DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.3.25
УДК 532.546: 519.6

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ИСТОЧНИКЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА

Х.М. Гамзаев

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Баку, Азербайджан

Рассматриваются две обратные задачи восстановления функции источника для линейного уравнения конвективного переноса. Первая задача состоит в нахождении источника, зависящего лишь от пространственной переменной, с условием финального переопределения. Вторая задача заключается в нахождении источника, обусловленного только временем, и является обратной задачей с переопределением при дополнительном условии на границе рассматриваемой области. Для решения первой задачи производится дискретизация производной по пространственной переменной, и вследствие этого исходная задача сводится к дифференциально-разностной относительно функций времени. Ее решение предлагается представлять в специальном виде, который позволяет свести исходную задачу при каждом дискретном значении пространственной переменной к двум задачам Коши и линейному уравнению относительно приближенного значения искомой функции источника. Численное решение задач Коши осуществляется с помощью неявного метода Эйлера. Для решения второй задачи производная дискретизируется по времени, и задача становится дифференциально-разностной относительно функций пространственной переменной. Полученная дифференциально-разностная задача разрешается путем специального представления решения. В результате при каждом дискретном значении временной переменной вторая задача распадается на две задачи Коши и линейное уравнение относительно приближенного значения искомой функции источника. Для численного решения задач Коши снова необходимо прибегнуть к неявному методу Эйлера. В предлагаемом подходе, в отличие от метода глобальной регуляризации, используется регуляризационные свойства вычислительного алгоритма, и решение находится последовательно, без применения итерационных процедур. Предложенный метод апробирован в численных экспериментах на модельных задачах.

Ключевые слова: неоднородное уравнение конвективного переноса, обратная задача об источнике, финальное переопределение, дифференциально-разностная задача

NUMERICAL METHOD OF SOLVING AN INVERSE SOURCE PROBLEM FOR THE CONVECTIVE TRANSFER EQUATION

Kh.M. Gamzaev

Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan

Two inverse problems are considered for reconstruction of a source for the linear convective transfer equation. The first problem is to find a source that depends only on a spatial variable with final redefinition condition. The second problem consists in finding a source that depends only on time, according to an additional condition on the boundary of the region under consideration. To solve the first problem, we first discretize the derivative with respect to the spatial variable and the problem reduces to a differential-difference problem with respect to functions that depend on the time variable. For solving, we propose a special representation. As a result, the solution of the initial problem on each discrete value of the space variable reduces to solving two Cauchy problems and a linear equation with respect to the approximate value of the required source function for a discrete value of the spatial variable. For the numerical solution of the Cauchy problem, the implicit Euler method is used. To solve the second problem, the time derivative of the derivative is discretized and the problem reduces to a differential-difference problem with respect to functions that depend on the spatial variable. The resulting differential-difference problem is solved using a special representation. As a result, the solution of the second problem at each discrete value of the time variable reduces to solving two Cauchy problems and a linear equation with respect to the approximate value of the unknown source function with a discrete value of the time variable. To solve the Cauchy problem numerically, the implicit Euler method is again applied. In the proposed method, in contrast to the global regularization method, the regularization properties of the computational algorithm are employed and the solution is determined successively without the use of iterative methods. On the basis of the proposed method, numerical experiments were performed for model problems.

Key words: inhomogeneous convection transfer equation, inverse source problem, final redefinition, differential-difference problem

1. Введение

Известно, что уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t}+v(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

является математической моделью процесса одномерного переноса субстанции или какой-либо физической величины (массы, импульса, энергии и другой) средой, движущейся со скоростью $v(x,t)$, при пренебрежении диффузией (теплопроводностью). Это уравнение используется как математическое представление в широком классе процессов в гидродинамике, теплопередаче, акустике, физике плазмы и другом [1–4]. При наличии в среде источников (стоков) уравнение конвективного переноса принимает неоднородный вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\nu(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda(x,t)u=\theta(x,t)\ ,$$

где слагаемое $\lambda(x,t)u$ соответствует поглощению или выделению субстанции, а слагаемое $\theta(x,t)$ — действию внешнего источника [3]. Следует отметить, что во многих практических случаях функцию источника $\theta(x,t)$ можно записать в виде произведения двух функций

$$\theta(x,t)=g(t)f(x)\,,$$

где функция $g(t)$ описывает зависимости источника от времени, а функция $f(x)$ — от пространственной координаты.

Аналитическому и численному исследованию начально-краевых задач, сводящихся к решению линейного уравнения конвективного переноса, посвящены многочисленные работы [3–8]. Однако во многих реальных ситуациях функция источника заранее неизвестна, и в связи с этим возникает необходимость в решении обратной задачи определения источника для уравнения конвективного переноса.

Известно, что одним из распространенных методов решения обратных задач является метод регуляризации Тихонова, основная идея которого заключается в сведении обратной задачи к задаче минимизации некоторого функционала с дополнительным стабилизирующим слагаемым [9, 10]. Но необходимо отметить, что при решении обратных задач методом регуляризации Тихонова требуется большой объем вычислений, связанный с процедурой расчета градиента функционала, а также поиска нужного значения параметра регуляризации. Кроме того, при глобальной регуляризации решение обратной задачи осуществляется одновременно, что приводит к потере оперативности нахождения решения. В связи с этим для решения обратных задач определения источника считается целесообразным прибегать к методам саморегуляризации, основанным на вязкостных свойствах вычислительных алгоритмов [9–12]. В отличие от метода глобальной регуляризации, в методах саморегуляризации решение обратной задачи выполняется последовательно, без применения итерационных методов.

В данной работе для решения обратной задачи по восстановлению источника для линейного уравнения конвективного переноса предлагается численный метод, основанный на использовании регуляризационных свойств дискретизации.

2. Постановка задачи и метод решения

Задача А. Пусть рассматривается неоднородное уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t}+v(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda(x,t)u=g(t)f(x)\,,\qquad 0<x\le l,\ \ 0<t\le T\ , \tag{1}$$

где $v(x,t)>0$, $\lambda(x,t)>0,$ со следующими начальным и граничным условиями:

$$u(x,0)=\phi(x)\ ,\qquad 0\le x\le l\ , \tag{2}$$

$$u(0,t)=p(t)\ ,\qquad 0\le t\le T\ . \tag{3}$$

Известно, что прямая задача для уравнения (1) состоит в определении функции $u(x,t)$ из уравнения (1) с заданными коэффициентами $v(x,t)$, $\lambda(x,t)$, правой частью $g(t)f(x)$ и дополнительными условиями (2), (3).

Предположим, что помимо функции $u(x,t)$ неизвестной является также функция $f(x)$. Требуется восстановление этой функции по следующему дополнительному условию — финальному переопределению

$$u(x,T)=\psi(x)\ ,\qquad 0\le x\le l\ , \tag{4}$$

где $\psi(x)$ — заданная функция. Считается, что при этом выполняются условия согласования:

$$p(0)=\phi(0)\,,$$

$$p(T)=\psi(0)\ .$$

Таким образом, задача заключается в определении функций $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющих уравнению (1) и условиям (2)–(4).

Введем равномерную разностную сетку в области $\left[0 \le x \le l\right]$ по переменной x

$$\bar{\omega}_x = \left\{ x_i = i\Delta x, \quad i = \overline{0, n} \right\}$$

с шагом $\Delta x = l/n$. Производную $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ в уравнении (1) при x_i ($i = \overline{1, n}$) аппроксимируем разностью «назад»:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_i,t)} \approx \frac{u\left(x_i,t\right) - u\left(x_{i-1},t\right)}{\Delta x}.$$

Используя обозначение $u_i(t) \approx u\left(x_i,t\right)$, уравнение (1), условия (2), (3) и дополнительное соотношение (4) запишем в виде:

$$\frac{du_i(t)}{dt} + v_i(t)\frac{u_i(t) - u_{i-1}(t)}{\Delta x} + \lambda_i(t)u_i(t) = g(t)\, f_i, \quad 0 < t \le T, \tag{5}$$

$$u_i\left(0\right) = \phi_i, \tag{6}$$

$$u_0(t) = p(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

$$u_i\left(T\right) = \psi_i \tag{8}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \dots,\ n\ ),$$

где $v_i(t) = v(x_i,t), \quad \lambda_i(t) = \lambda(x_i,t), \quad f_i \approx f(x_i), \quad \phi_i = \phi(x_i), \quad \psi_i = \psi(x_i)$.

Предположим, что решение полученной дифференциально-разностной задачи (5)–(8) при каждом значении $i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n$ представляется как

$$u_i\left(t\right) = w_i(t) + f_i\varphi_i\left(t\right), \tag{9}$$

где $w_i(t), \quad \varphi_i(t) \quad (i = \overline{1, n})$ — неизвестные функции. Подставив соотношение (9) в уравнение (5), будем иметь:

$$\frac{dw_i(t)}{dt} + f_i\frac{d\varphi_i(t)}{dt} + v_i(t)\frac{w_i(t) - u_{i-1}(t)}{\Delta x} + f_i v_i(t)\frac{\varphi_i(t)}{\Delta x} + \lambda_i(t)w_i(t) + f_i\lambda_i(t)\varphi_i(t) = g(t)\, f_i \ ,$$

или

$$\left[\frac{dw_i(t)}{dt} + v_i(t)\frac{w_i(t) - u_{i-1}(t)}{\Delta x} + \lambda_i(t)w_i(t)\right] + f_i\left[\frac{d\varphi_i(t)}{dt} + v_i(t)\frac{\varphi_i(t)}{\Delta x} + \lambda_i(t)\varphi_i(t) - g(t)\right] = 0.$$

Соотношение (9) также подставим в начальное условие (6):

$$w_i(0) + f_i\varphi_i\left(0\right) = \phi_i\ .$$

В силу произвольности функций $w_i(t), \quad \varphi_i(t)$ из последних соотношений можно получить следующие задачи Коши относительно этих функций:

$$\frac{dw_i(t)}{dt} + v_i(t)\frac{w_i(t) - u_{i-1}(t)}{\Delta x} + \lambda_i(t)w_i(t) = 0, \quad 0 < t \le T, \tag{10}$$

$$w_i\left(0\right) = \phi_i\ , \tag{11}$$

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} + \nu_i(t)\frac{\varphi_i(t)}{\Delta x} + \lambda_i(t)\varphi_i(t) = g(t), \quad 0 < t \le T, \tag{12}$$

$$\varphi_i\left(0\right) = 0 \tag{13}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \dots,\ n\ );$$

$$u_0(t) = p(t)\ , \qquad 0 \le t \le T\ .$$

Таким образом, решение обратной задачи (5)–(8) $\{u_i(t),\ f_i,\ i=\overline{1,n}\}$ производится по следующей схеме: для каждого фиксированного значения $i=1, 2, ..., n$ последовательно решаются задачи (10), (11) и (12), (13), то есть восстанавливаются функции $w_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ на отрезке $[0,T]$; полученные решения подставляются в дополнительное соотношение (8)

$$w_i(T)+f_i\varphi_i(T)=\psi_i,$$

и в результате находится приближенное значение искомой функции $f(x)$ при $x=x_i$, то есть f_i:

$$f_i=\frac{\psi_i-w_i(T)}{\varphi_i(T)}.$$

Наконец, по формуле (9) определяется искомая функция $u_i(t)$.

Для численного решения задач (10), (11) и (12), (13) можно использовать метод конечных разностей. Для этого введем равномерную разностную сетку в области $[0\le t\le T]$ по переменной t

$$\overline{\omega}_t=\left\{t_j=j\Delta t,\ j=\overline{0,m}\right\},$$

с шагом $\Delta t=T/m$. Разностные аналоги задач (10), (11) и (12), (13) на разностной сетке $\overline{\omega}_t$ представим в виде неявной схемы Эйлера:

$$\frac{w_i^j-w_i^{j-1}}{\Delta t}+v_i^j\frac{w_i^j-u_{i-1}^j}{\Delta x}+\lambda_i^j w_i^j=0 \quad (j=\overline{1,m}), \tag{14}$$

$$w_i^0=\phi_i, \tag{15}$$

$$\frac{\varphi_i^j-\varphi_i^{j-1}}{\Delta t}+v_i^j\frac{\varphi_i^j}{\Delta x}+\lambda_i^j\varphi_i^j=g^j \quad (j=\overline{1,m}), \tag{16}$$

$$\varphi_i^0=0, \tag{17}$$

где $w_i^j\approx w_i(t_j)$, $\varphi_i^j\approx\varphi_i(t_j)$, $u_{i-1}^j\approx u_{i-1}(t_j)$, $g^j=g(t_j)$, $v_i^j=v_i(t_j)$, $\lambda_i^j=\lambda_i(t_j)$.

Решения разностных задач (14), (15) и (16), (17) вычисляются по формулам

$$w_i^j=\frac{w_i^{j-1}+v_i^j u_{i-1}^j\,\Delta t/\Delta x}{1+\lambda_i^j\Delta t+v_i^j\,\Delta t/\Delta x} \quad (j=\overline{1,m}), \qquad w_i^0=\phi_i,$$

$$\varphi_i^j=\frac{\varphi_i^{j-1}+g^j\Delta t}{1+\lambda_i^j\Delta t+v_i^j\Delta t/\Delta x} \quad (j=\overline{1,m}), \qquad \varphi_i^0=0.$$

$$(i=1, 2, ..., n).$$

<u>*Задача B*</u>. Пусть снова рассматривается неоднородное уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t}+v(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda(x,t)u=g(t)f(x), \quad 0<x\le l, \quad 0<t\le T, \tag{18}$$

со следующими условиями:

$$u(x,0)=\phi(x), \qquad 0\le x\le l, \tag{19}$$

$$u(0,t)=p(t), \qquad 0\le t\le T. \tag{20}$$

Теперь, помимо функции $u(x,t)$, неизвестной является функция $g(t)$. Требуется восстановление этой функции по следующему дополнительному условию:

$$u(l,t)=r(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{21}$$

где $r(t)$ — заданная функция. Предполагается, что выполняются условия согласования

$$p(0) = \phi(0)\,, \qquad r(0) = \varphi(l)\,.$$

Задача заключается в определении функций $u(x,t)$ и $g(t)$, удовлетворяющих уравнению (18) и условиям (19)–(21).

Введем равномерную разностную сетку в области $[0 \le t \le T]$ по переменной t

$$\overline{\omega}_t = \left\{ t_j = j\Delta t,\ \ j = \overline{0, m} \right\}$$

с шагом $\Delta t = T/m$. Производную $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ в уравнении (18) при t_j ($j = \overline{1, m}$) аппроксимируем разностью «назад»:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,t_j)} \approx \frac{u\left(x,t_j\right) - u\left(x,t_{j-1}\right)}{\Delta t}\,.$$

Обозначив $u^j(x) \approx u\left(x,t_j\right)$, задачу (18)–(21) запишем в следующем виде:

$$\frac{u^j\left(x\right) - u^{j-1}\left(x\right)}{\Delta t} + v^j(x)\frac{du^j}{dx} + \lambda^j(x)u^j(x) = g^j f(x)\,, \qquad 0 < x \le l, \tag{22}$$

$$u^0\left(x\right) = \phi(x)\,, \tag{23}$$

$$u^j(0) = p^j\,, \tag{24}$$

$$u^j\left(l\right) = r^j \tag{25}$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где $v^j(x) = v(x,t_j),\ \lambda^j(x) = \lambda(x,t_j),\ g^j \approx g(t_j),\ p^j = p(t_j),\ r_j = r(t_j)$.

Решение полученной дифференциально-разностной задачи (22)–(25) на каждом временном слое $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$ представим в виде

$$u^j\left(x\right) = w^j(x) + g^j \varphi^j\left(x\right), \tag{26}$$

где $w^j(x),\ \ \varphi^j(x)$ ($j = \overline{1, m}$) — неизвестные функции. Подставив соотношение (26) в уравнение (22), будем иметь:

$$\frac{w^j(x) + g^j\varphi^j\left(x\right) - u^{j-1}\left(x\right)}{\Delta t} + \nu^j(x)\frac{d^jw^j}{dx} + \nu^j(x)g^j\frac{d\varphi^j}{dx} + \lambda^j(x)w^j(x) + \lambda^j(x)g^j\varphi^j\left(x\right) = g^j f(x)\,,$$

или после группировки

$$\frac{w^j(x) - u^{j-1}\left(x\right)}{\Delta t} + \nu^j(x)\frac{d^jw^j}{dx} + \lambda^j(x)w^j(x) + g^j\left[\frac{\varphi^j\left(x\right)}{\Delta t} + \nu^j(x)\frac{d\varphi^j}{dx} + \lambda^j(x)\varphi^j\left(x\right) - f\left(x\right)\right] = 0\,.$$

Соотношение (26) также подставим в граничное условие (24):

$$w^j(0) + g^j\varphi^j\left(0\right) = p^j\,.$$

В силу произвольности функций $w^j(x),\ \ \varphi^j(x)$ из последних соотношений придем к следующим задачам Коши относительно функций $w^j(x)$ и $\varphi^j(x)$:

$$\frac{w^j(x) - u^{j-1}\left(x\right)}{\Delta t} + \nu^j(x)\frac{d^jw^j}{dx} + \lambda^j(x)w^j(x) = 0\,, \qquad 0 < x \le l, \tag{27}$$

$$w^j(0) = p^j\,, \tag{28}$$

$$\frac{\varphi^j\left(x\right)}{\Delta t} + \nu^j(x)\frac{d\varphi^j}{dx} + \lambda^j(x)\varphi^j\left(x\right) = f(x)\,, \qquad 0 < x \le l, \tag{29}$$

$$\varphi^j(0) = 0 \tag{30}$$
$$(j = 1, 2, ..., m),$$
$$u^0(x) = \phi(x).$$

Подстановка соотношения (26) в дополнительное условие (25) дает:

$$w^j(l) + g^j \varphi^j(l) = r^j,$$

или

$$g^j = \frac{r^j - w^j(l)}{\varphi^j(l)}. \tag{31}$$

Таким образом, решение задачи (22)–(25) { $u^j(x)$, g^j, $j = \overline{1, m}$ } производится в последовательности:
– для каждого фиксированного значения $j = 1, 2, ..., m$ определяются решения задач (27), (28) и (29), (30), то есть функции $w^j(x)$ и $\varphi^j(x)$ на отрезке $[0, l]$;
– по формуле (31) вычисляется приближенное значение искомой функции $g(t)$ при $t = t_j$, то есть g^j;
– по формуле (26) рассчитывается искомая функция $u^j(x)$.

Для численного решения задач (27), (28) и (29), (30) можно использовать метод конечных разностей. Для этого введем равномерную разностную сетку в области $[0 \le x \le l]$ по переменной x:

$$\overline{\omega}_x = \left\{ x_i = i\Delta x,\ i = \overline{0, n} \right\}$$

с шагом $\Delta x = l/n$. Разностные аналоги задач (27), (28) и (29), (30) на разностной сетке $\overline{\omega}_x$ представим в виде неявной схемы Эйлера:

$$\frac{w_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} + \nu_i^j \frac{w_i^j - w_{i-1}^j}{\Delta x} + \lambda_i^j w_i^j = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \tag{32}$$

$$w_0^j = p^j, \tag{33}$$

$$\frac{\varphi_i^j}{\Delta t} + \nu_i^j \frac{\varphi_i^j - \varphi_{i-1}^j}{\Delta x} + \lambda_i^j \varphi_i^j = f_i \quad (i = \overline{1, n}), \tag{34}$$

$$\varphi_0^j = 0 \tag{35}$$
$$(j = 1, 2, ..., m),$$

где $w_i^j \approx w^j(x_i)$, $u_i^{j-1} \approx u^{j-1}(x_i)$, $\varphi_i^j = \varphi^j(x_i)$, $\nu_i^j = \nu^j(x_i)$, $\lambda_i^j = \lambda^j(x_i)$.

Решения разностных задач (14), (15) и (16), (17) определяются по формулам

$$w_i^j = \frac{u_i^{j-1} + \nu_i^j w_{i-1}^j \Delta t/\Delta x}{1 + \lambda_i^j \Delta t + \nu_i^j \Delta t/\Delta x} \quad (i = \overline{1, n}), \qquad w_0^j = p^j,$$

$$\varphi_i^j = \frac{\Delta t \nu_i^j \varphi_{i-1}^j/\Delta x + f_i \Delta t}{1 + \lambda_i^j \Delta t + \nu_i^j \Delta t/\Delta x} \quad (i = \overline{1, n}), \qquad \varphi_0^j = 0$$

$$(j = 1, 2, ..., m).$$

3. Результаты численных расчетов

Для выяснения эффективности предложенных вычислительных алгоритмов были проведены эксперименты на модельных задачах. Ниже приводятся результаты для двух из них.

Задача А. Требуется найти функции $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \cos x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \sin x \cdot u = 5 f(x) e^{-t}, \qquad 0 < x \le 1,\ 0 < t \le 1,$$

$$u(x, 0) = 10\cos x, \qquad 0 \le x \le 1,$$

$$u(0, t) = 10 e^{-t}, \qquad 0 \le t \le 1,$$

$$u(x, 1) = 10\cos x/e, \qquad 0 \le x \le l.$$

Точными решениями данной задачи являются функции:

$$u(x,t) = 10\cos x \cdot e^{-t}, \qquad f(x) = -2\cos x .$$

Результаты численного решения Задачи A приведены в таблице 1.

Таблица 1. Численные результаты по Задаче A

x_i	Значение функции $f(x)$		
	Точное	Вычисленное при $\Delta x = 0{,}001$, $\Delta t = 0{,}005$	Вычисленное при $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta t = 0{,}01$
0,1	–1,990	–1,994	–1,990
0,2	–1,960	–1,964	–1,960
0,3	–1,911	–1,915	–1,911
0,4	–1,842	–1,846	–1,843
0,5	–1,755	–1,759	–1,756
0,6	–1,651	–1,654	–1,652
0,7	–1,530	–1,533	–1,531
0,8	–1,393	–1,396	–1,396
0,9	–1,243	–1,246	–1,246
1	–1,081	–1,083	–1,083

Задача B. Требуется найти функции $u(x,t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \cos x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \sin x \cdot u = -2\cos x \cdot g(t), \qquad 0 < x \le 1, \ \ 0 < t \le 1,$$
$$u(x,0) = 10\cos x, \qquad 0 \le x \le 1,$$
$$u(0,t) = 10e^{-t}, \qquad 0 \le t \le 1,$$
$$u(1,t) = 10\cos 1 \cdot e^{-t}, \qquad 0 \le x \le l .$$

Точными решениями данной задачи являются функции:

$$u(x,t) = 10\cos x \cdot e^{-t}, \qquad g(t) = 5e^{-t} .$$

Результаты численного решения Задачи B приведены в таблице 2.

Как показывают численные эксперименты, при использовании невозмущенных входных данных искомые функции $f(x)$ и $g(t)$ восстанавливаются с достаточно высокой точностью. При возмущенных же входных данных, когда погрешность имеет флуктуационный характер, процесс восстановления этих функций слабо чувствителен к их погрешности на входе.

Таблица 2. Численные результаты по Задаче B

t_i	Значение функции $g(t)$		
	Точное	Вычисленное при $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta t = 0{,}001$	Вычисленное при $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta t = 0{,}01$
0,1	4,524	4,523	4,523
0,2	4,094	4,092	4,093
0,3	3,704	3,701	3,705
0,4	3,352	3,350	3,353
0,5	3,033	3,031	3,032
0,6	2,744	2,743	2,745
0,7	2,483	2,481	2,483
0,8	2,247	2,245	2,246
0,9	2,033	2,033	2,031
1	1,839	1,837	1,838

Необходимо сказать, что для возмущения исходных данных применяется равномерно распределенная на отрезке [0,1] случайная величина, моделируемая с помощью датчика случайных чисел. Максимальное относительное возмущение составляет 0,05. При этом эффект регуляризации обеспечивается за счет выбора разностной сетки. Анализ результатов свидетельствует, что за счет использования грубых расчетных сеток можно уменьшить влияние погрешности во входных данных на точность восстановления значений функций $f(x)$ и $g(t)$.

4. Заключение

Рассмотрены обратные задачи для линейного уравнения конвективного переноса, связанные с восстановлением функции источника. Вычислительный алгоритм решения данных задачи базируется на частичной дискретизации уравнения конвективного переноса с последующим сведением к задачам Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В отличие от метода глобальной регуляризации, приводящего к построению итерационных последовательностей, в предложенном подходе учитывается специфика обратных задач, и решение осуществляется последовательно. Этот подход может быть применен для восстановления источника в широком классе нестационарных неоднородных уравнений.

Литература

1. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2-х т. – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 382 с.
2. *Уизем Дж.Б.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 638 с.
3. *Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
4. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 618 с.
5. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 2004. – 614 с.
6. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Разностные схемы для уравнения переноса // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34, № 12. – С. 1675-1685.
7. *Bugai D.A.* Locally one-dimensional difference scheme for the convective diffusion equation // Journal of Mathematical Sciences. – 1999. – Vol. 72, no. 2. – P. 3021-3024. DOI
8. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. – М.: Наука, 1977. – 440 с
9. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
10. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.
11. *Гамзаев Х.М.* О моделировании нестационарного течения нелинейно-вязких жидкостей по трубопроводу // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 2. – Р. 464-469. (English version DOI).
12. *Гамзаев Х.М.* Численное решение комбинированной обратной задачи для обобщенного уравнения Бюргерса // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2015. – Т. 15, № 4. – С. 35-42. (English version DOI).

References

1. Anderson D., Tannehill K., Pletcher R. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. New York, 1984, vol. 1. 392 p.
2. Whitham G.B. *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons Inc., 1974. 629 p.
3. Paskonov V.M., Polezhaev V.I., Chudov L.A. *Chislennoe modelirovanie protsessov teplo- i massoobmena* [Numerical modeling of heat and mass transfer processes]. Moscow: Nauka, 1984. 285 p.
4. Roache P.J. *Computational fluid dynamics*. Albuquerque, Hermosa Publishers, 1976. 446 p.
5. Samarskii A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 2004. 614 p.
6. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Difference schemes for the transport equation. I. *Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 12, pp. 1682-1692.
7. Bugai D.A. Locally one-dimensional difference scheme for the convective diffusion equation. *Journal of Mathematical Sciences*, 1999, vol. 72, no. 2, pp. 3021-3024. DOI
8. Godunov S.K., Ryabenkiy V.S. *Raznostnye schemy* [Difference schemes]. Moscow: Nauka, 1977. 440 p.
9. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. *Ekstremalnye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme methods for solving ill-posed problems]. Moscow: Nauka, 1988. 288 p.
10. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. *Chislennye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* [Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics]. Moscow: URSS, 2009.480 p.
11. *Gamzaev Kh.M.* Modeling nonstationary nonlinear-viscous liquid flows through a pipeline // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, no. 2. – P. 480-485. DOI
12. *Gamzaev Kh.M.* Numerical solution of combined inverse problem for generalized Burgers equation. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 221, no. 6, pp. 833-839. DOI

Поступила в редакцию 29.06.2017; опубликована в электронном виде 04.10.2017

Сведения об авторе

Гамзаев Ханлар Мехвали оглу, дтн, проф., Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности, AZ 1010, Баку, проспект Азадлыг, д. 20; e-mail: xan.h@rambler.ru