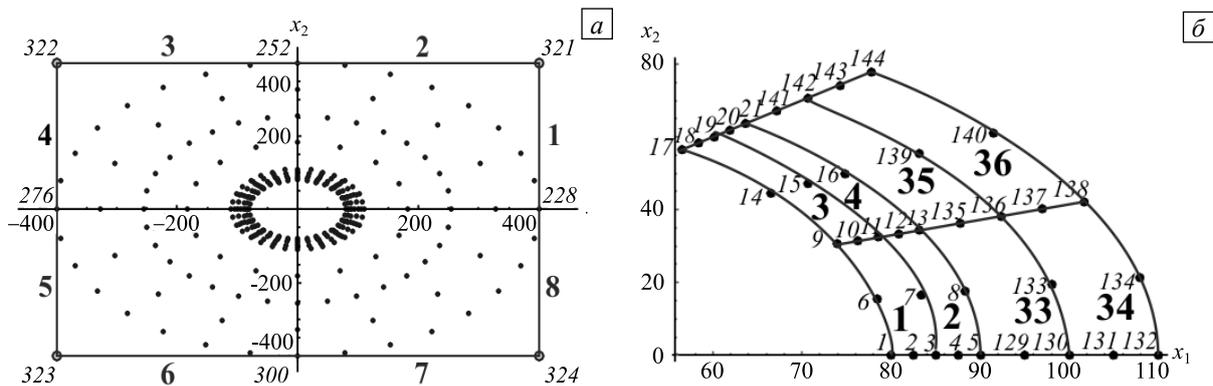


Рис. 2. Конечно-элементная сетка с обозначенными восемью одномерными элементами (а), фрагмент сетки с пронумерованными узлами и элементами (б)

Основная проблема при введении фиксированных узлов заключалась в нахождении оптимальной жесткости одномерных элементов конструкции: $K = ES$ (здесь E — модуль Юнга, S — поперечная площадь одномерного элемента, принимаемая за 1 мм^2), которая должна была быть достаточной, чтобы величины штрафа — необходимой минимальной жесткости одномерных элементов, хватило для удержания конструкции от перемещения как жесткого целого, но при этом жесткость одномерных элементов не оказывала бы влияния на решение. Исходя из тестовых численных расчетов, величина штрафа для данного типа задач задавалась равной $K = 20000 \text{ Н}$.

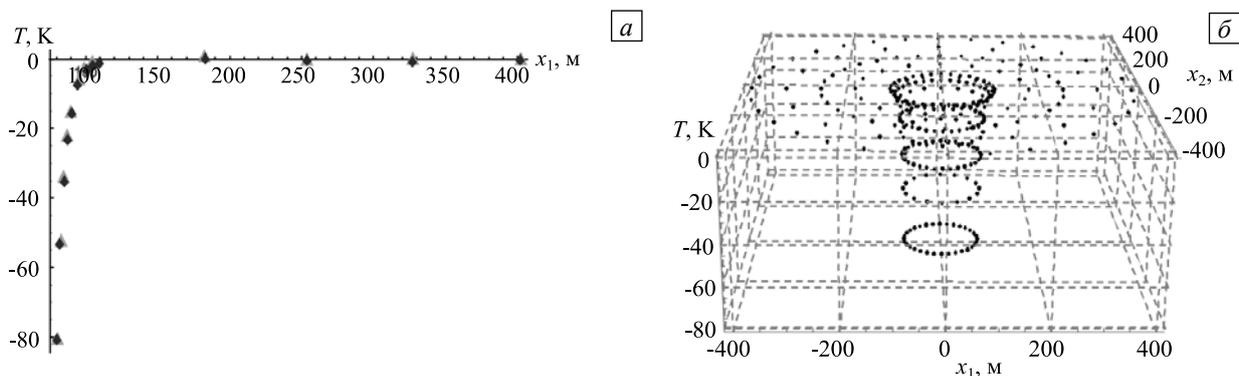


Рис. 3. Двумерное при $x_2 = 0$ (а) и трехмерное (б) нестационарные температурные поля в полем цилиндре при $t = \Delta t = 10 \text{ с}$

Представленная конечно-элементная модель использовалась при решении нестационарной задачи термоупругости в двух постановках: несвязанной и связанной. На рисунке 3 показаны двумерное и трехмерное температурные поля, соответствующие численному решению задачи термоупругости в несвязанной/связанной постановках для $t = \Delta t = 10 \text{ с}$. Рисунок 3а содержит узловые температуры вдоль положительной полуоси Ox_1 при $x_2 = 0$, рисунок 3б — пространственное температурное поле.

На рисунке 4 приведены двумерные и трехмерные распределения горизонтальных и вертикальных смещений. Рисунок 5 отражает характер изменений компонент тензора напряжений по мере удаления от внутренней поверхности трубы в направлении положительной полуоси Ox_1 . Значения компонент определялись в точках интегрирования 1, 3 каждого элемента, примыкающего к этой полуоси. Расположение элементов и точек интегрирования схематично показано на рисунке 5а.

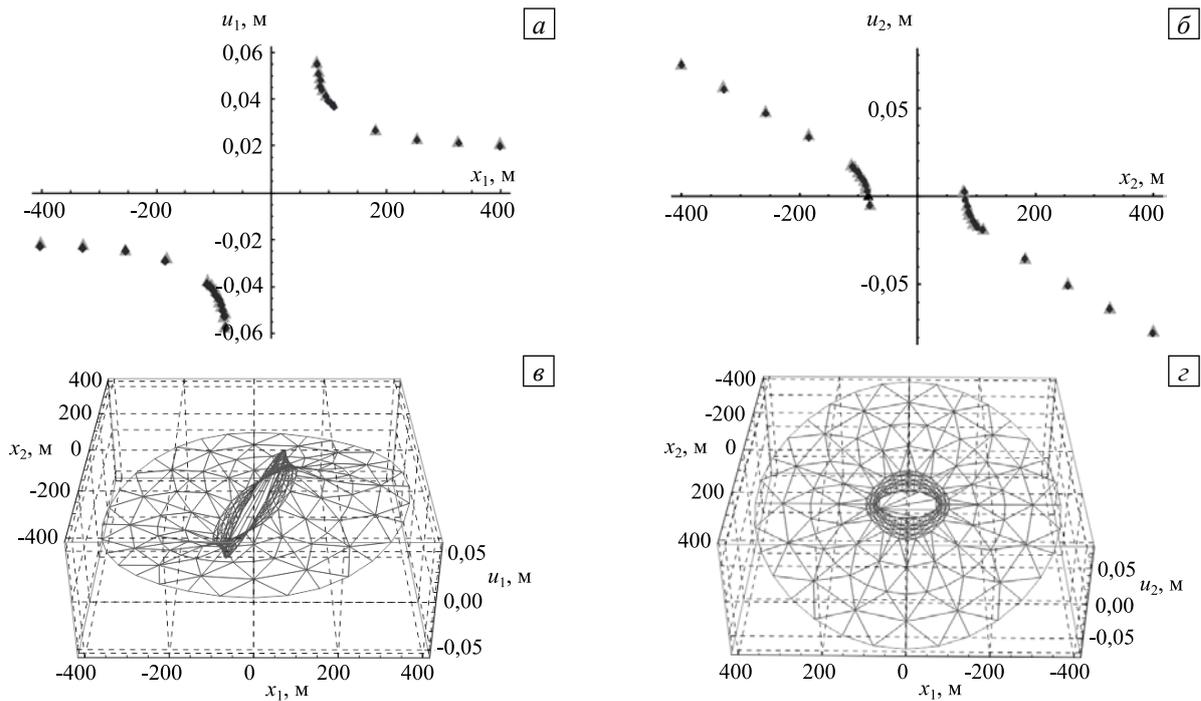


Рис. 4. Двумерные при $x_2=0$ (а), при $x_1=0$ (б), и трехмерные распределения горизонтальных u_1 (в) и вертикальных (г) смещений при $t = \Delta t = 10$ с

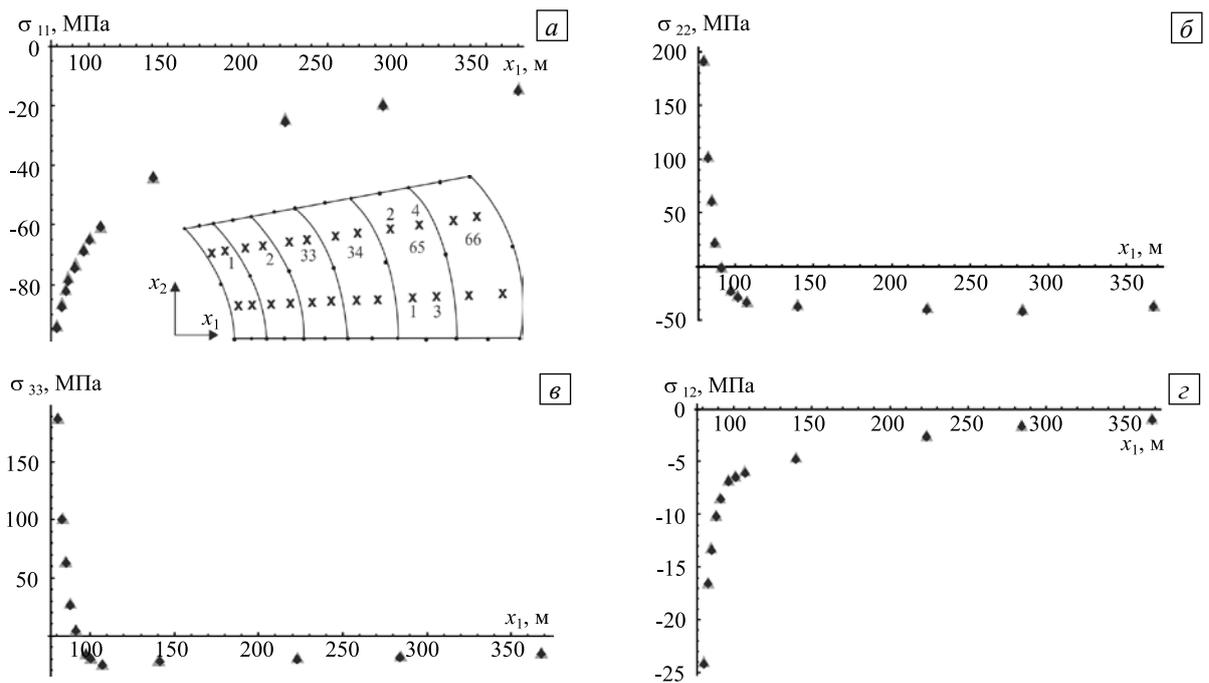


Рис. 5. Компоненты тензора напряжений в точках 1, 3 элементов 1, 2, 33, 34, 65, 66, расположенных вдоль положительной полуоси Ox_1 (серые треугольники – связанная постановка, черные ромбы – несвязанная постановка); на фрагменте (а) показано расположение 1-й–4-й (обозначены крестиками) точек интегрирования в перечисленных элементах сетки

Согласно рисункам 3а, 4а, 4б и 5 серые треугольники, соответствующие значениям, полученным при решении задачи термоупругости в связанной постановке, в точности ложатся на черные ромбы, соответствующие значениям решения задачи термоупругости в несвязанной постановке. Насколько близки эти значения, показывают таблицы 3–5, в которых приведены результаты численных расчетов компонент смещений, температур, напряжений для обеих постановок задачи термоупругости. Верхние индексы в таблицах указывают на то, в какой постановке решена задача: c — в связанной, nc — в несвязанной. В таблице 5 величина N^c — номер элемента, N^p — номер точки интегрирования при порядке интегрирования 2×2 . Как видно из таблиц, соответствующие друг другу численные результаты хорошо согласуются. Отличия значений наблюдаются в 6-м знаке после запятой для смещений, в 3-м знаке после запятой для температур и напряжений.

Таблица 3. Значения смещений и температур в нестационарной задаче термоупругости при связанной и несвязанной постановках и $t = \Delta t = 10$ с

N	$u_{x_1}^c$, мм	$u_{x_2}^c$, мм	T^c , К	$u_{x_1}^{nc}$, мм	$u_{x_2}^{nc}$, мм	T^{nc} , К
1	0,0562233	0,0000000	-80,00000	0,0562233	0,0000000	-80,00000
2	0,0518146	0,0000000	-52,36615	0,0518146	0,0000000	-52,36660
3	0,0487050	0,0000000	-34,23063	0,0487050	0,0000000	-34,23126
4	0,0464333	0,0000000	-22,46336	0,0464333	0,0000000	-22,46404
5	0,0447253	0,0000000	-14,76781	0,0447252	0,0000000	-14,76847
6	0,0551641	0,0008045	-80,00000	0,0551641	0,0008043	-80,00000
...
315	0,0235566	0,0085656	0,020266	0,0235561	0,0085659	0,020013
316	0,0198457	0,0142754	-0,024974	0,0198450	0,0142757	-0,025157
317	0,0179246	0,0189012	0,002377	0,0179236	0,0189016	0,002136
318	0,0165292	0,0224128	0,000000	0,0165281	0,0224132	0,000000
319	0,0224581	0,0069948	-0,024784	0,0224574	0,0069949	-0,024975
320	0,0196647	0,0110404	0,000000	0,0196636	0,0110406	0,000000

Таблица 4. Значения смещений и температур в нестационарной задаче термоупругости при связанной и несвязанной постановках и $t = \Delta t = 100$ с

N	$u_{x_1}^c$, мм	$u_{x_2}^c$, мм	T^c , К	$u_{x_1}^{nc}$, мм	$u_{x_2}^{nc}$, мм	T^{nc} , К
1	0,0544328	0,0000000	-80,00000	0,0544330	0,0000000	-80,00000
2	0,0494932	0,0000000	-72,59492	0,0494934	0,0000000	-72,59503
3	0,0450590	0,0000000	-65,46263	0,0450592	0,0000000	-65,46284
4	0,0411184	0,0000000	-58,62853	0,0411186	0,0000000	-58,62883
5	0,0376209	-0,000000	-52,13060	0,0376211	0,0000000	-52,13099
6	0,0534176	0,0004570	-80,00000	0,0534179	0,0004573	-80,00000
...
315	0,0083240	0,0148751	0,65917	0,0083233	0,0148755	0,658870
316	0,0097147	0,0184718	-1,08612	0,0097138	0,0184723	-1,086330
317	0,0087014	0,0227216	0,05378	0,0087002	0,0227221	0,053530
318	0,0082808	0,0258294	0,00000	0,0082796	0,0258299	0,000000
319	0,0116821	0,0091383	-1,08060	0,0116811	0,0091385	-1,080810
320	0,0109196	0,0127799	0,00000	0,0109183	0,0127802	0,000000

Таблица 5. Значения компонент тензора напряжений в точках интегрирования 1, 3, полученные при решении нестационарной задачи термоупругости в связанной и несвязанной постановках и $t = \Delta t = 10$ с

N^c	N^p	σ_{11}^c , МПа	σ_{22}^c , МПа	σ_{33}^c , МПа	σ_{12}^c , МПа	σ_{11}^{nc} , МПа	σ_{22}^{nc} , МПа	σ_{33}^{nc} , МПа	σ_{12}^{nc} , МПа
1	1	-93,8813	191,7970	187,7240	-23,9890	-93,8813	191,7960	187,7250	-23,9889
1	3	-85,8719	101,7300	102,4200	-16,3838	-85,8719	101,7310	102,4220	-16,3838
2	1	-81,6829	61,2698	63,9052	-13,1306	-81,6829	61,2706	63,9070	-13,1307
2	3	-77,1771	23,3622	27,7060	-10,1443	-77,1771	23,3632	27,7079	-10,1444
33	1	-73,3538	0,56889	5,9224	-8,4669	-73,3537	0,569656	5,9241	-8,4669
33	3	-67,8651	-21,8334	-15,3814	-6,6709	-67,8650	-21,8329	-15,3800	-6,6710
34	1	-64,5677	-27,0396	-20,0982	-6,2648	-64,5675	-27,0393	-20,0970	-6,26480
34	3	-60,5118	-31,2725	-23,6049	-5,8089	-60,5116	-31,2725	-23,6040	-5,8090
65	1	-43,5206	-34,2936	-20,7923	-4,5670	-43,5204	-34,2936	-20,7915	-4,5670
65	3	-24,5834	-37,5207	-16,8419	-2,4215	-24,5834	-37,5207	-16,8413	-2,4215
66	1	-19,2337	-38,0382	-15,4402	-1,4596	-19,2336	-38,0382	-15,4395	-1,4596
66	3	-15,6858	-36,6627	-14,1453	-0,9266	-15,6858	-36,6629	-14,1450	-0,9266

4. Заключение

Выполненные численные эксперименты позволяют заключить, что в случае подверженного малым деформациям и небольшим изменениям температуры упругого линейного изотропного тела механическую и температурную части термоупругой задачи, описывающей его поведение, можно решать как независимо друг от друга, так и совместно: выбранный способ решения сказывается на результате незначительно. Зачастую в конкретных технических приложениях термомеханические связи имеют «односторонний» характер: либо тепловой поток и распределение температуры влияют на форму «механических» уравнений (2), (3), либо деформации, определенные из этих уравнений, влияют на форму уравнения теплопроводности (1). Доминирующим является только одно из двух направлений односторонних связей, другим при этом пренебрегают. Полученные в данной работе результаты, справедливые при определенных ограничениях, подтверждают такой подход.

Наличие больших деформаций, возникновение неупругих деформаций, проявление разного рода нелинейных эффектов требуют дополнительного изучения при рассмотрении термомеханической задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-08-01635-а).

Литература

1. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
2. *Ranc N., Palin-Luc T., Paris P.C.* Thermal effect of plastic dissipation at the crack tip on the stress intensity factor under cyclic loading // *Eng. Fract. Mech.* – 2011. – Vol. 78, no. 6. – P. 961-972. DOI
3. *Ouzia A., Antonakakis T.* Uncoupled thermoelasticity solutions applied on beam dumps // *Phys. Rev. Accel. Beams.* – 2016. – Vol. 19. – 063501. DOI
4. *Коваленко А.Ф.* Режимы высокотемпературного лазерного отжига оптической керамики КО-3 излучением CO₂-лазера // *Стекло и керамика.* – 2015. – № 11. – С. 17-21. (English version DOI).
5. *Kleiber M., Kowalczyk P.* Introduction to nonlinear thermomechanics of solid / *Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences.* – Springer, 2016. – 345 p. DOI
6. *Роговой А.А.* Термоупругопластические процессы с конечными деформациями // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 373-383. DOI
7. *Carter J.P., Booker J.R.* Finite element analysis of coupled thermoelasticity // *Comput. Struct.* – 1989. – Vol. 31, no. 1. – P. 73-80. DOI
8. *Carter J.P.* AFENA – A finite element numerical algorithm – Users' manual. – School of Civil and Mining Engineering, University of Sydney, Australia, 1986.
9. *Zhihui Li, Qiang Ma, Junzhi Cui.* Finite element algorithm for dynamic thermoelasticity coupling problems and application to transient response of structure with strong aerothermodynamic environment // *Commun. Comput. Phys.* – 2016. – Vol. 20, no. 3. – P. 773-810. DOI
10. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 309 с.
11. *Eringen A.C.* Mechanics of continua. – New York: Huntington, 1980. – 592 p.
12. *Азоловян Л.А., Геворкян Р.С., Саркисян А.Г.* Сравнительный асимптотический анализ несвязанной и связанной теорий термоупругости // *МТТ.* – 2014. – № 4. – P. 38-53. (English version DOI).
13. *Лычев С.А., Манжиров А.В., Юбер С.В.* Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // *МТТ.* – 2010. – № 4. – С. 138-154. (English version DOI).
14. *Korobeinikov S.N., Agapov V.P., Bondarenko M.I., Soldatkin A.N.* The general purpose nonlinear finite element structural analysis program PIONER // *Proc. Int. Conf. Num. Meth. Appl.* – Sofia: Publ. House Bulgarian Acad. Sci., 1989. – P. 228-233.
15. *Polivka R.M., Wilson E.L.* Finite element analysis of nonlinear heat transfer problems. – Berkeley: University of California, 1976.
16. *Kreith F.* Principles of heat transfer. – New York: Intext Press Inc., 1973. – 414 p.
17. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
18. *Bathe K.J.* Finite element procedures. – Prentice Hall, New Jersey, Upper Saddle River, 1996. – 1037 p.
19. *Curnier A.* Computational methods in solid mechanics. – Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1994. – 404 p. DOI
20. *Hughes T.J.R.* The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis. – Hall, Englewood Cliffs, 1987. – 803 p.
21. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000. – 262 с.

References

1. Nowacki W. *Dynamic problems of thermoelasticity.* Pergamon Press, 1975.
2. *Ranc N., Palin-Luc T., Paris P.C.* Thermal effect of plastic dissipation at the crack tip on the stress intensity factor under cyclic loading. *Eng. Fract. Mech.*, 2011, vol. 78, no. 6, pp. 961-972. DOI
3. *Ouzia A., Antonakakis T.* Uncoupled thermoelasticity solutions applied on beam dumps. *Phys. Rev. Accel. Beams.*, 2016, vol. 19, 063501. DOI
4. *Kovalenko A.* CO₂-laser high-temperature annealing regimes for KO-3 optical ceramic. *Glass and Ceramics*, 2016, vol. 72, no. 11-12, pp. 409-412. DOI
5. *Kleiber M., Kowalczyk P.* *Introduction to nonlinear thermomechanics of solid.* Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences. Springer, 2016. 345 p DOI
6. *Rogovoy A.A.* Thermo-elastic-plastic processes with finite deformations. *Vychisl. mekh. splosh. sred. – Computational Media Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 373-383. DOI

7. Carter J.P., Booker J.R. Finite element analysis of coupled thermoelasticity. *Comput. Struct.*, 1989, vol. 31, no. 1, pp. 73-80. DOI
8. Carter J.P. AFENA – A *Finite Element Numerical Algorithm – Users' Manual*. School of Civil and Mining Engineering, University of Sydney, Australia, 1986.
9. Zhihui Li, Qiang Ma, Junzhi Cui. Finite element algorithm for dynamic thermoelasticity coupling problems and application to transient response of structure with strong aerothermodynamic environment. *Commun. Comput. Phys.*, 2016, vol. 20, no. 3, pp. 773-810. DOI
10. Kovalenko A.D. *Osnovy termouprugosti* [Foundations of thermoelasticity]. Kiev: Naukova Dumka, 1970. 309 p.
11. Eringen A.C. *Mechanics of continua*. New York: Huntington, 1980. 592 p.
12. Agalovyan L.A., Gevorgyan R.S. Sargsyan A.G. Comparative asymptotic analysis of coupled and uncoupled thermoelasticity. *Mech. Solids.*, 2014, vol. 49, no. 4, pp. 389-402. DOI
13. Lychev S.A., Manzhurov A.V., Joubert S.V. Closed solutions of boundary-value problems of coupled thermoelasticity. *Mech. Solids*, vol. 45, no. 4, pp. 610-623. DOI
14. Korobeinikov S.N., Agapov V.P., Bondarenko M.I., Soldatkin A.N. The general purpose nonlinear finite element structural analysis program PIONER. *Proc. Int. Conf. Num. Meth. Appl. Sofia: Publ. House Bulgarian Acad. Sci.*, 1989. Pp. 228-233.
15. Polivka R.M., Wilson E.L. *Finite element analysis of nonlinear heat transfer problems*. Berkeley: University of California, 1976.
16. Kreith F. *Principles of heat transfer*. New York: Intext Press Inc., 1973. 414 p.
17. Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Theory of elasticity*. NY: McGraw Hill, 1970. 608 p.
18. Bathe K.J. *Finite element procedures*. Prentice Hall, New Jersey, Upper Saddle River, 1996. 1037 p.
19. Curnier A. *Computational methods in solid mechanics*. Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1994. 404 p. DOI
20. Hughes T.J.R. *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis*. Hall, Englewood Cliffs, 1987. 803 p.
21. Korobeinikov S.N. *Nelineynoe deformirovanie tverdykh tel* [Nonlinear deformation of solids]. Novosibirsk: SB RAS, 2000. 262 p.

Поступила в редакцию 31.07.2017; опубликована в электронном виде 30.12.2017

Сведения об авторах

Кожжевникова Марина Евгеньевна, ктн, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (ИГиЛ СО РАН), 6300090, Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, д. 15; e-mail: m.e.kozhevnikova@yandex.ru

Ротанова Татьяна Александровна, кфмн, ИГиЛ СО РАН; e-mail: t.rotanova@hydro.nsc.ru

Валов Александр Викторович, ст. лаб.-исслед., магистрант, ИГиЛ СО РАН; e-mail: valov-av@hydro.nsc.ru