

DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.3.26

УДК 539.424

## РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ЦИЛИНДРОВ С ОТВЕРСТИЕМ ПРИ СОВМЕСТНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И НЕЛОКАЛЬНЫХ КРИТЕРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ

М.А. Леган<sup>1,2</sup>, В.А. Блинов<sup>1</sup><sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация<sup>2</sup>Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Российская Федерация

При использовании локальных критериев разрушения обычно предполагается, что разрушение начинается при достижении максимальным эквивалентным напряжением предельного значения хотя бы в одной точке тела. Но в условиях неоднородного напряженного состояния целесообразно применять нелокальные критерии разрушения, которые учитывают неравномерность распределения напряжений и дают более близкие к экспериментальным значениям оценки предельных нагрузок. Составлен алгоритм совместного приложения метода граничных элементов (в варианте метода фиктивных нагрузок) и градиентного критерия разрушения к расчетам на прочность плоских элементов конструкций. Вычисления осуществляются с помощью программы на языке Fortran. Проведено сравнение результатов по предельной нагрузке, установленных численно и аналитически на основе локального критерия максимальных напряжений и нелокальных критериев разрушения (градиентного критерия и критерия Нуизмера), как между собой, так и с экспериментальными данными по разрушению образцов из эбонита. Экспериментально исследовалось хрупкое разрушение эбонитовых цилиндров с отверстием при сжатии их по диаметру. Показано, что нелокальные критерии приводят к более близким к эксперименту значениям предельных нагрузок, чем локальный критерий. Оценки, полученные по локальному критерию максимальных напряжений, существенно ниже экспериментальных. Оценки предельных нагрузок, найденные по критерию Нуизмера, выше аналогичных, определенных по локальному критерию, однако они всё-таки меньше экспериментальных, в то время, как значения предельной нагрузки по градиентному критерию наиболее близки к экспериментальным. Применение нелокальных критериев разрушения при проектировании конструкций с концентраторами напряжений позволит повысить расчетные значения предельных нагрузок.

*Ключевые слова:* хрупкое разрушение, концентрация напряжений, нелокальные критерии разрушения, экспериментальные данные

## STRENGTH CALCULATIONS OF PERFORATED CYLINDERS WITH COMBINED USE OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD AND NON-LOCAL FRACTURE CRITERIA

M.A. Legan<sup>1,2</sup> and V.A. Blinov<sup>1</sup><sup>1</sup>Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation<sup>2</sup>Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation

When using local fracture criteria, it is usually assumed that fracture begins when the maximum equivalent stress reaches the limit value at least at one point in the body. But under conditions of an inhomogeneous stressed state, it is advisable to use nonlocal failure criteria, which take into account the uneven distribution of stresses and give estimates of ultimate loads that are closer to the experimental data. A numerical algorithm for the strength of plane construction elements is constructed using the gradient fracture criterion and the boundary element method (the fictitious stress method). Numerical calculation was carried out with the help of a program written in Fortran. Calculation results obtained using the criterion of maximum stress, gradient fracture criterion; point stress criteria are compared both among themselves and with the experimental data. Results of brittle fracture experiments on hard rubber cylinders with a hole are presented. It is shown that the values of limit loads provided by nonlocal criteria are closer to the experimental values than given by local criterion. The estimates obtained with the help of the local criterion for maximum stresses are substantially lower than the experimental ones. The Nuismer criterion gives higher estimates of ultimate loads compared to the local criterion, but these estimates are still less than the experimental values, while the values of the ultimate load by the gradient criterion are the closest to the experimental results. The use of nonlocal failure criteria in the design of structures with stress concentrators will increase the estimates of ultimate loads.

*Key words:* brittle fracture, stress concentration, non-local fracture criteria, experimental data

### 1. Введение

При использовании классических локальных критериев разрушения обычно предполагается, что разрушение начинается при достижении максимальным эквивалентным напряжением предельного значения хотя бы в одной точке тела. Однако в условиях неоднородного напряженного состояния локальные критерии дают заниженные оценки предельных нагрузок по сравнению с экспериментальными данными. В этом случае целесообразно применять нелокальные критерии разрушения, которые учитывают неоднородность напряженного состояния и дают более близкие к реальным оценки предельных нагрузок.

Для сопоставления параметров, рассчитанных по локальным и нелокальным критериям прочности, с экспериментальными значениями были проведены испытания по хрупкому разрушению путем сжатия по диаметру  $2R$  полых цилиндров с диаметром  $d$  внутреннего отверстия (Рис. 1) [1–5]. Такие испытания показывают более стабильные результаты по сравнению с известным методом раскалывания сплошного

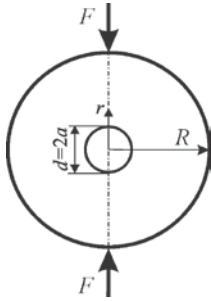


Рис. 1. Схема нагружения путем сжатия по диаметру полого цилиндра

цилиндра при сжатии его по диаметру (называемым «бразильским тестом»). Однако в этом случае напряженное состояние в окрестности точки начала разрушения является резко неоднородным. Это обстоятельство приводит к необходимости прибегать к нелокальным критериям разрушения для оценки уровня разрушающей нагрузки в испытаниях модифицированным бразильским методом.

Найти напряженное состояние цилиндра при его сжатии по диаметру позволяет известное из теории упругости решение [6]. Для цилиндров с центральным круговым отверстием, диаметр которого много меньше диаметра цилиндра, с помощью суперпозиции решений Кирша можно получить формулы, описывающие напряженное состояние в окрестности отверстия. Однако при наличии у цилиндров отверстий и вырезов, размеры которых сопоставимы с размерами цилиндра, оценить напряженное состояние можно только приближенными, в том числе численными методами, например методом граничных элементов [7, 8].

Учитывая хрупкий характер разрушения цилиндра с отверстиями, определить напряженное состояние перед разрушением можно также одним из методов граничных элементов, в частности, известным методом фиктивных нагрузок [9].

В случае использования градиентного критерия разрушения [10, 11], учитывающего неоднородность напряженного состояния, необходимо знать не только компоненты напряженного состояния, но и их производные по пространственным координатам. В этой связи при совместном приложении градиентного критерия и метода граничных элементов возникает проблема, обусловленная тем, что напряжения в окрестности средних точек граничных элементов вычисляются с большой погрешностью [9, 12]. Поэтому успех одновременного применения градиентного критерия и метода граничных элементов заключается в разработке алгоритма, позволяющего с высокой точностью вычислять напряжения во внутренних точках тела, находящихся в окрестности средних точек граничных элементов.

## 2. Нелокальные критерии разрушения

В градиентном критерии для определения нагрузки в момент начала разрушения сравнивается с пределом прочности материала  $\sigma_v$  не максимальное, а эффективное напряжение  $\sigma_e$ . Эффективное напряжение пропорционально в рассматриваемой точке тела максимальному растягивающему напряжению  $\sigma_1$ , которое принимается в качестве эквивалентного. Кроме того,  $\sigma_e$  зависит от локальной

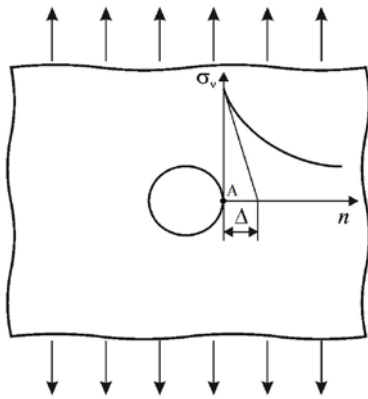


Рис. 2. Условный размер  $\Delta$  зоны концентрации напряжений

неравномерности поля напряжений в окрестности рассматриваемой точки и представительного размера неоднородности материала. Локальная неравномерность распределения напряжений характеризуется относительным градиентом  $g_v = |\text{grad} \sigma_v| / \sigma_v$  положительного нормального напряжения  $\sigma_v$ , действующего на плоскости, включающей площадку первого главного напряжения в рассматриваемой точке тела, где плоскость и площадка имеют общую нормаль  $v$ . Вычисление  $|\text{grad} \sigma_v|$  в некоторых задачах осуществляется проще, чем  $|\text{grad} \sigma_1|$ , использовавшегося ранее [10, 11]. Величиной, обратной относительному градиенту  $g_v$ , является  $\Delta$  — условный размер зоны концентрации напряжений в рассматриваемой точке А (Рис. 2).

Относительный градиент находится в результате решения соответствующей задачи теории упругости. Выражение для эффективного напряжения записывается в виде:

$$\sigma_e = \sigma_1 / \left( 1 - \beta + \sqrt{\beta^2 + L_1 g_v} \right), \tag{1}$$

где  $\beta$  — неотрицательный безразмерный параметр ( $\beta \geq 0$ ), который можно рассматривать как параметр аппроксимации;  $L_1$  — параметр, имеющий размерность длины и характеризующий неоднородность материала. Параметр  $L_1$  находится в [10] из условия согласования градиентного критерия с линейной

механикой разрушения и выражается через известные характеристики материала — предел прочности  $\sigma_b$  и критический коэффициент интенсивности напряжения  $K_{Ic}$  — по формуле:

$$L_1 = (2/\pi) K_{Ic}^2 / \sigma_b^2. \quad (2)$$

Значение параметра аппроксимации устанавливается для конкретного материала исходя из удовлетворительного описания экспериментальных данных по разрушению образцов с концентратором напряжений определенного вида. В последующем оно может быть использовано для элементов конструкций из того же материала с другими концентраторами напряжений.

Будем считать, что разрушение в окрестности рассматриваемой точки начинается при достижении эффективным напряжением  $\sigma_e$  значения предела прочности материала и первоначально распространяется по площадке действия максимального растягивающего напряжения. Дальнейшее направление разрушения может отличаться от первоначального.

В критерии разрушения по напряжению в удаленной точке (критерии Нуизмера) сравнивается с пределом прочности материала  $\sigma_b$  нормальное напряжение  $\sigma_v$  в точке, расположенной на некотором расстоянии  $r_*$  от рассматриваемой точки действия максимального напряжения. Расстояние  $r_*$  находится в [13] из условия согласования с теорией трещин:

$$r_* = \frac{1}{2\pi} K_{Ic}^2 / \sigma_b^2 = \frac{1}{4} L_1. \quad (3)$$

### 3. Численный алгоритм

На основе градиентного критерия и метода граничных элементов (в варианте метода фиктивных нагрузок) был разработан численный алгоритм для расчета на прочность. При этом его характерная особенность состоит в том, что в ходе вычислений необходимо определять не только компоненты напряженного состояния, но и их производные по пространственным координатам.

При использовании метода граничных элементов возникает проблема, связанная с тем, что напряжения во внутренних точках могут быть найдены с удовлетворительной точностью лишь при условии, что эти точки удалены от контура на расстояние, большее длины одного элемента [9]. В связи с этим требовался алгоритм, позволяющий с высокой точностью вычислять напряжения в точках тела, расположенных вблизи границы.

Предлагаемый численный алгоритм определения напряжений вблизи границы тела включает в себя два этапа. На первом этапе находим напряжения  $\sigma_v^i$  в средних точках граничных элементов и производные по касательной к контуру  $\partial\sigma_v^i/\partial s$  в этих точках. На втором этапе в теле на малом расстоянии  $|\Delta_n|$  от граничных элементов основного контура проводим новую эквидистантную гранично-элементную ломаную линию, образующую вспомогательный контур. Используя уравнения равновесия бесконечно малого элемента на контуре тела, получаем приближенно граничные условия для вспомогательного контура через найденные ранее значения напряжений  $\sigma_v^i$  на основном контуре и производных  $\partial\sigma_v^i/\partial s$ . Применяя метод граничных элементов к задаче с заданными граничными условиями на вспомогательном контуре и вычисляя напряжения в центре каждого граничного элемента этого контура, фактически находим напряжения в интересующих внутренних точках исходной задачи, но уже с более высокой степенью точности.

Производные нормального напряжения, необходимые для вычисления модуля градиента, определяем согласно конечно-разностным формулам численного дифференцирования. При этом для вычисления производной  $\partial\sigma_v^i/\partial s$  нормального напряжения по касательной  $s$  к контуру пользуемся трехточечным шаблоном численного дифференцирования с неравными шагами, для производной  $\partial\sigma_v^i/\partial n$  нормального напряжения по нормали  $n$  к контуру — двухточечным шаблоном. Подставляя известные теперь в каждой из средних точек граничных элементов значения  $\sigma_1$  и  $g_v$  в выражение (1) для  $\sigma_e$ , находим точку, где эффективное напряжение максимально, то есть устанавливаем место начала разрушения.

В общем случае кривизна контура концентратора может быть не постоянной, а переменной величиной. Поэтому для выяснения вида граничных условий на вспомогательном контуре воспользуемся дифференциальными уравнениями равновесия из [14] для плоской задачи в произвольной криволинейной ортогональной системе координат  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , а не в цилиндрической как в [15]. Рассмотрим первое из этих уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_{12}) + \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12} - \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22} + H_1 H_2 F_1 = 0. \quad (4)$$

Здесь:  $H_1$ ,  $H_2$  — коэффициенты Ламе, представляющие собой отношения приращений длин координатных линий  $\alpha_2 = \text{const}$  или  $\alpha_1 = \text{const}$  к соответствующим приращениям  $d\alpha_1$  или  $d\alpha_2$  криволинейных координат

$$H_1 = \sqrt{(\partial x / \partial \alpha_1)^2 + (\partial y / \partial \alpha_1)^2}, \\ H_2 = \sqrt{(\partial x / \partial \alpha_2)^2 + (\partial y / \partial \alpha_2)^2},$$

где  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$  — компоненты тензора напряжений,  $F_1$  — проекция объемной силы на координатную линию  $\alpha_1$ .

Возьмем такую систему координат, в которой контур концентратора описывается уравнением  $\alpha_1 = \text{const}$ . Если предположить, что в рассматриваемых задачах объемные силы отсутствуют и на контуре концентратора равны нулю нормальные —  $\sigma_{11}$ , и касательные —  $\sigma_{12}$ , напряжения, то уравнение (4) на свободном контуре запишется в виде:

$$H_2 \frac{\sigma_{11}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22} = 0, \quad (5)$$

где  $\sigma_{22}$  — тангенциальное напряжение.

Пусть при переходе от  $i$ -го граничного элемента контура к следующему приращение параметра  $\alpha_2$  постоянно:  $\Delta \alpha_2 = \text{const}$ . Так как длина элементов  $\Delta s^i = 2a^i$  при этом изменяется, то коэффициент Ламе  $H_2^i = \Delta s^i / \Delta \alpha_2 = 2a^i / \Delta \alpha_2$  у каждого элемента будет своим.

Далее будем считать, что при переходе от основного контура к вспомогательному, построенному по вышеописанной методике, параметр  $\alpha_1$  получает приращение  $\Delta \alpha_1 = \text{const}$ . При этом приращения  $\Delta \alpha_2$  по длине соответствующих элементов двух контуров остаются постоянными. Однако граничные элементы удлиняются на величину  $2\Delta a^i$ , где  $\Delta a^i$  — приращение полудлины  $i$ -го элемента при переходе от основного контура к вспомогательному. Следовательно, параметр  $H_2^i$  увеличивается на  $\Delta H_2^i = 2\Delta a^i / \Delta \alpha_2$ .

Для использования в численном алгоритме запишем производные в уравнении (5) через приращения соответствующих параметров и координат:

$$\left(2a^i / \Delta \alpha_2\right) \frac{\Delta \sigma_{11}}{\Delta \alpha_1} - \frac{(2\Delta a^i / \Delta \alpha_2)}{\Delta \alpha_1} \sigma_{22}^i = 0.$$

Из этого уравнения, учитывая, что  $\Delta \alpha_1 = \text{const}$ ,  $\Delta \alpha_2 = \text{const}$ ,  $\sigma_{11}^i = \sigma_n^i$ , где  $\sigma_n$  — нормальное напряжение на основном контуре, при  $\sigma_{22}^i = \sigma_v^i > 0$  найдем приращение  $\Delta \sigma_n^i$  при переходе к вспомогательному контуру:

$$\Delta \sigma_n^i = \frac{\Delta a^i}{a^i} \sigma_v^i.$$

Так как на основном контуре  $\sigma_n|_1 = 0$ , то окончательно одно из двух граничных условий на вспомогательном контуре примет вид:

$$\sigma_n^i|_2 = \frac{\Delta a^i}{a^i} \sigma_v^i. \quad (6)$$

Заметим, что уравнение (6) совпадает с уравнением, полученным с помощью условий равновесия в полярной системе координат [15].

Для выяснения вида следующего граничного условия рассмотрим второе из двух дифференциальных уравнений равновесия из [14]:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(H_2 \sigma_{12}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(H_1 \sigma_{22}) + \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{12} - \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{11} + H_1 H_2 F_2 = 0, \quad (7)$$

где  $F_2$  — проекция объемной силы на координатную линию  $\alpha_2$ .

Так как в рассматриваемых задачах объемные силы отсутствуют и на контуре концентратора  $\sigma_{11} = 0$ ,  $\sigma_{12} = 0$ , то уравнение (7) на свободном контуре принимает более простой вид:

$$H_2 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{22} + H_1 \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \alpha_2} = 0.$$

Разделив в этом уравнении все члены на  $H_1$  и  $H_2$ , выразим первый член через остальные:

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{22} = 0. \quad (8)$$

Поскольку по определению коэффициенты Ламе  $H_1$  и  $H_2$  представляют собой отношения приращений длин  $\delta n$ ,  $\delta s$  координатных линий к соответствующим приращениям  $\delta \alpha_1$ ,  $\delta \alpha_2$  криволинейных координат, из (8) получим уравнение:

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial n} = -\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial s} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial s} \sigma_{22}. \quad (9)$$

Для использования в численном алгоритме некоторые производные в уравнении (9) перепишем в приращениях:

$$\frac{\Delta \sigma_{12}^i}{\Delta n} = -\frac{\partial \sigma_{22}^i}{\partial s} - \frac{1}{H_1} \frac{\Delta H_1}{\Delta s^i} \sigma_{22}^i. \quad (10)$$

Согласно методике построения вспомогательного контура все его элементы удалены от соответствующих элементов основного контура на одинаковое расстояние  $|\Delta n| = \text{const}$ , то есть он образуется параллельным переносом. Приращение внешней нормали  $\Delta n$  при таком переносе для всех элементов отрицательно:  $\Delta n = -|\Delta n| = \text{const}$ . Параметр  $\alpha_1$  при переходе от основного контура к вспомогательному также изменяется на постоянную величину  $\Delta \alpha_1 = \text{const}$ . Следовательно,  $H_1 = \Delta n / \Delta \alpha_1$  представляет собой константу, и для всех элементов  $\Delta H_1 = 0$ . Тогда последний член в уравнении (10) становится равным нулю, и отсюда, учитывая, что  $\sigma_{12}^i = \sigma_s^i$ , при  $\sigma_{22}^i = \sigma_v^i > 0$  найдем приращение касательного напряжения  $\sigma_s^i$ :

$$\Delta \sigma_s^i = -\frac{\partial \sigma_v^i}{\partial s} \Delta n. \quad (11)$$

Так как  $\Delta n = -|\Delta n|$  и на основном контуре  $\sigma_s|_{\parallel} = 0$ , то окончательно второе граничное условие на вспомогательном контуре запишется в виде:

$$\sigma_s^i|_{\parallel} = \frac{\partial \sigma_v^i}{\partial s} |\Delta n|. \quad (12)$$

Уравнение (12) совпадает с уравнением, полученным с помощью условий равновесия в полярной системе координат [15]. Однако это обеспечивается самой методикой построения вспомогательного контура.

#### 4. Экспериментальные данные и численный анализ

Эксперименты проводились на модельном материале — эбоните. Из прутка эбонита диаметром 61 мм были изготовлены образцы в виде цилиндров радиусом  $R = 28$  мм и толщиной  $t = 20$  мм (см. Рис. 1), а также стандартные цилиндрические образцы с головками для захватов и рабочей частью диаметром 8 мм и длиной 35 мм для испытаний на растяжение. Ось вращения образцов в виде цилиндров совпадала с осью прутка. При испытаниях цилиндрических образцов на разрушение путем сжатия по диаметру между стальными плитами (бразильским методом) разрыв происходил по плоскости, проходящей через ось прутка, а при растяжении цилиндрических образцов с головками — по сечению, параллельному этой плоскости.

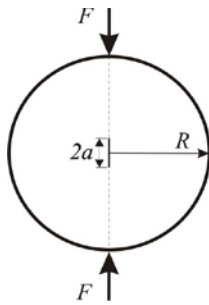


Рис. 3. Сжатие по диаметру цилиндрического образца с разрезом

Испытания четырех стандартных цилиндрических образцов на одноосное растяжение по диаметру прутка дали следующее среднее значение предела прочности:  $\sigma_b = 27,57$  МПа (стандартное отклонение 3,76 МПа). Согласно бразильскому тесту на сжатие цилиндров по диаметру средний по четырем испытаниям условный предел прочности эбонита при растяжении составил:  $\sigma_p = 23,69$  МПа, (стандартное отклонение 2,46 МПа). Таким образом, условный предел прочности эбонита, найденный бразильским методом, оказался на 14% меньше стандартного предела прочности при одноосном растяжении.

По результатам испытаний трех цилиндрических образцов с центральным симметричным разрезом длиной  $2a$  путем сжатия их по диаметру вдоль линии разреза (Рис. 3) для критического коэффициента интенсивности напряжений было получено значение  $K_{Ic} = 1,119$  МПа м<sup>1/2</sup> (стандартное отклонение 0,086 МПа м<sup>1/2</sup>). Для этого использовалась

формула из [16]:  $K_{Ic} = \frac{1,01227 F_*}{t \sqrt{\pi R}} Y(\lambda) \sqrt{\lambda/(1-\lambda)}$ , где  $F_*$  — предельная сила,  $\lambda$  — отношение полудлины

разреза к радиусу цилиндра,  $Y(\lambda) = 1 - 0,60387\lambda + 1,67239\lambda^2 - 1,16988\lambda^3$ . По установленным характеристикам эбонита, в соответствии с (2), найдено значение показателя неоднородности материала:  $L_1 = 1,049$  мм.

Из того же прутка были изготовлены цилиндры с центральными круглыми отверстиями, которые имели диаметр 1,4; 2 и 3 мм, что много меньше диаметра цилиндра, который равнялся 56 мм. Разрушение этих цилиндров осуществлялось путем сжатия их по диаметру между стальными плитами. Усилия сжатия моделировались сосредоточенными силами  $F$  (Рис. 1). Максимальное напряжение достигалось в точках пересечения контура отверстия с линией действия сил.

Численный анализ проводился с помощью программы расчета методом граничных элементов (в варианте метода фиктивных нагрузок) на языке Fortran, взятой из [9] и модифицированной под использование градиентного критерия. Внешний контур цилиндра, подобно контуру отверстия, разбивался на 360 элементов. Силы  $F$  моделировались как нормальное напряжение, приложенные к самому верхнему и самому нижнему граничным элементам.

В таблицах 1 и 2 приведены данные аналитического ( $F_{max}^a$ ) и численного ( $F_{max}^u$ ) расчетов значений предельной нагрузки по градиентному критерию при  $\beta = 0$  и критерию Нуизмера. Для сравнения показаны

Таблица 1. Результаты расчетов по градиентному критерию

Диаметр отверстия, мм	Количество образцов	$\langle F_{max}^g \rangle$ , Н	$F_{max}^a$ , Н	$F_{max}^u$ , Н
1,4	2	25792	27033	26957
2,0	3	23578	23938	23780
3,0	3	22205	21029	20692

Таблица 2. Результаты расчетов по критерию Нуизмера

Диаметр отверстия, мм	Количество образцов	$\langle F_{max}^g \rangle$ , Н	$F_{max}^a$ , Н	$F_{max}^u$ , Н
1,4	2	25792	22548	22423
2,0	3	23578	17728	17555
3,0	3	22205	14162	13886

средние экспериментальные значения  $\langle F_{\max}^{\circ} \rangle$ . Отличие величин параметров в последнем и предпоследнем столбцах таблиц обусловлено двумя факторами: во-первых, аналитическое решение получено для бесконечной области, а численное — для конечной; во-вторых, численное решение имеет погрешность по определению.

В таблице 3 представлены максимальные растягивающие напряжения согласно аналитическому решению задачи ( $\sigma_{\max}^a$ ), численному решению для бесконечной пластины с отверстием ( $\sigma_{\max}^p$ ) и численному решению для цилиндра с отверстием ( $\sigma_{\max}^y$ ), а также эффективные напряжения  $\sigma_e^a$ ,  $\sigma_e^p$ ,  $\sigma_e^y$  при приложении предельной номинальной нагрузки, рассчитанной аналитически по градиентному критерию разрушения. Из сопоставления видно, что для бесконечной пластины численные значения напряжений с точностью до четырех значащих цифр совпадают с найденными аналитически. Для цилиндров же с отверстием увеличение диаметра отверстия приводит к заметному превышению численных значений напряжений над значениями для бесконечной плоскости.

Таблица 3. К анализу значений максимального растягивающего напряжения

$d$ , мм	$\sigma_{\max}^a$ , МПа	$\sigma_{\max}^p$ , МПа	$\sigma_{\max}^y$ , МПа	$\sigma_e^a$ , МПа	$\sigma_e^p$ , МПа	$\sigma_e^y$ , МПа
1,4	92,20	92,20	92,47	27,57	27,57	27,65
2,0	81,64	81,64	82,22	27,57	27,57	27,76
3,0	71,72	71,72	72,95	27,57	27,57	28,02

По численным оценкам построены зависимости предельных нагрузок от диаметра отверстия в цилиндре (Рис. 4). При уменьшении числа элементов в два раза изменения расчетных данных не превысили 0,07% для градиентного критерия, 0,11% — для критерия максимальных напряжений и 0,26% — для критерия Нуизмера. Определение численных оценок предельной нагрузки по критерию максимальных растягивающих напряжений осуществлялось при условии разрушения  $\sigma_v^{\max} = \sigma_b$ . Видно, что оно дает существенно заниженные по сравнению с экспериментальными данными величины разрушающей силы.

Для получения аналитических оценок предельной нагрузки использовалась суперпозиция двух

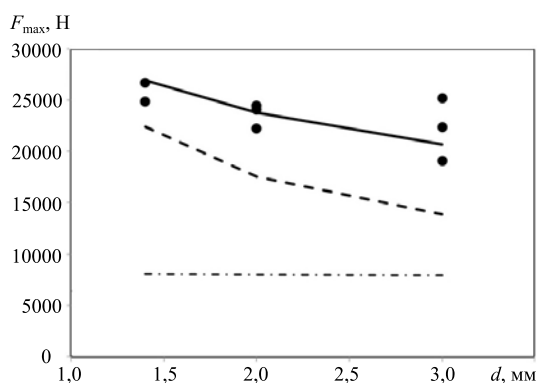


Рис. 4. Зависимости предельных нагрузок от диаметра отверстия: сплошная линия – градиентный критерий при  $\beta = 0$ ; штрихпунктирная линия – критерий максимальных напряжений; штриховая линия – критерий Нуизмера; черные кружки – экспериментальные данные

От точки максимума нормальное напряжение  $\sigma_v$  убывает вдоль линии действия сил по следующей зависимости (ее вывод приведен в [3]):

$$\sigma_v = \sigma \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} + 6 \frac{a^4}{r^4} \right). \quad (13)$$

Здесь  $a$  — радиус отверстия,  $r$  — текущий радиус (см. Рис. 1). На основе (13) получена формула для относительного градиента:  $g_v = 11/(3a)$ , от которого зависит эффективное напряжение. Эта формула

решений Кирша: задачи растяжения и задачи трехкратного сжатия плоскости с круглым отверстием, поскольку в центре сплошного сжатого по диаметру сосредоточенными силами  $F$  цилиндра имеет место растяжение напряжением  $\sigma = F/(\pi R t)$  в направлении, перпендикулярном сжатию, и сжатие напряжением  $-3\sigma$  в направлении действия сил [2–6]. Максимальное напряжение наблюдается в точках пересечения контура отверстия с линией действия сил. Коэффициент концентрации напряжений составляет:  $\alpha = 6$ , то есть отношение максимального напряжения на контуре отверстия к номинальному растягивающему напряжению в центре сплошного сжатого по диаметру цилиндра, равно 6. Тогда по критерию максимальных напряжений предельная нагрузка вычисляется по формуле  $F_{\max} = \sigma_b \pi R t / 6$  и равняется 8084 Н.

использовалась также в [2–5]. После подстановки  $g_v$  в (1) условие разрушения  $\sigma_e = \sigma_b$  дает оценку предельной нагрузки по градиентному критерию.

Согласно критерию Нуизмера нормальное напряжение  $\sigma_v$  вычисляется на расстоянии  $r_*$  от точки пересечения контура отверстия с линией действия сил

$$\sigma_v = \sigma \left( 1 - \frac{a^2}{(a+r_*)^2} + 6 \frac{a^4}{(a+r_*)^4} \right). \quad (14)$$

Условие разрушения  $\sigma_v = \sigma_b$  при  $r = a + r_*$  на линии действия сил делает возможной оценку предельной нагрузки по критерию Нуизмера.

## 5. Заключение

Для совместного применения градиентного критерия разрушения и метода граничных элементов в варианте метода фиктивных нагрузок разработан алгоритм, позволяющий с высокой точностью вычислять модуль градиента принятого эквивалентного напряжения. С помощью этого алгоритма достигнута достаточная для практических целей точность вычисления эффективного напряжения в градиентном критерии разрушения.

Проведено сравнение результатов расчетов по различным критериям прочности с экспериментальными данными по разрушению полых эбонитовых цилиндров при сжатии их по диаметру. Установлено, что локальный критерий максимальных напряжений дает существенно заниженные оценки разрушающей силы по сравнению с экспериментальными данными, полученными при хрупком разрушении образцов с концентраторами напряжений. Критерий Нуизмера приводит к более высоким значениям предельных нагрузок по сравнению с локальным критерием, однако они всё-таки меньше экспериментальных значений, в то время как величины предельной нагрузки по градиентному критерию наиболее близки к найденным экспериментальным путем.

Применение нелокальных критериев разрушения при проектировании конструкций с концентраторами напряжений позволит повысить при оценке их прочности уровень предельных нагрузок в том случае, когда размер зоны неоднородности напряженного состояния сравним с характерным размером неоднородности материала.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-07631-а, 16-08-00713-а), также гранта Правительства Российской Федерации № 14.W03.31.0002.

## Литература

1. Mellor M., Hawkes I. Measurement of tensile strength by diametral compression of discs and annuli // Eng. Geol. – 1971. – Vol. 5, no. 3. – P. 173-225. DOI
2. Ефимов В.П. Применение градиентного подхода к определению прочности горных пород на растяжение // ФТПРПИ. – 2002. – № 5. – С. 49-53. (English version DOI).
3. Леган М.А. Хрупкое разрушение элементов конструкций с концентраторами напряжений // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2013. – Т. 13, № 3. – С. 70-76.
4. Ефимов В.П. Испытания горных пород в неоднородных полях растягивающих напряжений // ПМТФ. – 2013. – Т. 54, № 5. – С. 199-209. (English version DOI).
5. Ефимов В.П. Определение прочности горных пород на растяжение по результатам испытаний дисковых образцов с центральным отверстием // ФТПРПИ. – 2016. – № 5. – С. 54-60. (English version DOI).
6. Фрохт М.М. Фотоупругость. Поляриционно-оптический метод исследования напряжений: в 2-х томах / Под ред. проф. Н.И. Пригоровского. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – Т. 2. – 488 с.
7. Chen C.-S., Pan E., Amadei B. Fracture mechanics analysis of cracked discs of anisotropic rock using the boundary element method // Int. J. Rock Mech. Min. – 1998. – Vol. 35, no. 2. – P. 195-218. DOI
8. Ke C.-C., Chen C.-S., Tu C.-H. Determination of fracture toughness of anisotropic rocks by boundary element method // Rock Mech. Rock Eng. – 2008. – Vol. 41, no. 4. – P. 509-538. DOI
9. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
10. Леган М.А. О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения // ПМТФ. – 1993. – Т. 34, № 4. – С. 146-154. (English version DOI).
11. Леган М.А. Определение разрушающей нагрузки, места и направления разрыва с помощью градиентного подхода // ПМТФ. – 1994. – Т. 35, № 5. – С. 117-124. (English version DOI).
12. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
13. Whitney J.M., Nuismer R.J. Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations // J. Compos. Mater. – 1974. – Vol. 8, no. 3. – P. 253-265. DOI
14. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.



15. Шеремет А.С., Леган М.А. Применение градиентного критерия прочности и метода граничных элементов к плоской задаче о концентрации напряжений // ПМТФ. – 1999. – Т. 40, № 4. – С. 214-221. (English version [DOI](#)).
16. Новиков Н.В., Майстренко А.Л. Трещиностойкость кристаллических и композиционных сверхтвердых материалов // ФХММ. – 1983. – Т. 19, № 4. – С. 46-53. (English version [DOI](#)).

## References

1. Mellor M., Hawkes I. Measurement of tensile strength by diametral compression of discs and annuli. *Eng. Geol.*, 1971, vol. 5, no. 3, pp. 173-225. [DOI](#)
2. Efimov V.P. Gradient approach to determination of tensile strength of rocks. *J. Min. Sci.*, 2002, vol. 38, no. 5, pp. 455-459. [DOI](#)
3. Legan M.A. Brittle fracture of structures elements with stress concentrators. *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 3, pp. 70-76.
4. Efimov V.P. Rock tests in nonuniform fields of tensile stresses. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 5, pp. 857-865. [DOI](#)
5. Efimov V.P. Tensile strength of rocks by test data on disc-shaped specimens with a hole drilled through the disc center. *J. Min. Sci.*, 2016, vol. 52, no. 5, pp. 878-884. [DOI](#)
6. Frocht M.M. *Photoelasticity*. New York: John Wiley & Sons, 1948, Vol. II.
7. Chen C.S., Pan E., Amadei B. Fracture mechanics analysis of cracked discs of anisotropic rock using the boundary element method. *Int. J. Rock Mech. Min.*, 1998, vol. 35, no. 2, pp. 195-218. [DOI](#)
8. Ke C.-C., Chen C.-S., Tu C.-H. Determination of fracture toughness of anisotropic rocks by boundary element method. *Rock Mech. Rock Eng.*, 2008, vol. 41, no. 4, pp. 509-538. [DOI](#)
9. Crouch S.L., Starfield A.M. *Boundary element methods in solid mechanics*. London: George Allen & Unwin, 1983. 322 p.
10. Legan M.A. Correlation of local strength gradient criteria in a stress concentration zone with linear fracture mechanics. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1993, vol. 34, no. 4, pp. 585-592. [DOI](#)
11. Legan M.A. Determination of the breaking load and the position and direction of a fracture using the gradient approach. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1994, vol. 35, no. 5, pp. 750-756. [DOI](#)
12. Banerjee P.K., Butterfield R. *Boundary element methods in engineering science*. McGraw-Hill Inc., 1981. 452 p.
13. Whitney J.M., Nuismer R.J. Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. *J. Compos. Mater.*, 1974, vol. 8, no. 3, pp. 253-265. [DOI](#)
14. Novozhilov V.V. *Theory of elasticity*. Elsevier, 1961. 460 p.
15. Sheremet A.S., Legan M.A. Application of the gradient strength criterion and the boundary element method to a plane stress-concentration problem. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1999, vol. 40, no. 4, pp. 744-750. [DOI](#)
16. Novikov N.V., Maistrenko A.L. Crack resistance of crystalline and composite superhard materials. *Mater. Sci.*, 1984, vol. 19, no. 4, pp. 298-304. [DOI](#)

Поступила в редакцию 19.05.2017; опубликована в электронном виде 04.10.2017

---

## Сведения об авторах

Леган Михаил Антонович, д-р, доц., с-нс, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (ИГиЛ СО РАН), 630090, Новосибирск, пр-т Лаврентьева, д. 15; e-mail: legan@ngs.ru

Блинов Валерий Александрович, м-нс, ИГиЛ СО РАН; e-mail: Bln89-08@mail.ru