

DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.4.28

УДК 539.3: 534.1

## ФЛАТТЕР ЗАЩЕМЛЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

С.О. Папков

*Севастопольский государственный университет, Севастополь, Российская Федерация*

В данной статье представлен новый подход к анализу динамической устойчивости прямоугольных ортотропных пластин. В частности, в приближении теории плоских сечений исследуется проблема флаттера для ортотропной панели в сверхзвуковом потоке газа, которая сводится к краевой задаче для несимметричного дифференциального оператора. С целью улучшения стандартной процедуры вычислений методом Бубнова–Галеркина предлагается в качестве базисных функций этого метода использовать собственные формы колебаний прямоугольной ортотропной пластины в вакууме, для которых автором получены новые аналитические представления. Согласно данному подходу краевая задача сводится к однородной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. На основе асимптотического анализа и теории регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений разработан точный и эффективный алгоритм построения собственных форм пластины в вакууме. Таким образом, в статье обсуждаются как алгоритм построения базисных функций метода Бубнова–Галеркина, так и алгоритм определения критического значения параметра скорости, при котором имеет место динамическая неустойчивость. Численно изучается сходимость метода Бубнова–Галеркина в зависимости от параметров задачи. Результаты численного моделирования показывают, что при изменении значений сил в плоскости пластины и упругих свойств материала хорошая сходимость метода может быть достигнута при первых 16-ти базисных функциях. Аналогичная сходимость метода наблюдается и для удлиненной пластины. Вычислительная эффективность метода иллюстрируется примерами.

*Ключевые слова:* прямоугольная пластина, флаттер, метод Бубнова–Галеркина, собственные формы колебаний

## FLUTTER OF CLAMPED ORTHOTROPIC RECTANGULAR PLATE

S.O. Papkov

*Sevastopol State University, Sevastopol, Russian Federation*

A new approach for dynamic stability analysis of rectangular orthotropic plates is presented. In particular, in the approximation of the theory of planar sections the problem of the flutter of a panel in a supersonic gas flow is reduced to a boundary value problem for nonsymmetric differential operator. To improve standard technique of the Bubnov–Galerkin method, it is proposed to use new analytical representations of the eigenmodes of vibrations of a rectangular orthotropic plate in a vacuum as the basis functions of this method. According to this approach, the boundary value problem is essentially reduced to a homogeneous infinite system of linear algebraic equations. By using the asymptotic analysis and theory of regular infinite systems of linear algebraic equations, the effective and accurate algorithm for constructing the mode shapes in vacuum is developed. So, both the algorithm for constructing basis functions and the algorithm for determining the critical value of the velocity parameter are presented in this paper. The convergence of the Bubnov–Galerkin method is studied numerically for different problem parameters. The results of numerical modeling show that good convergence of the method can be achieved with first 16 basis functions when the values of in-plane forces and elastic constants vary. An analogous convergence of the method is also observed for an elongated plate. The computational efficiency of the method is illustrated by examples.

*Key words:* rectangular plate, flutter, Bubnov–Galerkin method, natural modes

### 1. Введение

Задачам панельного флаттера посвящена обширная литература, что связано с широким применением пластин (панелей) в машиностроении. В частности, они являются одним из основных структурных элементов в аэрокосмических аппаратах. Динамическая потеря устойчивости панели, которая происходит в силу перекачки энергии от воздушного потока к пластине, может привести к самопроизвольным вибрациям конструкции, в том числе и с большими амплитудами, что вызывает риски в ее эксплуатации. Явление возникновения автоколебаний системы пластина–воздушный поток называется панельным флаттером.

В монографиях [1–3] приводятся основные классические результаты по флаттеру прямоугольных пластин, в том числе в линейной постановке. При исследовании конечных и бесконечных пластин с шарнирно опертыми краями в линейном приближении поршневой теории удается явно получить аналитическое решение задачи и провести анализ флаттера [4, 5]. Как правило, в линейной постановке флаттер появляется благодаря сближению и слианию двух соседних собственных форм колебаний пластины при возрастании скорости потока. В работах [6–8] представлена более общая теория, согласно которой возможен так называемый одномодовый флаттер, который возникает из-за демпфирования газа и не требует какого-либо взаимодействия между модами.

Методы исследования флаттера прямоугольных пластин можно разбить на две основные группы: точные методы, в которых строится и анализируется решение разрешающего дифференциального уравнения, и методы, основанные на дискретизации дифференциального оператора (метод конечных

элементов [9–16], методы с насыщением [3, 17]). В работе [18] методом Бубнова–Галеркина исследуется флаттер шарнирно опертой пластины переменной толщины.

Панель, закрепленная в жесткой раме, также относится к одному из базовых структурных элементов. Тем не менее, даже в линейном приближении для пластин с закрепленными краями точное решение отсутствует, традиционно используются методы численного решения, такие как метод конечных элементов [12]. При этом данная задача и в настоящее время вызывает интерес. Например, в статье [10] по результатам конечно-элементного анализа нелинейной модели делается вывод о том, что увеличение поперечной нагрузки приводит к росту критического динамического давления для защемленной по всем краям панели, в то время как теория, изложенная в статье [12], дает обратный результат. В [19] изучение флаттера стенки топливного бака осуществляется методом Бубнова–Галеркина, при этом в качестве базисных функций берутся комбинации тригонометрических функций. Получено хорошее согласование с экспериментом, однако установлено, что для удлиненных пластин требуется значительное увеличение числа базисных функций.

В [20] описан новый подход к определению собственных частот колебаний ортотропных пластин. Как обобщение результата, полученного в этой работе, в предлагаемой вниманию читателя статье представлена асимптотика нетривиальных решений соответствующих бесконечных систем, которая дает возможность эффективного построения собственных форм колебаний пластины, которые предлагается использовать в качестве базисных функций метода Бубнова–Галеркина для задачи панельного флаттера прямоугольной ортотропной пластины.

## 2. Постановка задачи и общее решение

Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластину толщиной  $h$ , занимающую область  $K = \{(x, y) : |x| \leq a, |y| \leq b\}$ , обтекаемую потоком газа в направлении оси  $Ox$ . Упругие свойства материала можно описать при помощи четырех упругих констант: модуля Юнга  $E_1$  вдоль оси  $x$ , модуля сдвига  $G$  и двух коэффициентов Пуассона  $\nu_{12}$  и  $\nu_{21}$ . Предположим также наличие в плоскости пластины сжимающих (растягивающих) сил  $N_x$  и  $N_y$ , направленных вдоль соответствующих координатных осей. В этом случае, как известно [1, 2], уравнение, описывающее прогиб пластины  $W(x, y, t)$  при динамических колебаниях, имеет вид:

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \varepsilon \rho h \frac{\partial W}{\partial t} + P = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность материала;  $\varepsilon$  — коэффициент затухания колебаний;  $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}$ ,

$D_2 = \frac{\nu_{21} E_1 h^3}{12 \nu_{12} (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$ ,  $D_3 = D_{12} + 2D_{66}$ ,  $D_{66} = \frac{G h^3}{12}$ ;  $D_{12} = \nu_{12} D_2$  — жесткости пластины; составляющая

аэродинамического давления  $P$  при сверхзвуковых скоростях может быть представлена, согласно поршневой теории [1], через прогиб пластины:

$$P = \frac{\kappa p_0}{c_0} \left( \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad (2)$$

где  $p_0$ ,  $c_0$  — давление и скорость звука в невозмущенном потоке,  $\kappa$  — показатель политропы газа,  $U$  — скорость потока.

Пусть амплитудное значение прогиба есть  $w(x, y)$ , то есть  $W = w e^{i\sigma t}$ , тогда в случае защемленных краев пластины из (1), (2) получим следующую задачу на собственные значения:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + U_0 D_1 \frac{\partial w}{\partial x} = \lambda D_1 w, \quad (3)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a, \quad (4)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b, \quad (5)$$

где  $\sigma$  — параметр, отвечающий за частоту колебаний,  $U_0 = \frac{\kappa a^3 p_0}{c_0 D_1} U$  — параметр скорости (данный

параметр используется в [1]),  $\lambda = -\frac{\rho h}{D_1}\sigma^2 - \left(\frac{\varepsilon \rho h}{D_1} + \frac{\kappa p_0}{D_1 c_0}\right)\sigma$  — комплексное собственное число краевой задачи (3)–(5).

Решение задачи на собственные значения (3)–(5) позволяет ответить на вопрос о динамической устойчивости пластины. Известно, что собственные числа  $\lambda$  этой задачи, в силу несимметричности оператора (3)–(5), являются комплексными. Комплексный вид имеет и параметр  $\sigma$ . Очевидно, что колебания пластины устойчивы при  $\operatorname{Re} \sigma < 0$  и неустойчивы при  $\operatorname{Re} \sigma > 0$ . Для удобства обозначим

$\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}}\sigma$  и  $g = \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}}\varepsilon + \frac{\kappa p_0}{c_0 \sqrt{D_1 \rho h}}$ , тогда критерием устойчивости движения будет условие:

$$\begin{cases} \Omega^2 + g\Omega + \lambda = 0, \\ \operatorname{Re} \Omega < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что краевая задача (3)–(5) достаточно хорошо изучена [3]. В частности известно, что для фиксированного значения скорости потока  $U_0$  число комплексных собственных значений  $\lambda$  конечно; с увеличением параметра скорости  $U_0$  собственные значения  $\lambda$  последовательно переходят в комплексную область.

Для построения решения задачи (3)–(5) используем метод Бубнова–Галеркина в предположении, что известна система  $\{\phi_m(x, y)\}$  — система собственных функций пластины в вакууме, соответствующая собственным частотам  $\{\omega_m\}$ :

$$D_1 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = D_1 \omega^2 \phi, \quad (7)$$

$$\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a, \quad (8)$$

$$\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b. \quad (9)$$

Решение ищется в виде разложения по собственным формам задачи (7)–(9):

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m \phi_m(x, y). \quad (10)$$

Задача (7)–(9) по построению удовлетворяет краевым условиям (4), (5).

Подстановка (10) в дифференциальное уравнение (3), согласно методу Бубнова–Галеркина, с учетом ортогональности собственных форм  $\{\phi_m(x, y)\}$  в области  $K$  приводит к однородной бесконечной системе алгебраических уравнений вида:

$$(\lambda - \omega_m^2) \xi_m = U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_K \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \phi_m dK}{\int_K \phi_m^2 dK} \xi_n \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Определитель данной системы представляет собой дисперсионное уравнение относительно собственных чисел  $\lambda$ . При шарнирном опирании краев пластины, когда удастся явным образом выразить собственные частоты и формы колебаний, в [1] доказывается сходимость данного бесконечного (нормального) определителя. В обсуждаемом случае защемленных краев пластины краевая задача (7)–(9) не имеет явного аналитического решения, в силу чего процесс сходимости метода Бубнова–Галеркина остается открытым.

### 3. Построение собственных форм колебаний ортотропной пластины в вакууме

Для построения общего решения уравнения (7) используем метод, представленный в [20]. Следуя ему, общее решение задачи представим в виде суммы четных и нечетных составляющих по каждой из координат

$$\phi = \phi_{00} + \phi_{01} + \phi_{10} + \phi_{11},$$

где  $\phi_{00}$  является четной по обеим координатам,  $\phi_{01}$  — четная по  $x$  и нечетная по  $y$ , далее — по аналогии.

Разделяя переменные в уравнении (7), получим общее решение в виде суммы рядов

$$\phi_{kj} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n H_j(p_{nk} y) + B_n H_j(\bar{p}_{nk} y)) T_k(\alpha_{nk} x) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n H_k(q_{nj} x) + D_n H_k(\bar{q}_{nj} x)) T_j(\beta_{nj} y), \quad (12)$$

в которых тригонометрические и гиперболические функции зависят от типа симметрии и обозначены как

$$T_j(z) = \begin{cases} \cos z, & j=0, \\ \sin z, & j=1; \end{cases} \quad H_j(z) = \begin{cases} \text{ch } z, & j=0, \\ \text{sh } z, & j=1. \end{cases}$$

Константы разделения выберем в форме, обеспечивающей полноту рядов (12) на границе пластины, в частности такие:

$$\alpha_{nj} = \frac{\pi}{a} \left( n - \frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right), \quad \beta_{nj} = \frac{\pi}{b} \left( n - \frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (13)$$

Величины  $p_{nk}$ ,  $\bar{p}_{nk}$  и  $q_{hj}$ ,  $\bar{q}_{hj}$  являются корнями следующих характеристических уравнений:

$$D_2 p^4 + (N_y - 2D_3 \alpha^2) p^2 + D_1 \alpha^4 - N_x \alpha^2 - D_1 \omega^2 = 0, \quad (14)$$

$$D_1 q^4 + (N_x - 2D_3 \beta^2) q^2 + D_2 \beta^4 - N_y \beta^2 - D_1 \omega^2 = 0, \quad (15)$$

и как корни биквадратных уравнений выражаются аналитически так:

$$p = \sqrt{\frac{2D_3 \alpha^2 - N_y + \sqrt{D_p}}{2D_2}}, \quad \bar{p} = \sqrt{\frac{2D_3 \alpha^2 - N_y - \sqrt{D_p}}{2D_2}}, \quad (16)$$

$$q = \sqrt{\frac{2D_3 \beta^2 - N_x + \sqrt{D_q}}{2D_2}}, \quad \bar{q} = \sqrt{\frac{2D_3 \beta^2 - N_x - \sqrt{D_q}}{2D_2}}. \quad (17)$$

Здесь дискриминанты вычисляются по формулам:

$$D_p = (N_y - 2D_3 \alpha^2)^2 - 4D_2 (D_1 \alpha^4 - N_x \alpha^2 - D_1 \omega^2), \quad (18)$$

$$D_q = (N_x - 2D_3 \beta^2)^2 - 4D_1 (D_2 \beta^4 - N_y \beta^2 - D_1 \omega^2) \quad (19)$$

и являются знакопеременными в зависимости от комбинации параметров задачи и констант разделения  $\alpha_{nk}$ ,  $\beta_{nj}$ . В частности, для первого из уравнений (14) величины (18) могут быть записаны:

– при  $D_p < 0$  как комплексно-сопряженные величины

$$p = \sqrt{\frac{\sqrt{(2D_3 \alpha^2 - N_y)^2 - D_p} + 2D_3 \alpha^2 - N_y}{4D_2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{(2D_3 \alpha^2 - N_y)^2 - D_p} - 2D_3 \alpha^2 + N_y}{4D_2}};$$

– при  $D_p \geq 0$  и  $2D_3 \alpha^2 - N_y < -\sqrt{D_p}$  как пара чисто мнимых значений

$$p = i \sqrt{\frac{N_y - 2D_3 \alpha^2 - \sqrt{D_p}}{4D_2}}; \quad \bar{p} = i \sqrt{\frac{N_y - 2D_3 \alpha^2 + \sqrt{D_p}}{4D_2}};$$

– при  $D_p \geq 0$  и  $-\sqrt{D_p} \leq 2D_3 \alpha^2 - N_y < \sqrt{D_p}$  как вещественное и чисто мнимое значения

$$p = \sqrt{\frac{2D_3\alpha^2 - N_y + \sqrt{D_p}}{4D_2}}; \quad \bar{p} = i\sqrt{\frac{N_y - 2D_3\alpha^2 + \sqrt{D_p}}{4D_2}};$$

– при  $D_p \geq 0$  и  $\sqrt{D_p} \leq 2D_3\alpha^2 - N_y$ , как пара вещественных значений

$$p = \sqrt{\frac{2D_3\alpha^2 - N_y + \sqrt{D_p}}{4D_2}}; \quad \bar{p} = \sqrt{\frac{2D_3\alpha^2 - N_y - \sqrt{D_p}}{4D_2}}.$$

Аналогичные формулы получаются и для  $q_{nj}, \bar{q}_{nj}$ , входящих в уравнение (15).

Относительно величин  $p_{nk}, \bar{p}_{nk}$  и  $q_{nj}, \bar{q}_{nj}$  следует заметить, что согласно теореме Виета для уравнений (14), (15) выражения вида

$$D_1(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2) = D_2(\beta_{mj}^2 + p_{nk}^2)(\beta_{mj}^2 + \bar{p}_{nk}^2) = D_1\alpha_{nk}^4 + 2D_3\alpha_{nk}^2\beta_{mj}^2 + D_2\beta_{mj}^4 - D_1\omega^2 \quad (20)$$

обязательно являются действительными. Таким образом, общее решение (12) тождественно удовлетворяет разрешающему уравнению (7) и обладает достаточной полнотой для выполнения любых граничных условий.

Выбор констант разделения в форме (13) для любого типа симметрии приводит к тождеству:

$$T_k(\alpha_{nk}a) = T_j(\beta_{nj}b) = 0.$$

В случае защемленных краев пластины это позволяет выполнить краевые условия (8), (9) для функции прогиба  $\phi(x, y)$  тождественно при условии, что неопределенные коэффициенты в общем решении связаны соотношениями:

$$C_n = -D_n \frac{H_k(\bar{q}_{nj}a)}{H_k(q_{nj}a)}; \quad A_n = -B_n \frac{H_j(\bar{p}_{nk}b)}{H_j(p_{nk}b)}. \quad (21)$$

Подстановка (21) в оставшиеся краевые условия, налагаемые на углы поворота, дает равенства:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi_{kj}}{\partial x} \right|_{x=a} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n H_j(\bar{p}_{nk}b) \alpha_{nk} \left( \frac{H_j(\bar{p}_{nk}y)}{H_j(\bar{p}_{nk}b)} - \frac{H_j(p_{nk}y)}{H_j(p_{nk}b)} \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} D_n H_k(\bar{q}_{nj}a) \left( \bar{q}_{nj} \frac{H'_k(\bar{q}_{nj}a)}{H_k(\bar{q}_{nj}a)} - q_{nj} \frac{H'_k(q_{nj}a)}{H_k(q_{nj}a)} \right) T_j(\beta_{nj}y) = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi_{kj}}{\partial y} \right|_{y=b} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n H_j(\bar{p}_{nk}b) \left( \bar{p}_{nk} \frac{H'_j(\bar{p}_{nk}b)}{H_j(\bar{p}_{nk}b)} - p_{nk} \frac{H'_j(p_{nk}b)}{H_j(p_{nk}b)} \right) T_k(\alpha_{nk}x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n D_n H_k(\bar{q}_{nj}a) \beta_{nj} \left( \frac{H_k(\bar{q}_{nj}x)}{H_k(\bar{q}_{nj}a)} - \frac{H_k(q_{nj}x)}{H_k(q_{nj}a)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Для определения последовательностей коэффициентов Фурье  $B_n$  и  $D_n$  используем разложения гиперболических функций, входящих в равенства (22), (23), по системам тригонометрических функций.

При этом похожесть разложений —  $\text{ch } z$  по системе  $\cos \frac{\pi(2n-1)}{2h}z$  и  $\text{sh } z$  по системе  $\sin \frac{\pi n z}{h}$  — на отрезке  $z \in [-h; h]$  дает возможность записать их одновременно для всех четырех случаев симметрии :

$$\frac{H_j(\bar{p}_{nk}y)}{H_j(\bar{p}_{nk}b)} - \frac{H_j(p_{nk}y)}{H_j(p_{nk}b)} = \frac{2(\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \beta_{mj} T_j(\beta_{mj}y)}{(\beta_{mj}^2 + \bar{p}_{nk}^2)(\beta_{mj}^2 + p_{nk}^2)}, \quad (24)$$

$$\frac{H_k(\bar{q}_{nj}x)}{H_k(\bar{q}_{nj}a)} - \frac{H_k(q_{nj}x)}{H_k(q_{nj}a)} = \frac{2(\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha_{mk} T_k(\alpha_{mk}x)}{(\alpha_{mk}^2 + \bar{q}_{nj}^2)(\alpha_{mk}^2 + q_{nj}^2)}. \quad (25)$$

Подстановка разложений (24) и (25) в равенства (22), (23) приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений следующего вида

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} Z_n \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (26)$$

относительно неизвестных

$$Z_{2m-1} = \frac{D_1}{a} (-1)^m D_m H_k(\bar{q}_{mj} a) (\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2), \quad Z_{2m} = \frac{\sqrt[4]{D_1 D_2^3}}{b} (-1)^{m+1} B_m H_j(\bar{p}_{mk} b) (\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2),$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} M_{2m-1, 2n-1} &= 0, & M_{2m-1, 2n} &= \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_1}} \frac{2}{\Delta_{1,m}} \frac{\alpha_{nk}}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)}, \\ M_{2m, 2n-1} &= \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}} \frac{2}{\Delta_{2,m}} \frac{\beta_{nj}}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)}, & M_{2m, 2n} &= 0, \\ \Delta_{1,m} &= \frac{a}{\beta_{mj}(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} \left( \bar{q}_{mj} \frac{H'_k(\bar{q}_{mj} a)}{H_k(\bar{q}_{mj} a)} - q_{mj} \frac{H'_k(q_{mj} a)}{H_k(q_{mj} a)} \right), \\ \Delta_{2,m} &= \frac{b}{\alpha_{mk}(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)} \left( \bar{p}_{mk} \frac{H'_j(\bar{p}_{mk} b)}{H_j(\bar{p}_{mk} b)} - p_{mk} \frac{H'_j(p_{mk} b)}{H_j(p_{mk} b)} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что если сумма модулей коэффициентов

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}| \leq \theta < 1$$

для любой строки системы меньше единицы, то систему называют вполне регулярной [21]. При выполнении указанного условия начиная с некоторого номера  $m > N_R$  бесконечная система считается квазирегулярной. Для вполне регулярных систем гарантируется также единственность ограниченного решения.

Очевидно, что полученная система (26) не может быть вполне регулярной во всем диапазоне частот, так как в силу ее однородности это привело бы к наличию только нулевого (тривиального) решения. Проведенный в [20] детальный асимптотический анализ показал, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}| = \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (27)$$

то есть система (26) является квазирегулярной. Там же представлен новый эффективный алгоритм определения собственных частот колебаний пластины, базирующийся на анализе регулярности системы.

Найдем асимптотику нетривиального ограниченного решения системы (26), соответствующего некоторой собственной частоте колебаний  $\omega_n$ . Пусть условия регулярности для исследуемой системы начинают выполняться с номера  $N_R$ . Сделаем замену:

$$Z_m = \sum_{l=1}^{N_R} \chi_m^l Z_l \quad (m > N_R), \quad (28)$$

в результате бесконечная система (26) приводится относительно  $\{\chi_m^l\}_{m=N_R+1}^{\infty}$  ( $l = 1, 2, \dots, N_R$ ) к совокупности вполне регулярных бесконечных систем с одинаковой матрицей:

$$\chi_m^l = \sum_{n=N_R+1}^{\infty} M_{mn} \chi_n^l + M_{ml} \quad (m = N_R + 1, N_R + 2, \dots). \quad (29)$$

Так как  $\theta$  в (27) строго меньше единицы, то из ограниченности  $M_{ml}$ , выступающих в роли свободных членов в (29), следует, что каждая из этих систем имеет единственное ограниченное решение. Таким образом, вопрос о существовании ограниченного решения для исходной квазирегулярной системы (26) сводится к вопросу существования решения системы относительно первых неизвестных  $\{Z_m\}_{m=1}^{N_R}$ :

$$Z_m = \sum_{n=1}^{N_R} Q_{mn}^C Z_n \quad (m = 1, 2, \dots, N_R), \quad (30)$$

где  $Q_{mn}^C = M_{mn} + \sum_{l=N_R+1}^{\infty} M_{ml} \chi_l^n$ .

Равенство нулю определителя конечной системы (30) также дает дисперсионное уравнение для отыскания собственных частот пластины:

$$\det \|\delta_{mn} - Q_{mn}^C\| = 0. \quad (31)$$

Найдем аналитически асимптотику решений систем (29). С этой целью проведем замену переменных вида

$$\chi_{2m-1}^l = D_1^{1/4} \beta_{mj}^{-1} y_m^l, \quad \chi_{2m}^l = D_2^{1/4} \alpha_{mk}^{-1} x_m^l. \quad (32)$$

Тогда преобразованные системы (29) принимают вид

$$\begin{aligned} y_m^l &= \frac{2\beta_{mj}}{\Delta_{1,m}} \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \frac{x_n^l}{(\alpha_{nk}^2 + q_{nj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} + \frac{M_{2m-1,l} \beta_{mj}}{D_1^{1/4}}, \\ x_m^l &= \frac{2\alpha_{mk}}{\Delta_{2,m}} \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \frac{y_n^l}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} + \frac{M_{2m,l} \alpha_{mk}}{D_2^{1/4}} \end{aligned} \quad (2N_r = N_R; \quad m = N_r + 1, N_r + 2, \dots) \quad (33)$$

и удовлетворяют обобщению закона асимптотических выражений Б.М. Кояловича [22], согласно которому существует общий предел у единственного ограниченного решения каждой из систем (29):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_m^l = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m^l = K_l > 0. \quad (34)$$

Таким образом, в соответствии с формулами замены (28), (32), для нетривиального решения однородной квазирегулярной бесконечной системы (26) выполняется следующий асимптотический закон:

$$Z_{2m-1} = \frac{Z_{\infty} D_1^{1/4}}{\beta_{mj}}, \quad Z_{2m} = \frac{Z_{\infty} D_2^{1/4}}{\alpha_{mk}} \quad (m \rightarrow \infty). \quad (35)$$

Известное асимптотическое поведение неизвестных  $Z_m$  позволяет найти их при помощи метода улучшенной редукции и построить собственные формы колебаний пластины с защемленными краями с любой требуемой точностью в форме:

$$\begin{aligned} \phi_{kj} &= \frac{b}{\sqrt[4]{D_1 D_2^3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} Z_{2n}}{\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2} \left( \frac{H_j(\bar{p}_{nk} y)}{H_j(\bar{p}_{nk} b)} - \frac{H_j(p_{nk} y)}{H_j(p_{nk} b)} \right) T_k(\alpha_{nk} x) + \\ &+ \frac{a}{D_x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n Z_{2n-1}}{\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2} \left( \frac{H_k(\bar{q}_{nj} x)}{H_k(\bar{q}_{nj} a)} - \frac{H_k(q_{nj} x)}{H_k(q_{nj} a)} \right) T_j(\beta_{nj} y). \end{aligned} \quad (36)$$

В качестве иллюстрации на рисунке 1 представлены нормированные в пространстве  $L_2$  собственные формы колебаний удлиненной ( $b/a = 5$ ) ортотропной пластины с параметрами  $D_1/D_2 = 3$ ,  $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$ ,  $N_x = N_y = 0$ .

Как известно, динамический краевой эффект имеет место лишь вблизи границ пластины, поэтому основную часть собственной формы вдали от границы можно представить в виде произведения

тригонометрических функций. Эта идея лежит в основе асимптотического метода, и в принятых обозначениях порождающее решение имеет вид:

$$\phi_{mn}^0 = T_j(\gamma_{1m}x)T_k(\gamma_{2n}y), \quad (37)$$

где  $\gamma_{1m}$ ,  $\gamma_{2n}$  — волновые числа, соответственно, в направлении осей  $x$ ,  $y$ . Формулой (37) могут быть описаны практически все собственные формы, показанные на рисунке 1. Исключение составляет 15-я мода, при которой краевые эффекты сказываются существенно. Таким образом, для удлиненных пластин влияние краевого эффекта может приводить к искажению порождающего решения.

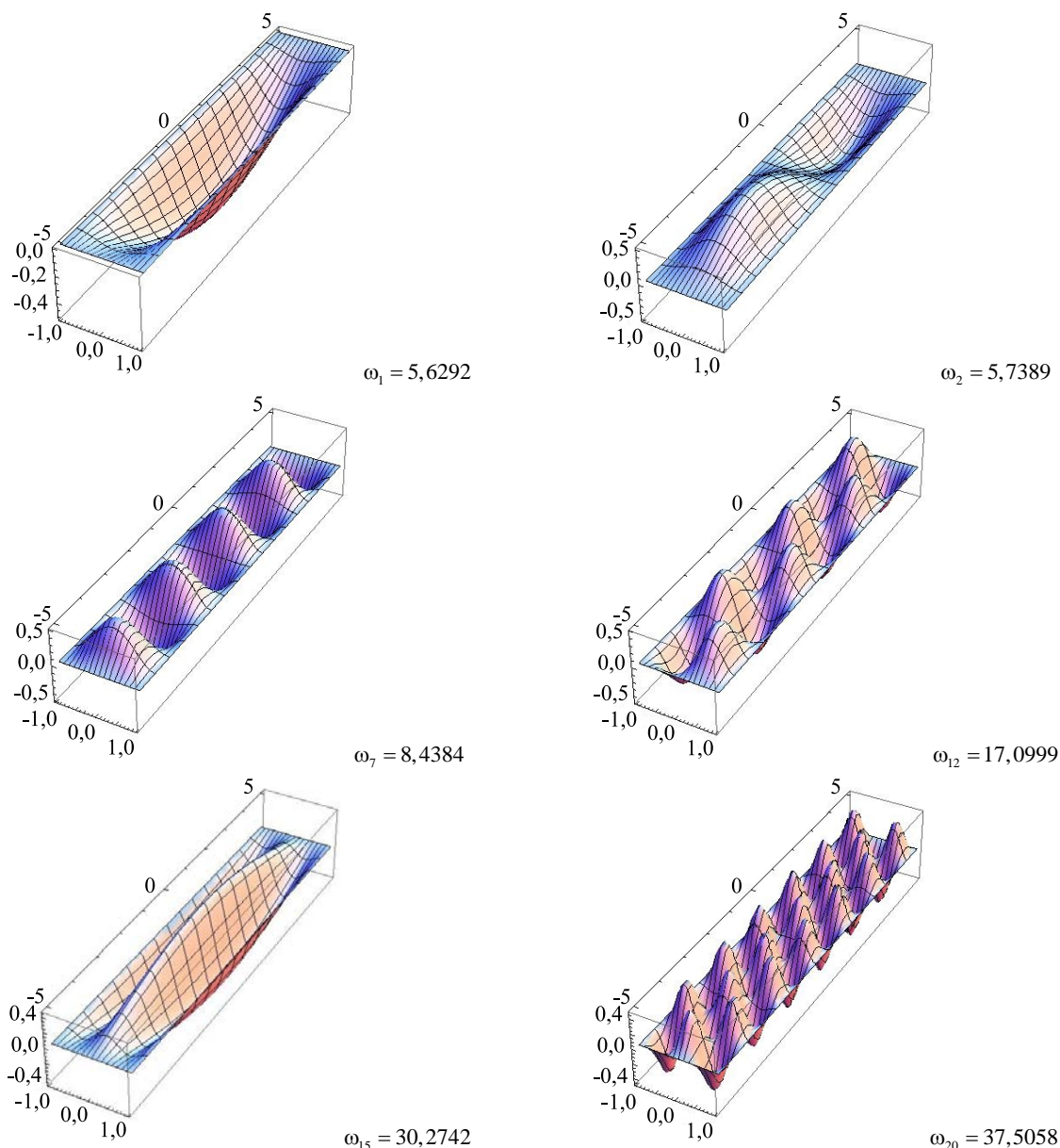


Рис. 1. Собственные формы колебаний прямоугольной пластины ( $b/a=5$ ) с параметрами:  $D_1/D_2=3$ ,  $D_3=\sqrt{D_1D_2}$ ,  $N_x=N_y=0$

#### 4. Сходимость метода Бубнова–Галеркина. Особенности вычислительной процедуры

Прежде всего заметим, что построенные собственные формы колебаний пластины в вакууме (36) по четности относительно координатных осей разделяются на четыре типа. При этом интеграл в методе Бубнова–Галеркина  $\int_K \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \phi_m dK$  отличен от нуля лишь в случае, когда четность обоих сомножителей под знаком интеграла совпадает. Таким образом, для ненулевого значения интеграла собственная форма



$\phi_m$  является четной по  $x$ , а  $\phi_n$  — нечетная, и наоборот. Это приводит к разреженности матрицы системы (11). Если провести редукцию системы (11) и удержать в расчетах  $N$  первых собственных форм, задачу об определении  $\lambda$ , при условии, что собственные формы предварительно нормированы  $\int_K \phi_m^2 dK = 1$ , можно свести к вычислению собственных значений конечной матрицы  $N$ -го порядка:

$$\Lambda_{mn} = \omega_m^2 \delta_{mn} + U_0 \int_K \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \phi_m dK. \quad (38)$$

Данный подход эквивалентен традиционной процедуре метода Бубнова–Галеркина с записью дисперсионного уравнения в виде определителя, но с вычислительной точки зрения представляется более эффективным.

После отыскания при заданном параметре  $U_0$  собственных значений  $\{\lambda_j\}$  для каждого из них определялись соответствующие корни  $\{\Omega_j^\pm\}$  квадратного уравнения (6), которые затем проверялись на соответствие критерию устойчивости. При последующем вычислении с малым шагом по параметру скорости  $U_0$  и фиксированном порядке матрицы (38) находилось критическое значение параметра скорости  $U_0^{кр}$ , при котором одно из значений  $\{\Omega_j^\pm\}$  становилось чисто комплексным, что свидетельствовало о переходе в область неустойчивого движения.

В таблице 1 представлена информация, по которой можно судить о сходимости метода Бубнова–Галеркина при варьировании параметров задачи. Рассматривалась стальная пластина с упругими характеристиками  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $E = 1,9982 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\nu = 0,3$ , а свойства воздушного потока были следующими:  $p_0 = 1,0126 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $\rho_0 = 1,2928 \text{ кг/м}^3$ ,  $\kappa = 1,4$ . В рассматриваемых примерах предполагалось отсутствие затухания ( $\varepsilon = 0$ ), а при моделировании ортотропных свойств материала считалось, что жесткость  $D_1$  по оси  $Ox$  соответствует стальной пластине, а жесткость  $D_2$  по оси  $Oy$  изменяется некоторым образом, но так, что при этом  $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$ . По данным таблицы можно заключить, что удовлетворительная точность полученных результатов наблюдается уже при  $N \geq 16$ , при этом, в отличие от [19], отношение сторон пластины не влияет на характер сходимости.

Таблица 1. К иллюстрации сходимости метода Бубнова–Галеркина

$N$	$D_1 = D_2$ $N_x = N_y = 0$ $b/a = 1$	$D_1 = 3D_2$ $N_x = N_y = 0$ $b/a = 1$	$D_1 = D_2$ $N_x = N_y = 0,5\pi^2 D_1$ $b/a = 1$	$D_1 = D_2$ $N_x = N_y = 0$ $b/a = 5$
	Значение параметра скорости $U_0$			
8	119,90	98,68	89,05	62,64
12	105,45	102,02	83,87	62,56
16	106,39	93,89	84,31	62,62
20	106,39	93,89	84,31	62,52
24	106,39	93,89	84,31	62,52

На рисунке 2 представлена эволюция собственных значений  $\Omega$  краевой задачи для квадратной изотропной пластины с увеличением параметра скорости  $U_0$ . На рисунке 2а видно, что для защемленной квадратной панели критическая скорость соответствует сближению и слиянию двух первых собственных частот колебаний. Более подробный анализ действительной части  $\text{Re } \Omega_1$  (Рис. 2б) показывает, что вначале происходит ветвление постоянной действительной части при  $U_{\text{доф}} = 105,78$ , и только после этого одна из ветвей —  $\text{Re } \Omega_1^+$ , становится положительной. Приведенная картина согласуется с результатами работы [23], где было предложено различать две критических скорости: первую — дофлаттерную, при которой движение панели заключается в переходе стоячих волн в бегущие с ограниченной амплитудой, и вторую — флаттерную — критическую скорость, при которой амплитуды бегущих волн начинают возрастать во времени. Из представленных данных следует, что обе критических скорости для защемленной панели отличаются незначительно, менее чем на 1%, однако отождествлять их не следует, как это делается, например, в работе [24].

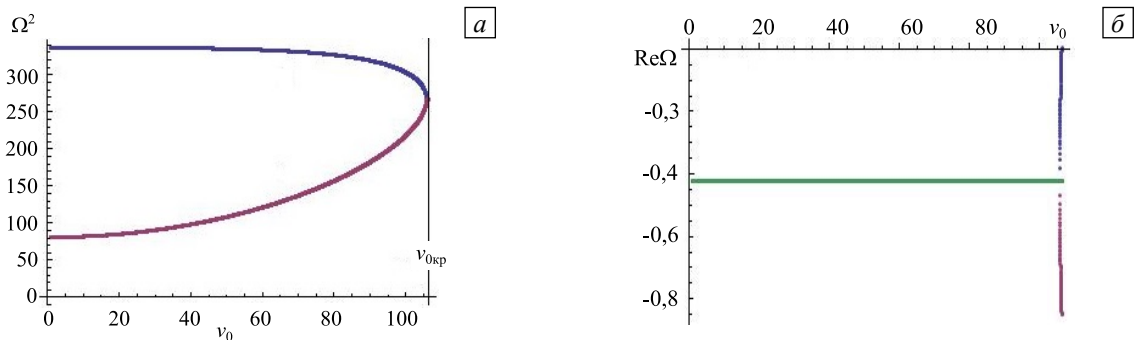


Рис. 2. Слияние первых двух частот квадратной изотропной пластины (а) и действительная часть  $\text{Re } \Omega_1$  в увеличенном по частоте масштабе (б)

Похожая картина наблюдается у собственных частот удлиненной панели  $b/a = 5$ . Здесь флаттер достигается благодаря слиянию 6-й и 7-й собственных частот (Рис. 3а). В данном случае дофлаттерная критическая скорость составляет  $U_{\text{доф}} = 62,33$ , в то время как  $U_0^{\text{сп}} = 62,52$ , то есть отличие здесь еще менее заметное.

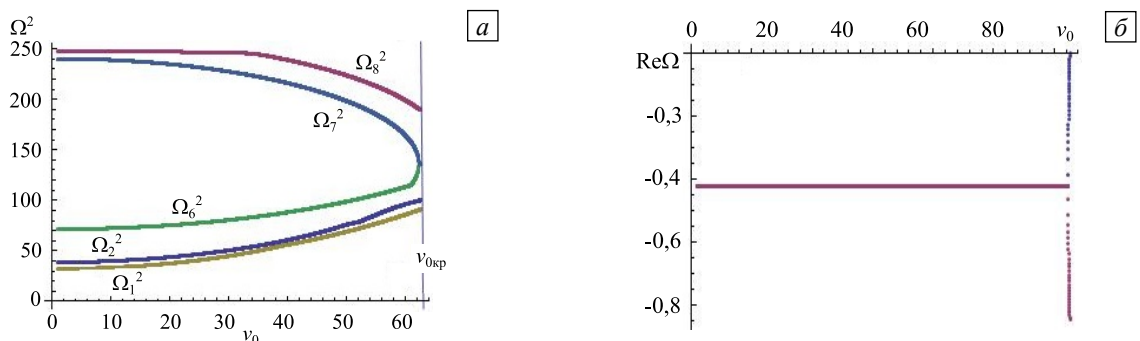


Рис. 3. Слияние первых двух частот для удлиненной изотропной пластины (а)  $b/a = 5$  и действительная часть  $\text{Re } \Omega_1$  в увеличенном по частоте масштабе (б)

## 5. Численные результаты

Для верификации авторского подхода проведем сравнение полученных значений критического давления для квадратной изотропной пластины

$$\bar{\lambda}_{\text{кр}} = \frac{\rho_0 a^3 U^2}{D \sqrt{M^2 - 1}},$$

где  $M$  — число Маха,  $D$  — жесткость пластины, с результатами из [25]. Данные для сопоставления содержит таблица 2. Из таблицы видно, что расчеты по представленному методу дают результаты, близкие к рассчитанным методом конечных элементов и удовлетворительно совпадают с данными по методу Рэлея–Ритца в 16-членном приближении.

Таблица 2. К сравнению авторских результатов с известными из [25] данными

Результат получен	Использованный метод расчета	$\bar{\lambda}_{\text{кр}}$
Durvasula	метод Рэлея–Ритца, 16 членов, балочные функции	838
Kornecki	метод Галеркина 4 члена, функции Iguchi	616
Sabderr	МКЭ	880
Авторами данной статьи	метод Бубнова–Галеркина	883

В следующей таблице 3 приводятся данные для сравнения величин критической скорости квадратной пластины, движущейся в воздушном потоке, в зависимости от ее толщины  $h$  при двух типах граничных условий. Для шарнирно опертой пластины (SSSS) значения критической скорости  $v = U/c_0$  взяты из [17], для жестко защемленной пластины (CCCC) вычислялись на основе представляемого алгоритма. Как и ожидалось, критическая скорость защемленной пластины существенно выше по сравнению со скоростью свободно опертой пластины. С увеличением толщины пластины критическая скорость также растет.

Таблица 3. Критическая скорость  $v$  свободно опертой и защемленной квадратной пластин в зависимости от толщины пластины

$h$	SSSS [17]	CCCC (авторский результат)
	Значения скорости $v$	
0,0050	1,0615	1,7327
0,0063	2,0991	3,4351
0,0072	3,1324	5,1578
0,0079	4,1523	6,8417
0,0085	5,1805	8,5419

Рассмотрим результаты расчетов для защемленной пластины, выполненные при тех же значениях механических параметров, которые содержит таблица 1. Варьировались относительный размер  $b/a$ , усилия в плоскости пластины  $N_x$  и  $N_y$ , свойства материала и параметр скорости  $U_0$ . В таблице 4 представлены данные тестовых расчетов для изотропной стальной квадратной пластины при различной планарной нагрузке.

Таблица 4. Различные случаи планарной нагрузки для стальной пластины

$N_x$	$N_y$	$U_0$
0	0	106,39
$0,5\pi^2 D_1$	$0,5\pi^2 D_1$	84,31
$-0,5\pi^2 D_1$	$-0,5\pi^2 D_1$	130,06
0	$\pi^2 D_1$	106,34

Соответствующие формы потери устойчивости для изотропных панелей при отсутствии планарных нагрузок показаны на рисунке 4. Заметим, что анализ собственных форм позволил установить, что планарные нагрузки влияют на форму потери устойчивости незначительно.

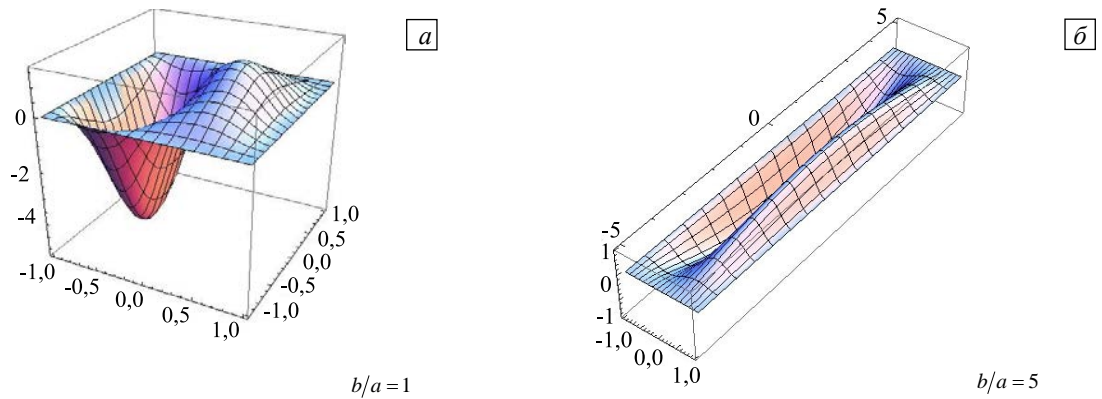


Рис. 4. Собственные формы потери динамической устойчивости короткой (а) и длинной (б) пластин

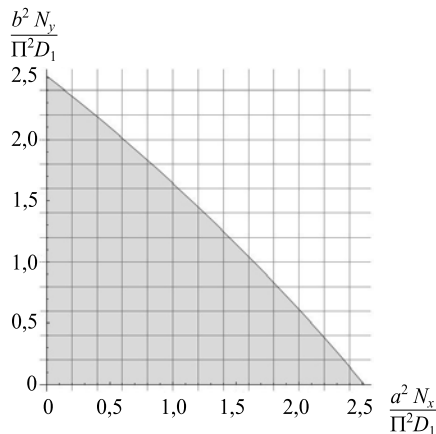


Рис. 5. Зона статической устойчивости изотропной пластины (серый цвет)

Заметим, что величины планарных усилий выбрались таким образом, чтобы защемленная пластина оставалась в зоне статической устойчивости (Рис. 5). Представленные данные свидетельствуют, что растяжение дает большее значение критического параметра. При этом форма потери устойчивости остается практически неизменной.

Для анализа влияния планарных нагрузок на потерю устойчивости ортотропной панели рассматривалась квадратная пластина с параметром жесткости  $D_1$ , соответствующим стальной пластине, другие жесткости составляли:  $D_2 = D_1/3$ ,  $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$ . В таблице 5 приведены критические значения параметра  $U_0^{кр}$  для квадратной пластины при различных случаях планарной нагрузки.

Таблица 5. Различные случаи планарной нагрузки для ортотропной пластины

№ пп	$N_x$	$N_y$	Критическое значение параметра скорости $U_0^{кр}$
1	0	0	93,89
2	$0,5\pi^2 D_1$	$0,5\pi^2 D_1$	73,40
3	$-0,5\pi^2 D_1$	$-0,5\pi^2 D_1$	116,01
4	$\pi^2 D_1$	0	53,11
5	0	$\pi^2 D_1$	80,07

По данным таблицы 5 сжатие ортотропной пластины в направлении движения газа (см. варианты нагрузки № 2, 4) приводит к уменьшению критической скорости, растяжение в перпендикулярном направлении (№ 3) дает увеличение критической скорости. Также можно видеть, что сжатие в направлении, перпендикулярном движению, незначительно, но снижает значение критической скорости (№ 5). В работе же [25] отмечается, что планарные нагрузки в направлении, перпендикулярном движению, на критическую скорость не влияют.

## 6. Выводы

Описанный в статье алгоритм позволяет изучать динамическую устойчивость прямоугольных ортотропных пластин на основе метода Бубнова–Галеркина. При исследовании сходимости метода установлено, что сходимость обеспечивается при  $N \geq 16$ , при этом необходимо брать не менее четырех первых базисных функций в каждом из направлений симметрии. Сходимость метода и точность полученных результатов во многом зависят от точности построения собственных форм колебаний пластины в вакууме. В представлении (36) выявлены нормированные собственные формы, более чувствительные к погрешности. Так, для них погрешность в определении собственной частоты в 0,5% может приводить к 100% погрешности в выполнении граничных условий, что соответственно искажает коэффициенты матрицы для метода Бубнова–Галеркина. Этот факт требует вычисления собственных частот и форм пластины в вакууме с избыточной точностью, что позволяет избегать погрешности при применении метода Бубнова–Галеркина в данном базисе.

Результаты расчетов показывают существование следующих качественных зависимостей:

- равномерно сжимающие нагрузки на пластину вызывают уменьшение критического значения параметра скорости, динамическая неустойчивость наступает на более медленных скоростях;
- нагрузки, сжимающие пластину только в направлении, перпендикулярном движению, приводят к значительно более медленному по сравнению с равномерно нагруженной пластиной снижению критического значения параметра скорости;
- растягивающие пластину нагрузки влекут за собой рост критического значения параметра скорости;
- форма потери квадратной пластиной динамической устойчивости мало меняется при варьировании параметров;
- увеличение размера пластины в направлении, перпендикулярном потоку, а также уменьшение ее жесткости в данном направлении сопровождаются уменьшением критической скорости.

Обнаружено также, что для удлиненной панели флаттер может достигаться не обязательно на первых модах, так в тестовом примере критической является 6-я мода.

Представленный подход можно легко обобщить на случай произвольного направления вектора скорости относительно сторон пластины и использовать как основу для более детального анализа флаттера прямоугольной пластины в зависимости от упругих свойств ее материала.

## Литература

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 340 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
3. Куйко И.А., Алгазин С.Д. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука, 2006. – 248 с.
4. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об одной задаче динамической устойчивости прямоугольной пластины в сверхзвуковом потоке газа // Доклады НАН РА. – 2014. – Т. 114, № 3. – С. 213-221.
5. Селезов И.Т. О взаимодействии упругой пластины с потоком сжимаемого газа // Авиационно-космическая техника и технология. – 2012. – № 5(92). – С. 71-74.
6. Веденев В.В. Нелинейный высокочастотный флаттер пластины // МЖГ. – 2007. – Т. 42, № 5. – С. 197-208. (English version DOI).
7. Веденев В.В. Численное исследование сверхзвукового флаттера пластины с использованием точной аэродинамической теории // МЖГ. – 2009. – № 2. – С. 169-178. (English version DOI).
8. Vedenev V.V., Guvernuyk S.V., Zubkov A.F., Kolotnikov M.E. Experimental observation of single mode panel flutter in supersonic gas flow // J. Fluid. Struct. – 2010. – Vol. 26, no. 5. – P. 764-779. DOI

9. Кандидов В.П., Чесноков С.С. Метод конечных элементов в задачах флаттера треугольных и трапециевидных пластин // Ученые записки ЦАГИ. – 1977. – Т. VIII, № 2. – С. 137-141.
10. Нгуен Ван Чьонг. Влияние поперечной нагрузки на сверхзвуковой флаттер защемленной прямоугольной пластинки // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2014. – № 3. – С. 98-102.
11. Zafer K., Zahit M. Flutter analysis of a laminated composite plate with temperature dependent material properties // Int. J. Aeronautics Aerospace Res. – 2016. – Vol. 3, no. 3. – P. 106-114. DOI
12. Dowell E.H., Ventres C.S. Comparison of theory and experiment for nonlinear flutter of loaded plates // AIAA J. – 1970. – Vol. 8, no. 11. – P. 2022-2030. DOI
13. Fung Y.C. Some recent contributions to panel flutter research // AIAA J. – Vol. 1, no. 4. – P. 898-909. DOI
14. Dowell E.H. Panel flutter: A review of the aeroelastic stability of plates and shells // AIAA J. – 1970. – Vol. 8, no. 3. – P. 385-399. DOI
15. Dowell E.H., Voss H.M. Theoretical and experimental panel flutter studies in the Mach number range 1.0 to 5.0 // AIAA J. – 1965. – Vol. 3, no. 12. – P. 2292-2304. DOI
16. Xue D.Y., Mei C. Finite element nonlinear panel flutter with arbitrary temperatures in supersonic flow // AIAA J. – 1993. – Vol. 31, no. 1. – P. 154-162. DOI
17. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Численное исследование флаттера прямоугольной пластины // ПМТФ. – 2003. – Т. 44, № 4. – С. 35-42.
18. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер пластины переменной толщины // Известия МГТУ МАМИ. – 2012. – № 1. – С. 249-255.
19. Валяев В.И. Об определении границы панельного флаттера вертикальной стенки топливного бака методом заданных форм // Ученые записки ЦАГИ. – 1983. – Т. XIV, № 5. – С. 114-118.
20. Parkov S.O., Banerjee J.R. A new method for free vibration and bucking analysis of rectangular orthotropic plates // J. Sound Vib. – 2015. – Vol. 339. – P. 342-358. DOI
21. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
22. Папков С.О. Обобщение закона асимптотических выражений Кояловича на случай неотрицательной бесконечной матрицы // Динамические системы. – 2011. – Т. 1, № 2(29). – С. 255-267.
23. Мовчан А.А. Об устойчивости панелей, движущихся в газе // ПИММ. – 1957. – Т. 21, № 2. – С. 231-243.
24. Prakash T., Ganapathi M. Supersonic flutter characteristics of functionally graded flat panels including thermal effects // Compos. Struct. – 2006. – Vol. 72, no. 1. – P. 10-18. DOI
25. Bismarck-Nasr M.N. Finite element analysis of aeroelasticity of plates and shells // Appl. Mech. Rev. – 1992. – Vol. 42, no. 12. – P. 461-482. DOI

## References

1. Bolotin V.V. *Nonconservative problems of the theory of elastic stability*. Oxford, Pergamon Press, 1963. 324 p.
2. Volmir A.S. *Ustoichivost deformiruemykh sistem* [Stability of deformable systems]. Moscow: Nauka, 1967. 984 p.
3. Kiyko I.A., Algazin S.D. *Flutter plastin i obolochek* [Flutter of plates and shells]. Moscow: Nauka, 2006. 248 p.
4. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. *Ob odnoy zadache dinamicheskoy ustoichivosti pryamougol'noy plastiny v sverkhzvukovom potoke gaza* [On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge On a problem of the dynamic stability of a rectangular plate in a supersonic gas flow]. *Reports of the NAS RA*, 2014, vol. 114, no. 3, pp. 213-221.
5. Selezov I.T. *O vzaimodeystvii uprugoy plastiny s potokom szhimaemogo gaza* [On the interaction of an elastic plate with a compressible gas flow]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology], 2012, no. 5(92), pp. 71-74.
6. Vedenev V.V. Nonlinear high-frequency flutter of a plate. *Fluid dynamics*, 2007, vol. 42, no. 5, pp. 858-868. DOI
7. Vedenev V.V. Numerical investigation of supersonic plate flutter using the exact aerodynamic theory. *Fluid dynamics*, 2009, vol. 44, no. 2, pp. 314-321. DOI
8. Vedenev V.V., Guvernyuk S.V., Zubkov A.F., Kolotnikov M.E. Experimental observation of single mode panel flutter in supersonic gas flow. *J. Fluid. Struct.*, 2010, vol. 26, no. 5, pp. 764-779. DOI
9. Kandidov V.P., Chesnokov S.S. *Metod konechnykh elementov v zadachakh flattera treugolnykh i trapetsievdykh plastin* [Finite element method in flutter problems of triangular and trapezoidal plates]. *TsAGI Science Journal*, 1977, vol. VIII, no. 2, pp. 137-141
10. Nguyen Van Truong. Effect of lateral load on supersonic flutter of rectangular clamped plate. *News of the Tula State University. Natural Sciences*, 2014, vol. 3, pp. 98-102.
11. Zafer K., Zahit M. Flutter analysis of a laminated composite plate with temperature dependent material properties. *Int. J. Aeronautics Aerospace Res.*, 2016, vol. 3, no. 3, pp. 106-114. DOI
12. Dowell E.H., Ventres C.S. Comparison of theory and experiment for nonlinear flutter of loaded plates. *AIAA J.*, 1970, vol. 8, no. 11, pp. 2022-2030. DOI
13. Fung Y.C. Some recent contributions to panel flutter research. *AIAA J.*, vol. 1, no. 4, pp. 898-909. DOI
14. Dowell E.H. Panel flutter: A review of the aeroelastic stability of plates and shells. *AIAA J.*, 1970, vol. 8, no. 3, pp. 385-399. DOI
15. Dowell E.H., Voss H.M. Theoretical and experimental panel flutter studies in the Mach number range 1.0 to 5.0. *AIAA J.*, 1965, vol. 3, no. 12, pp. 2292-2304. DOI
16. Xue D.Y., Mei C. Finite element nonlinear panel flutter with arbitrary temperatures in supersonic flow. *AIAA J.*, 1993, vol. 31, no. 1, pp. 154-162. DOI
17. Algazin S.D., Kiyko I.A. *Chislennoe issledovanie flattera pryamougolnoy plastiny* [Numerical study of the flutter of a rectangular plate]. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2003, vol. 44, no. 4, pp. 35-42.
18. Kudryavtsev B.Y. *Flutter plastiny peremennoy tolshchiny* [The flutter of a plate of variable thickness]. *Izvestiya MGTU "MAMI"*, 2012, no. 1, pp. 249-255.

19. Valjaev B.I. Ob opredelenii granitsy panelnogo flattera vertikalnoy stenki toplivnogo baka metodom zadannykh form [On the determination of the panel flutter boundary of the vertical wall of a fuel tank by the method of prescribed mode shapes]. *TsAGI Science Journal*, 1983, vol. XIV, no. 5, pp. 114-118.
20. Papkov S.O., Banerjee J.R. A new method for free vibration and bucking analysis of rectangular orthotropic plates. *J. Sound Vib.*, 2015, vol. 339, pp. 342-358.
21. Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Approximate methods of higher analysis*. Interscience, 1964. 681 p.
22. Papkov S.O. Obobshchenie zakona asimptoticheskikh vyrazheniy Koyalovicha na sluchay neotritsatel'noy beskonechnoy matritsy [A generalization of the Koyalovich law of asymptotic expressions to the case of a nonnegative infinite matrix]. *Dinamicheskie Sistemy* [Dynamical Systems], 2011, vol. 1, no. 2(29), pp. 255-267.
23. Movchan A.A. Ob ustoychivosti paneley, dvizhushchikhsya v gaze [On the stability of panels moving in gas]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – J. Appl. Math. Mech.*, 1957, vol. 21, no. 2, pp. 231-243.
24. Prakash T., Ganapathi M. Supersonic flutter characteristics of functionally graded flat panels including thermal effects. *Compos. Struct.*, 2006, vol. 72, no. 1, pp. 10-18. [DOI](#)
25. Bismarck-Nasr M.N. Finite element analysis of aeroelasticity of plates and shells. *Appl. Mech. Rev.*, 1992, vol. 42, no. 12, pp. 461-482. [DOI](#)

Поступила в редакцию 16.06.2017; опубликована в электронном виде 30.12.2017