

DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.3.22

УДК 539.4

УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК, ПОСТРОЕННАЯ НА ОСНОВЕ ЯВНОЙ СХЕМЫ ТИПА «КРЕСТ»

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация

Сформулирована начально-краевая задача упругопластического деформирования перекрестно армированных по эквидистантным поверхностям гибких пологих оболочек. Механическое поведение материалов компонентов композиции искривленных панелей описывается определяющими уравнениями упругопластической среды Прандтля–Рейсса–Хилла. Геометрическая нелинейность задачи рассматривается в приближении Кармана. Полученные разрешающие уравнения и соответствующие им начальные и граничные условия в обобщенных кинематических переменных позволяют с разной точностью рассчитывать напряженно-деформированные состояния в компонентах композиции и учитывать при этом у изготовленных из нее гибких пологих оболочек и пластин ослабленное сопротивление поперечному сдвигу. В первом приближении из построенных уравнений, начальных и граничных условий следуют соотношения, отвечающие традиционной неклассической теории Редди. Численное интегрирование поставленной начально-краевой задачи осуществляется на основе метода шагов по времени. Для аппроксимации производных по времени используются центральные конечные разности. На основе этой аппроксимации построена явная численная схема типа «крест» для случая приложения нагрузок взрывного типа. Исследованы особенности упругопластического динамического поведения армированной пологой сферической оболочки, имеющей в плане кольцевую форму, с абсолютно жесткой внутренней шайбой, а также цилиндрических панелей разной толщины, удлиненных прямоугольных в плане, под действием фронтальных нагрузок, порожденных воздушной взрывной волной. Пологие оболочки рационально армированы по направлениям главных напряжений и деформаций и жестко закреплены на опорных кромках. Показано, что в ряде случаев теория Редди становится совершенно неприемлемой для достижения адекватных результатов при расчетах упругопластически деформируемых пологих композитных оболочек даже при условии их относительно малой толщины. Продемонстрировано, что в силу геометрической и физической нелинейности исследуемой задачи динамическое поведение армированных искривленных панелей в значительной степени зависит от того, к какой из лицевых поверхностей оболочки – выпуклой или вогнутой – прикладывается внешняя нагрузка. Установлено, что наиболее вероятный механизм предразрушения таких конструкций заключается в накоплении связующим материалом композиции повреждений за счет малоциклового усталости, возникающей в процессе осцилляций нагруженной армированной конструкции.

Ключевые слова: пологие оболочки, армированные конструкции, упругопластическое деформирование, геометрическая нелинейность, теория Редди, уточненные теории изгиба, динамическое поведение, схема типа «крест»

A REFINED MODEL OF ELASTIC-PLASTIC BENDING DEFORMATION OF FLEXIBLE REINFORCED SHALLOW SHELLS BASED ON EXPLICIT “CROSS” SCHEME

A.P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

An initial-boundary value problem is formulated for elastoplastic deformation of flexible shallow shells, cross reinforced by equidistant surfaces. The mechanical behavior of the component materials of the composition of curved panels is governed by the Prandtl–Reuss–Hill equations for an elastoplastic medium. The geometric nonlinearity of the problem is considered in the Karman approximation. The resulting governing equations and the corresponding initial and boundary conditions in the generalized kinematic variables allow one to calculate with different accuracy the stress-strain state in the components of the composition of flexible shallow shells and plates, taking into account their weakened resistance to the transverse shear. The relations corresponding to the traditional non-classical Reddy theory are obtained in the first approximation from the equations, initial and boundary conditions. The numerical integration of the initial-boundary value problem is carried out on the basis of the method of steps in time. The central finite differences are used to approximate derivatives with respect to time. On the basis of this approximation the explicit numerical “cross” scheme is constructed in the case of impact loads of explosive type. The properties of elastoplastic dynamic behavior is investigated for the reinforced shallow spherical shell of annular form in plan, with a perfectly rigid inner insert, also for the cylindrical panels of rectangular elongated shape in plan of different thickness under the action of the front load generated by the air blast. Shallow shells are rationally reinforced in the directions of principal stresses and strains and at the supported edges they are rigidly clamped. It is shown that in some cases the Reddy theory is absolutely inadmissible to produce adequate results of calculations of the elastic-plastic deformable composite shallow shells, even with a relatively small thickness. It is demonstrated that, due to the geometrical and physical nonlinearity of the investigated problem, the dynamic behavior of reinforced curved panels significantly depends on the fact that the form of the front surface of the shell, subjected to the external load, is convex or concave. It is established that the most probable mechanism of pre-destruction of such structures is the accumulation of damage due to low-cycle fatigue of binder that occurs in the oscillation process of a reinforced structure.

Key words: shallow shells, reinforced structures, elastic-plastic deformation, geometric nonlinearity, Reddy theory, refined theory of bending, dynamic response, cross-type scheme

1. Введение

Композитные материалы находят все более широкое применение в изделиях аэрокосмического назначения, в судо- и машиностроении [1–5], так как они сочетают в себе легкость с высокой прочностью.

Наиболее ярко это качество проявляется при использовании тонкостенных конструкций [6–16], поэтому актуальной является проблема адекватного расчета изгибного деформирования композитных, в частности волокнистых, панелей и оболочек при воздействии на них интенсивных нагрузок, характерных для современных инженерных изделий [7–10, 14–16].

Механическое поведение анизотропных и слоистых оболочек в рамках классической теории Кирхгофа–Лява, не принимающей во внимание ослабленное сопротивление таких конструкций поперечному сдвигу, исследовалось, например, в [6, 7]. Учет поперечных сдвигов в композитных оболочках, как правило, производится в рамках теорий Рейсснера–Миндлина [10, 14, 16] или теории Редди [7–9, 11, 15, 17] (в русскоязычной литературе эти теории, соответственно, называются первым и вторым вариантами теории Тимошенко [8]). В монографии [9] показано, что в случае линейно-упругого поведения материала композитных пластин и оболочек не требуется уточнять решения, построенные на базе гипотез теории Редди, то есть не нужно прибегать к более сложным теориям повышенной точности [10, 18].

В настоящее время в подавляющем большинстве научных работ, посвященных проблемам деформирования тонкостенных элементов композитных конструкций, используется предположение о линейно-упругом поведении их материалов [6–11, 14–18]. Однако современные изделия могут быть изготовлены из многокомпонентных материалов, обладающих ярко выраженными упругопластическими свойствами [5, 19–22]. Путем анализа справочных данных выявлено [19–21], что при условии лишь линейно-упругого поведения материалов всех фаз композиции напряжения в высокопрочной арматуре не превосходят 10–20 % их предела прочности. Если же в расчет принимается возможность пластического деформирования материала связующей матрицы, то несущую способность волокон можно исчерпать почти полностью [23, 24].

В монографии [10] в рамках теории Рейсснера изучалась проблема динамики гибких тонкостенных элементов композитных конструкций из линейно-упругих материалов, а также упругопластического поведения изотропных и слоистых тонкостенных конструкций с привлечением более точной теории, основанной на кинематической гипотезе ломаной линии. В работе [23] на базе теории Редди построена модель статического нелинейно-упругого деформирования армированных изгибаемых пластин. В [25] в рамках той же теории исследовались гибкие армированные пластины из нелинейно-упругих материалов в условиях динамического нагружения, а в [24] предложена структурная модель волокнистой среды, учитывающей упругопластический характер деформирования составляющих ее материалов, и на ее основе, с привлечением гипотез теорий Рейсснера и Редди, рассмотрен упругопластический изгиб армированных гибких пластин.

Однако невыясненным остается вопрос о том, позволяют ли теории, развитые в [23–25], получать результаты расчетов с приемлемой для инженерных приложений точностью, в частности при динамическом нагружении. Для случая статически нагруженных балок-стенок, армированных в продольном направлении и изготовленных из композиции нелинейно-упругих материалов, в [26] показано, что уточнение второго варианта теории Тимошенко (а значит, и теории Редди) все-таки требуется.

При численном интегрировании динамических задач механики тонкостенных элементов конструкций используются явные и неявные схемы шагов по времени. Среди явных схем наиболее широкое распространение нашли схемы типа «крест» [10, 24, 25, 27, 28], а из неявных схем чаще всего применяется метод Ньюмарка [29–32].

В связи с вышеизложенным данная работа посвящена построению уточненной (по сравнению с теорией Редди) модели динамического деформирования гибких армированных пологих оболочек, изготовленных из упругопластических материалов фаз композиции, с привлечением явной пошаговой численной схемы типа «крест».

2. Постановка задачи

Рассмотрим пологую оболочку толщиной $2h$, с которой свяжем криволинейную ортогональную систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, что отсчетная поверхность Ox_1x_2 ($x_3 = 0$) совмещается со срединной поверхностью

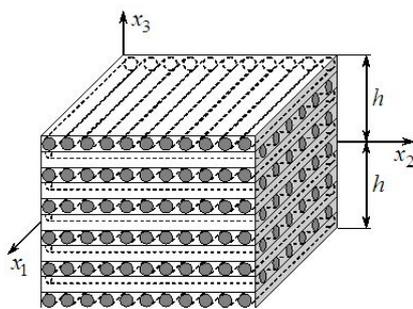


Рис. 1. Элемент армированной композитной пологой оболочки или пластины

оболочки ($|x_3| \leq h$); координатные линии Ox_1 и Ox_2 совпадают с линиями главной кривизны отсчетной поверхности; ось Ox_3 направлена по нормали к срединной поверхности. Пологая оболочка перекрестно армирована по поверхностям, эквидистантным срединной поверхности; структура армирования в поперечном направлении Ox_3 квазиоднородна (Рис. 1) На рисунке изображен малый элемент такой конструкции, причем его искривленность, в силу ее малости, не видна.

Чтобы описать ослабленное сопротивление такой армированной пологой оболочки поперечному сдвигу, для осредненных деформаций ее композиции — ε_{i3} , примем аппроксимацию [26]:

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{x_3 + h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \frac{x_3 - h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(-)}(t, \mathbf{x}) + \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \sum_{k=0}^K x_3^k \varepsilon_{i3}^{(k)}(t, \mathbf{x}), \quad (1)$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\} \quad (i=1, 2),$$

где $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$, $\varepsilon_{i3}^{(k)}$ — функции двух пространственных переменных x_1, x_2 и времени t , имеющие следующий смысл: $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ — деформации поперечных сдвигов на верхней и нижней ($x_3 = \pm h$) лицевых поверхностях полой оболочки, при $\varepsilon_{i3}^{(\pm)} = 0$ функции $\varepsilon_{i3}^{(0)}$ определяют деформации поперечных сдвигов в точках срединной поверхности ($x_3 = 0$); K — целое число, обуславливающее количество слагаемых, удерживаемых в частичной сумме; t_0 — начальный момент времени; G — область, занимаемая полой оболочкой в плане. При $K = 0$ из (1) вытекают соотношения, соответствующие теории Редди [23–25].

Исходя из традиционной для тонкостенных элементов конструкций кинематической гипотезы, пренебрежем изменчивостью перемещения $U_3(t, \mathbf{r})$ в направлении Ox_3 [6–11, 14–17, 23–26]:

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (2)$$

где w — прогиб точек срединной поверхности ($x_3 = 0$).

Согласно дифференциальным соотношениям, связывающим деформации с перемещениями (см. стр. 78 в [7]), в приближении Кармана с учетом соотношений (1) и (2) получим:

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{k+1} - \frac{x_3^2}{k+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(k)} + \frac{x_3}{h} \left(\frac{x_3}{2} + h \right) \varepsilon_{i3}^{(+)} - \frac{x_3}{h} \left(\frac{x_3}{2} - h \right) \varepsilon_{i3}^{(-)} \quad (i=1, 2); \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2} (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) - x_3 \partial_1 \partial_2 w + \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{k+1} - \frac{x_3^2}{k+3} \right) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(k)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(k)}) + \\ &+ \frac{x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} + h \right) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(+)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(+)}) - \frac{x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} - h \right) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(-)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(-)}) + \frac{1}{2} \partial_1 w \partial_2 w, \\ \varepsilon_{ii}(t, \mathbf{r}) &= \partial_i u_i - x_3 \partial_i^2 w + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{k+1} - \frac{x_3^2}{k+3} \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(k)} + \frac{x_3}{h} \left(\frac{x_3}{2} + h \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(+)} - \\ &- \frac{x_3}{h} \left(\frac{x_3}{2} - h \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(-)} + \frac{w}{R_i} + \frac{1}{2} (\partial_i w)^2, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0 \quad (i=1, 2), \end{aligned} \quad (4)$$

где U_i — перемещения точек полой оболочки в тангенциальных направлениях Ox_i ; u_i — то же для точек отсчетной поверхности ($x_3 = 0$); R_i — главные радиусы кривизны срединной поверхности; ∂_i — оператор частного дифференцирования по переменной x_i ($i=1, 2$). Суммирование по повторяющимся индексам в настоящем исследовании не производится.

Таким образом, в равенствах (1)–(4) неизвестны функции w , u_i , $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$, $\varepsilon_{i3}^{(k)}$ ($i=1, 2$, $0 \leq k \leq K$), зависящие от времени t и только двух пространственных координат x_1 и x_2 .

Как и в работе [24], предположим, что материалы композиции оболочки однородны и изотропны, причем их упругопластическое поведение характеризуется определяющими соотношениями теории течения с изотропным упрочнением. Деформации компонентов композиции будем считать малыми. Используя традиционную для тонкостенных элементов конструкций силовую гипотезу $\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \approx 0$ [6–11, 14–17, 23–26] и следуя рассуждениям из [24], придем к матричному определяющему уравнению для рассматриваемой композитной полой оболочки из упругопластических материалов:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (5)$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \{\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{12}, \dot{\sigma}_{13}, \dot{\sigma}_{23}\}^T, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \{\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\varepsilon}_{12}, \dot{\varepsilon}_{13}, \dot{\varepsilon}_{23}\}^T; \quad (6)$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — пятикомпонентные векторы-столбцы, элементами которых являются скорости осредненных напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в композиции; \mathbf{B} — 5×5 -матрица, вычисляемая по формуле (33) из [24], элементы которой b_{ij} зависят от упругопластического состояния материалов компонентов композиции и структуры армирования; индекс T — знак операции транспонирования.

Осредненные напряжения в композиции σ_{ij} должны удовлетворять уравнениям динамического равновесия армированной среды, которые с учетом (2) имеют вид [7, 33]:

$$\rho \ddot{U}_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \partial_j (\sigma_{ij} - \sigma_{j3} \partial_i w) + R_i^{-1} \sigma_{i3} + X_i(t, \mathbf{r}) \quad (i=1, 2); \quad (7)$$

$$\rho \ddot{U}_3(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(\sigma_{j3} + \sum_{l=1}^2 \sigma_{jl} \partial_l w \right) + \partial_3 \sigma_{33} - \sum_{l=1}^2 R_l^{-1} \sigma_{ll} + X_3(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (8)$$

где (см. [19, 21])

$$\rho = \rho_0 \omega_0 + \sum_{s=1}^N \rho_s \omega_s, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{s=1}^N \omega_s; \quad (9)$$

ρ_0, ρ_s — объемная плотность материала связующей матрицы и армирующих волокон s -го семейства в представительной ячейке композиции; N — количество семейств арматуры; X_i — компоненты объемной нагрузки, действующей на армированный материал (определяются по правилу простой смеси, аналогично (9)); точка над символом означает дифференцирование по времени t .

Для вывода уравнений движения гибкой полой оболочкой, содержащих силовые факторы, проинтегрируем равенства (7) по толщине конструкции с весами x_3^l , а уравнение (8) — с весом 1,0. Тогда, приняв во внимание соотношение (2), получим:

$$\rho \ddot{u}_i^{(l)} = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w \right) - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w + h^l \left[\sigma_{i3}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{i3}^{(-)} \right] - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w + R_i^{-1} M_{i3}^{(l)} + X_i^{(l)}, \quad i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1; \quad (10)$$

$$2h \rho \ddot{w} = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w \right) - \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} M_{ii}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} + X_3^{(0)}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} X_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-h}^h X_i(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, & 1 \\ \sigma_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) &= \sigma_{i3}(t, \mathbf{x}, \pm h), & 2 \\ M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, & 3 \\ u_m^{(l)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-h}^h U_m(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, & 4 \end{aligned} \quad (i, j = \overline{1, 3}, \quad m = 1, 2). \quad (12)$$

При выводе уравнений (10) использована формула интегрирования по частям.

В соответствии с равенством (12)₃ имеем: $M_{ij}^{(0)} \equiv F_{ij}$, $M_{ij}^{(1)} \equiv M_{ij}$ — мембранные усилия и изгибающие и крутящие механические моменты в полой оболочке; $M_{i3}^{(0)} \equiv F_{i3}$ ($i=1, 2$) — поперечные силы; остальные силовые факторы в (10) — математические моменты высших порядков. Согласно соотношению (12)₂ напряжения $\sigma_{i3}^{(\pm)}$ известны из силовых граничных условий, заданных на лицевых поверхностях оболочки ($x_3 = \pm h$). Так как толщина полой оболочки много меньше ее характерного размера в плане, а также в силу того, что исследуется динамическое поведение композитной конструкции как гибкой тонкостенной механической системы, напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для практических приложений точностью может быть линейно аппроксимировано по переменной x_3 :

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0. \quad (13)$$

Используя соотношение (12)₃, с учетом (13) вычислим в уравнениях (10) множитель:

$$l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) = l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \frac{h^l}{2} \left[(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^l) + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l) \right], \quad 0 \leq l \leq K+1. \quad (14)$$

К уравнениям движения (10) и (11) следует добавить четыре силовых граничных условия на лицевых поверхностях пологой оболочки (см. выражения (1), (4)–(6), (12)):

$$\sum_{j=1}^2 b_{i+3,j}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \dot{\varepsilon}_{jj}(t, \mathbf{x}, \pm h) + b_{i+3,3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \dot{\varepsilon}_{12}(t, \mathbf{x}, \pm h) + \sum_{j=1}^2 b_{i+3,j+3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \dot{\varepsilon}_{j3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \dot{\sigma}_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}), \quad (15)$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0 \quad (i=1, 2),$$

где $b_{i,j}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv b_{i,j}(t, \mathbf{x}, \pm h)$; $b_{i,j}(t, \mathbf{r})$ ($i=4, 5, j=\overline{1, 5}$) — компоненты матрицы \mathbf{B} в равенстве (5). Правые части в (15), согласно соотношениям (12)₂, известны.

При $K=0$, $\sigma_{i3}^{(\pm)}=0$ и $X_j=0$ ($i=1, 2, j=1, 3$) уравнения движения (10) и (11) с учетом выражений (12), (14), при соответствующих переобозначениях, полностью совпадают с аналогичными уравнениями, полученными ранее в [24] в рамках теории Редди.

Для однозначного интегрирования исследуемой начально-краевой задачи нужно знать граничные и начальные условия. Предположим, что на одной части торцевой поверхности пологой оболочки (обозначим ее G_σ) заданы силовые граничные условия, которые в рамках принятого приближения (см. (2)) имеют вид [7, 33]:

$$n_1(\sigma_{i1} - \sigma_{13} \partial_i w) + n_2(\sigma_{i2} - \sigma_{23} \partial_i w) = p_i(t, \mathbf{r}) \quad (i=1, 2); \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^2 n_j \left(\sigma_{j3} + \sum_{l=1}^2 \sigma_{jl} \partial_l w \right) = p_3(t, \mathbf{r}), \quad n_1 = \cos \gamma, \quad n_2 = \sin \gamma, \quad \mathbf{r} \in G_\sigma, \quad t \geq t_0, \quad (17)$$

а на другой части торцевой поверхности (обозначим ее G_u) выполняются кинематические граничные условия (см. (2) и (3)):

$$w(t, \mathbf{x}) = U_{*3}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u; \quad (18)$$

$$U_j(t, \mathbf{r}) = U_{*j}(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G_u, \quad t \geq t_0, \quad j=1, 2, \quad (19)$$

где p_i — известные на поверхности G_σ внешние распределенные нагрузки, действующие в направлениях x_i ($i=\overline{1, 3}$); Γ_u — проекция части торцевой поверхности G_u на отсчетную поверхность $x_3=0$ (то есть Γ_u — часть контура Γ , ограничивающего область G , занимаемую пологой оболочкой в плане); U_{*3} — заданный на Γ_u прогиб; U_{*j} — известные на торцевой поверхности G_u перемещения в тангенциальных направлениях x_j ($j=1, 2$); γ — угол, определяющий направление внешней нормали к контуру Γ (что вполне оправдано в случае пологой оболочки) и отсчитываемый от оси Ox_1 .

В момент времени $t=t_0$ следует сформулировать начальные условия (см. (2) и (3)):

$$w(t_0, \mathbf{x}) = U_{03}(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \quad (20)$$

$$U_j(t_0, \mathbf{r}) = U_{0j}(\mathbf{r}), \quad \dot{U}_j(t_0, \mathbf{r}) = V_{0j}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h \quad (j=1, 2), \quad (21)$$

где U_{0i}, V_{0i} ($i=\overline{1, 3}$) — известные в начальный момент времени t_0 перемещения и скорости точек пологой оболочки.

Для записи граничных условий в силовых факторах (см. (10) и (11)), проинтегрируем (17) по толщине пологой оболочки, а (16) — по x_3 с весами x_3^l . Тогда, используя равенство (12)₃, будем иметь:

$$n_1(M_{i1}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_i w) + n_2(M_{i2}^{(l)} - M_{23}^{(l)} \partial_i w) = P_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) \quad (i=1, 2, 0 \leq l \leq K+1),$$

$$\sum_{j=1}^2 n_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{l=1}^2 M_{jl}^{(0)} \partial_l w \right) = P_3^{(0)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad t \geq t_0, \quad (22)$$

где

$$P_j^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h p_j(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad j=1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad \mathbf{r} \in G_\sigma; \quad (23)$$

Γ_σ — проекция части торцевой поверхности G_σ на отсчетную поверхность оболочки $x_3 = 0$ ($\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$); $P_i^{(l)}$, $P_3^{(0)}$ — заданные на контуре Γ_σ силовые факторы, причем, согласно (23), $P_i^{(0)}$ и $P_3^{(0)}$ — известные погонные усилия, действующие в направлениях x_i и x_3 , а $P_i^{(l)}$ ($i = 1, 2$) — заданные погонные механические моменты, остальные же величины в правых частях (22) — фиксированные математические моменты высших порядков.

Разложения (3) по степеням переменной x_3 являются конечными, поэтому начальные условия (21) и кинематические граничные условия (19) в общем случае нельзя удовлетворить в каждой точке \mathbf{r} оболочки (см. (21)) или ее торцевой поверхности G_u (см. (19)) при произвольных зависимостях функций U_{*i} , U_{0i} , V_{0i} от x_3 . В силу этого начальные (21) и кинематические граничные (19) условия подобно силовым граничным условиям (см. (16), (17), (22) и (23)) будем удовлетворять в интегральном смысле, то есть равенства (19) и (21) проинтегрируем по толщине пологой оболочки с весами x_3^l , после чего, учитывая соотношение (12)₄, получим

$$u_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) = u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K + 1; \quad (24)$$

$$u_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K + 1, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, & u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\ v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, & i = 1, 2, & \quad 0 \leq l \leq K + 1; \end{aligned} \quad (26)$$

$u_{*i}^{(l)}$, $u_{0i}^{(l)}$, $v_{0i}^{(l)}$ — известные функции.

Таким образом, для однозначного интегрирования исследуемой начально-краевой задачи в каждой точке области G в момент времени t_0 нужно определить начальные условия (20) и (25) с учетом (26), а в каждой точке контура Γ — силовые (22) или кинематические (18) и (24) граничные условия при обозначениях (23) и (26). Могут быть использованы и смешанные из (18), (22) и (24) граничные условия, например, при шарнирном опирании кромки оболочки.

Проинтегрируем соотношения (3) по толщине пологой оболочки с весами x_3^l ($0 \leq l \leq K + 1$). Тогда на основании (12)₄ получим матричные равенства

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{u}_i + \bar{\mathbf{w}}\partial_i w - \mathbf{e}^{(+)}\boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(+)} + \mathbf{e}^{(-)}\boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(-)} \quad (i = 1, 2), \quad (27)$$

где

$$\mathbf{u}_i = \{u_i^{(0)}, u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(K)}, u_i^{(K+1)}\}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i = \{\varepsilon_i, \varepsilon_{i3}^{(0)}, \varepsilon_{i3}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{i3}^{(K-1)}, \varepsilon_{i3}^{(K)}\}^T; \quad (28)$$

$\mathbf{C} = (c_{ij})$ — $(K + 2) \times (K + 2)$ -матрица; $\mathbf{w} = \{w_i\}$; $\mathbf{e}^{(\pm)} = \{e_i^{(\pm)}\}$ — $(K + 2)$ -компонентные векторы-столбцы. Элементы перечисленных матриц находятся по формулам:

$$\begin{aligned} c_{l+1,1} &= \frac{h^{l+1}}{l+1} (1 + (-1)^l), & c_{l+1,k+2} &= 2h^{l+k+2} (1 - (-1)^{l+k}) \left[\frac{1}{(k+1)(l+k+2)} - \frac{1}{(k+3)(l+k+4)} \right], \\ w_{l+1} &= \frac{h^{l+2}}{l+2} (1 - (-1)^l), & e_{l+1}^{(\pm)} &= h^{l+2} \left[\frac{1 + (-1)^l}{2(l+3)} \pm \frac{1 - (-1)^l}{l+2} \right], \quad 0 \leq l \leq K + 1, \quad 0 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (29)$$

Так как компоненты матрицы \mathbf{C} и векторов-столбцов \mathbf{w} , $\mathbf{e}^{(\pm)}$, согласно (29), вычисляются только один раз, уравнения (27) удобно привести к виду

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}_i + \bar{\mathbf{w}}\partial_i w - \bar{\mathbf{e}}^{(+)}\boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(+)} + \bar{\mathbf{e}}^{(-)}\boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(-)} \quad (i = 1, 2), \quad (30)$$

где

$$\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{w}, \quad \bar{\mathbf{e}}^{(\pm)} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}^{(\pm)}; \quad (31)$$

\mathbf{C}^{-1} — матрица, обратная матрице \mathbf{C} .

Если в текущий момент времени t известны значения функций $u_i^{(l)}$, w , $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ ($0 \leq l \leq K+1$), то из матричных равенств (30) с учетом соотношений (28), (29) и (31) можно рассчитать значения функций u_i , $\varepsilon_{i3}^{(k)}$ ($i=1, 2$, $0 \leq k \leq K$), определяющих средние деформации (1), (4) и тангенциальные перемещения (3) в полой оболочке.

При динамических нагрузках взрывного типа касательными нагрузками на лицевых поверхностях полой оболочки можно пренебречь [29, 31], то есть

$$\sigma_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \sigma_{i3}(t, \mathbf{x}, \pm h) \approx 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0 \quad (i=1, 2). \tag{32}$$

В работе [24] было показано, что при выполнении равенств (32) имеем

$$\varepsilon_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{x}, \pm h) \approx 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0 \quad (i=1, 2). \tag{33}$$

Таким образом, при действии только нормальных внешних поверхностных нагрузок (см. (32)) осредненные деформации поперечных сдвигов на лицевых поверхностях оболочки $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ ($i=1, 2$) в соотношениях (1), (3), (4), (27), (30) можно считать равными нулю. В этом случае силовые граничные условия (15) выполняются тождественно [24]. Здесь же следует отметить, что при использовании теории Рейсснера [10, 14, 24] граничные условия (15) на лицевых поверхностях полой оболочки вообще нельзя удовлетворить.

3. Численный метод расчета

Для построения численного решения рассматриваемой задачи прибегнем к методу шагов по времени [10, 24, 25, 27–31], то есть значения неизвестных функций будем разыскивать в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \tau$ ($n=0, 1, 2, \dots$), где $\tau = \text{const} > 0$ — шаг по времени.

Предположим, что в моменты времени t_m значения следующих функций уже известны:

$$\begin{aligned} w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_i^{(l)m}(\mathbf{x}) \equiv u_i^{(l)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{j3}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{j3}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \dot{\sigma}_{i3}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) \equiv \dot{\sigma}_{i3}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \\ \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \quad \sigma_{ij}^{(s)m}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}^{(s)}(t_m, \mathbf{r}), \quad X_j^m(\mathbf{r}) \equiv X_j(t_m, \mathbf{r}), \quad \varepsilon_{i3}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon_{i3}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \end{aligned} \tag{34}$$

$$i=1, 2, \quad j=1, 3, \quad m=n-1, n, \quad 0 \leq l \leq K+1, \quad 0 \leq s \leq N, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h,$$

где $\sigma_{ij}^{(s)}$ — компоненты тензора напряжений в s -й фазе композиции полой оболочки ($s=0$ — связующая матрица, $s=1, 2, \dots, N$ — арматура s -го семейства). Тогда из формулы (12)₃ с учетом соотношений (14) и (34) в момент времени t_n можно вычислить все внутренние силовые факторы $M_{ij}^{(l)}$, которые входят в правые части уравнений движения (10), (11) и силовые граничные условия (22).

Производные по времени t далее будем аппроксимировать центральными конечными разностями [10, 24, 25, 27, 28], что позволит при выполнении равенств (32) построить явную численную схему для интегрирования исследуемой задачи. При этом конечно-разностные аналоги уравнений движения (10) и (11) при обозначениях, аналогичных равенствам (34), запишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\tau^2} \left(w - 2w + w \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w \right) - \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} M_{ii}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} + X_3^{(0)}, \\ \frac{\rho}{\tau^2} \left(u_i^{(l)} - 2u_i^{(l)} + u_i^{(l)} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w \right) + h^l \left[\sigma_{i3}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{i3}^{(-)} \right] - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w - \\ &- l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w + R_i^{-1} M_{i3}^{(l)} + X_i^{(l)} \quad (i=1, 2), \quad 0 \leq l \leq K+1, \quad \mathbf{x} \in G \quad (n=1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \tag{35}$$

Правые части в уравнениях (35) известны, поэтому, добавив к ним необходимые граничные условия (18), (22) и (24), из равенств (35) с учетом (23), (26) и (34) можем вычислить по явной схеме значения неизвестных функций w и $u_i^{(l)}$ ($i=1, 2$, $0 \leq l \leq K+1$) для следующего момента времени — t_{n+1} .

Если в граничных условиях (15) производные по времени $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и $\dot{\varepsilon}_{i3}^{(\pm)}$ аппроксимировать центральными конечными разностями, то для момента времени t_n будем иметь:

$$\sum_{j=1}^2 b_{i+3,j}^{(\pm)} \varepsilon_{jj} \Big|_{x_3=\pm h}^{n+1} + b_{i+3,3}^{(\pm)} \varepsilon_{12} \Big|_{x_3=\pm h}^{n+1} + \sum_{j=1}^2 b_{i+3,j+3}^{(\pm)} \varepsilon_{j3}^{n+1} = S_{i3}^{(\pm)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G \quad (i=1, 2), \quad (36)$$

где

$$S_{i3}^{(\pm)} \equiv 2\tau \dot{\sigma}_{i3}^{(\pm)} + \sum_{j=1}^2 b_{i+3,j}^{(\pm)} \varepsilon_{jj} \Big|_{x_3=\pm h}^{n-1} + b_{i+3,3}^{(\pm)} \varepsilon_{12} \Big|_{x_3=\pm h}^{n-1} + \sum_{j=1}^2 b_{i+3,j+3}^{(\pm)} \varepsilon_{j3}^{n-1} \quad (i=1, 2). \quad (37)$$

В силу равенств (4), (30), (34) и (37) правые части в (36) известны в момент времени t_n . Подставляя в левые части (36) соотношения (4) и выражения (30), после некоторых элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 b_{i+3,j}^{(\pm)} \left\{ \left[2H_{(-)}^{(\pm)} \pm h \left(1 \mp \frac{1}{2} \right) \right] \partial_j \varepsilon_{j3}^{n+1} - \left[2H_{(+)}^{(\pm)} \mp h \left(1 \pm \frac{1}{2} \right) \right] \partial_j \varepsilon_{j3}^{n+1} \right\} + \\ & + b_{i+3,3}^{(\pm)} \left\{ \left[2H_{(-)}^{(\pm)} \pm h \left(1 \mp \frac{1}{2} \right) \right] \left(\partial_1 \varepsilon_{23}^{n+1} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{n+1} \right) - \left[2H_{(+)}^{(\pm)} \mp h \left(1 \pm \frac{1}{2} \right) \right] \left(\partial_1 \varepsilon_{23}^{n+1} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{n+1} \right) \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^2 b_{i+3,j+3}^{(\pm)} \varepsilon_{j3}^{n+1} = S_{i3}^{(\pm)} - \sum_{j=1}^2 b_{i+3,j}^{(\pm)} \left[\sum_{l=0}^{K+1} (\bar{c}_{1,l+1} + 2\bar{c}_{l+1}^{(\pm)}) \partial_j u_j^{n+1} + (\bar{w}_1 \mp h + 2\bar{w}^{(\pm)}) \partial_j^2 w + R_j^{-1} w + \frac{1}{2} (\partial_j w)^2 \right] - \\ & - b_{i+3,3}^{(\pm)} \left[\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{K+1} (\bar{c}_{1,l+1} + 2\bar{c}_{l+1}^{(\pm)}) \left(\partial_1 u_2^{n+1} + \partial_2 u_1^{n+1} \right) + (\bar{w}_1 \mp h + \bar{w}^{(\pm)}) \partial_1 \partial_2 w + \frac{1}{2} \partial_1 w \partial_2 w \right], \quad \mathbf{x} \in G, \quad i=1, 2, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} H_{(-)}^{(\pm)} & \equiv \sum_{k=-1}^{K+1} h_k^{(\pm)} \bar{e}_{k+2}^{(-)} \quad ((-) \rightarrow (+)), \quad \bar{c}_{l+1}^{(\pm)} \equiv \sum_{k=0}^{K+1} h_k^{(\pm)} \bar{c}_{k+2,l+1}, \quad \bar{w}^{(\pm)} \equiv \sum_{k=0}^{K+1} h_k^{(\pm)} \bar{w}_{k+2}, \\ h_{-1}^{(\pm)} & \equiv \frac{1}{2}, \quad h_k^{(\pm)} \equiv (\pm h)^{k+1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right), \quad 0 \leq k \leq K; \end{aligned} \quad (39)$$

$\bar{c}_{i,j}$ и \bar{w}_i , $\bar{e}_i^{(\pm)}$ — компоненты матрицы \mathbf{C}^{-1} и векторов-столбцов $\bar{\mathbf{w}}$, $\bar{\mathbf{e}}^{(\pm)}$ (см. (30) и (31)).

Так как значения функций w , $u_i^{(l)}$ ($i=1, 2$, $0 \leq l \leq K+1$) предполагаются уже известными из уравнений (35), то правые части в равенствах (38), с учетом (37) и (39), также известны при $t=t_n$. При задании $i=1, 2$ и выборе верхних и нижних знаков « \pm », « \mp » четыре равенства (38) образуют систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, замкнутую относительно функций $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}(\mathbf{x})$. Изучение вопросов, связанных с корректной постановкой краевой задачи для уравнений (38), выходит за рамки настоящего исследования. Отметим лишь, что в тех случаях нагружения пологих оболочек, когда возникает необходимость решать краевую задачу для системы (38), построить явную схему для численного интегрирования рассматриваемой задачи не удастся. Если же на конструкцию действуют, например, нагрузки взрывного типа, то есть справедливы равенства (32) и деформации $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ известны из (33), то возможно построение явной схемы типа «крест» (как это сделано в [24] на базе теории Редди, то есть при $K=0$). Поэтому далее будем исследовать именно этот случай.

Подчеркнем, что в рамках теории Рейсснера, основанной на кинематической гипотезе независимой ротации недеформируемой нормали к отсчетной поверхности, всегда можно разработать явную схему типа «крест» [10]. Однако при использовании этой теории граничные условия (15) на лицевых поверхностях оболочки даже в случае приближенных равенств (32) не выполняются [24].

Предположим, что в момент времени t_{n+1} значения функций $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ уже известны из равенств (33) (или из решения соответствующей краевой задачи для системы уравнений (38)), поэтому по формулам (30) с учетом (28), (29) и (31) при известных w , $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ и $u_i^{(l)}$ ($0 \leq l \leq K+1$) можно определить значения функций u_i , $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ ($i=1, 2$, $0 \leq k \leq K$), а затем на основании (1), (4) вычислить и осредненные деформации ε_{ij} в каждой точке армированной полой оболочки. Далее построение решения осуществляется совершенно так же, как и в [24] (см. там соотношения (49)–(51)).

В силу самой структуры левых частей равенств (35) для начала расчета по предложенной выше явной численной схеме необходимо знать как значения функций w и $u_i^{(l)}$, которые известны из начальных

условий (20) и (25), так и $w^1, u_i^{(l)}$ (см. (35) при $n = 1$). Последние величины рассчитаем на основе формулы Тейлора при начальных условиях (20), (25) и с учетом уравнений движения (10), (11) при $t = t_0$ [28]:

$$\begin{aligned} w^1(\mathbf{x}) &= w^0(\mathbf{x}) + \tau \dot{w}^0(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{w}^0(\mathbf{x}) + O(\tau^3) \approx 0, \\ u_i^{(l)}(\mathbf{x}) &= u_i^{(l)0}(\mathbf{x}) + \tau \dot{u}_i^{(l)0}(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}_i^{(l)0}(\mathbf{x}) + O(\tau^3) \approx 0 \quad (i=1, 2), \quad 0 \leq l \leq K+1, \quad \mathbf{x} \in G. \end{aligned} \quad (40)$$

Приближенные равенства в (40) выполняются с точностью порядка τ^3 , причем нули справа получаются в случае естественного начального состояния, когда в момент времени t_0 полая оболочка покоится ($U_{0i} \equiv 0, V_{0i} \equiv 0$; см. начальные условия (20) и (21)) и отсутствуют внешние нагрузки ($\sigma_{i3}^{(\pm)}(t_0, \mathbf{x}) \equiv 0, X_i(t_0, \mathbf{r}) \equiv 0, i = \overline{1, 3}$ в соотношениях (10)–(12)).

Если область G , занимаемая полой оболочкой, является прямоугольной в плане, то, аппроксимируя в равенствах (35) и (22) производные $\partial_i(\cdot)$ по переменным x_i конечными разностями известных (согласно (12)₃ и (34)) в момент времени t_n сеточных функций, в случае выполнения соотношений (32), (33) построим явную схему типа «крест» [10, 24, 25, 27, 28]. Для неканонической области G дискретизацию уравнений (35) и силовых граничных условий (22) по пространственным переменным x_i ($i = 1, 2$) можно осуществить на основе вариационно-разностного подхода, приведенного в [10].

Необходимые условия устойчивости численной схемы типа «крест» для тонкостенных элементов конструкций, в соответствии с [10], являются следствиями условий Куранта–Фридрихса–Леви [27] и для рассматриваемой полой армированной оболочки характеризуются неравенствами (60) из [24].

4. Обсуждение результатов расчетов

В качестве конкретных примеров исследуем динамическое поведение упругопластических композитных полых оболочек разной в плане формы G : 1) сферической оболочки ($R_1 = R_2 \equiv R$) толщиной $2h = 1$ см, для которой G — кольцо, ограниченное радиусами $r_0 = 10$ см, $r_1 = 60$ см (Рис. 2а); 2) цилиндрических ($1/R_1 = 0, R_2 \equiv R$) прямоугольных, удлиненных в плане панелей шириной $L = 1$ м и толщиной $2h = 2$ см или $2h = 10$ см (Рис. 2б). Оболочки характеризуются разной величиной стрелы подъема f над опорными контурами. В случае сферической оболочки под f понимаем возвышение полюсной точки над внешней кромкой, имеющей радиус r_1 . При этом из геометрических соображений следует:

$$R = \frac{r_1^2 + f^2}{2f}, \quad 0 \leq f \leq \frac{2}{5} r_1. \quad (41)$$

Для цилиндрической панели в (41) нужно принять $2r_1 = L$.

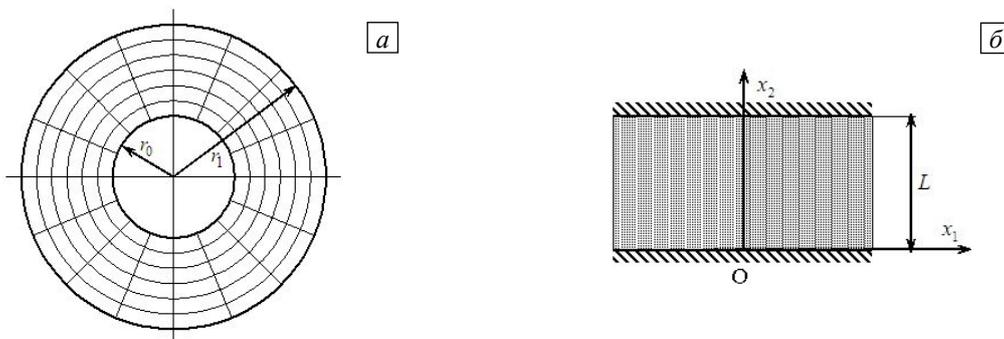


Рис. 2. Структуры рассматриваемых композитных конструкций: радиально-окружное армирование полой сферической оболочки или кольцевой пластины (а); «поперечное» армирование прямоугольной, удлиненной в плане цилиндрической панели (б)

Объемные нагрузки не учитываются, то есть $X_i \equiv 0, i = \overline{1, 3}$ (см. формулу (12)₁). Касательными нагрузками на лицевых поверхностях полой оболочки пренебрегаем (см. (32)), поэтому выполняются равенства (33). Конструкции нагружаются давлением (фронтальной нагрузкой), вызванным воздушной взрывной волной [29],

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t-t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (42)$$

которое прикладывается к нижней ($x_3 = -h$) или верхней ($x_3 = h$) лицевым поверхностям оболочки (см. (10), (11), (13), (14) и (35)), причем

$$\alpha = -\ln(0,01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (43)$$

$$\sigma_{33}^{(-)}(t) = \begin{cases} -p(t), & p_{\max} > 0, \\ 0, & p_{\max} < 0, \end{cases} \quad \sigma_{33}^{(+)}(t) = \begin{cases} 0, & p_{\max} > 0, \\ p(t), & p_{\max} < 0. \end{cases} \quad (44)$$

В (42)–(44) приняты обозначения: t_{\max} — момент времени, в который давление $p(t)$ достигает максимального по модулю значения $|p_{\max}|$; t_{\min} — момент времени, при котором давление $p(t)$ становится по модулю пренебрежимо малым по сравнению с $|p_{\max}|$ (согласно (43), принято, что $p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$). На основании экспериментальных данных [29] зададим $t_{\max} = 0,1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс или $t_{\min} = 200$ мс. В соответствии с (44) считаем далее, что при $p_{\max} > 0$ давление (42) действует со стороны нижней (вогнутой) лицевой поверхности, а при $p_{\max} < 0$ — со стороны верхней (выпуклой) лицевой поверхности.

В момент времени $t = t_0 = 0$ конструкции находятся в естественном состоянии покоя (см. начальные условия (20) и (25) с учетом (26) при $U_{0i} \equiv 0, V_{0i} \equiv 0, i = \overline{1, 3}$), а внешняя нагрузка отсутствует (см. (42)), поэтому справедливы равенства (40).

Армированные конструкции изготовлены из эпоксидной смолы, отвержденной ароматическим амином, и усилены стекловолокнами марки S-994. Упругопластическое поведение материалов фаз композиции на стадии их активного нагружения описывается диаграммой с линейным упрочнением [24]:

$$\sigma = \begin{cases} E_m \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(m)} = \sigma_s^{(m)} / E_m, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(m)} + E_s^{(m)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(m)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(m)}, \quad 0 \leq m \leq N, \end{cases} \quad (45)$$

где σ, ε — напряжение и деформация при осевом растяжении или сжатии материала; $E_m, E_s^{(m)}$ — модули Юнга и линейного упрочнения материала m -й фазы композиции; $\sigma_s^{(m)}, \varepsilon_s^{(m)}$ — предел текучести и соотносящаяся с ним деформация того же материала. Физико-механические характеристики материалов фаз композиции пологих оболочек указаны в таблице, где ν — коэффициент Пуассона, a — скорость звука.

Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции пологих оболочек [19, 20]

| Материал | $\rho, \text{кг} / \text{м}^3$ | ν | $\sigma_s, \text{МПа}$ | $E, \text{ГПа}$ | $E_s, \text{ГПа}$ | $a, \text{м/с}$ |
|---------------------|--------------------------------|-------|------------------------|-----------------|-------------------|-----------------|
| Эпоксидная смола | 1210 | 0,33 | 20 | 2,8 | 1,114 | 1521,2 |
| Стекловолокно S-994 | 2520 | 0,25 | 4500 | 86,8 | 6,230 | 5868,9 |

Пересчет механических характеристик по диаграмме (45) для использования их в определяющих уравнениях модели упругопластической среды с изотропным упрочнением (в том числе с учетом явления разгрузки) приведен в [24] (см. там же соотношения (61) и пояснения к ним), поэтому в данной работе не будем повторять соответствующие выкладки.

Предполагается, что полая сферическая оболочка осесимметрично армирована двумя семействами волокон ($N = 2$), одно из которых уложено в радиальном (меридиональном) направлении, а другое — в окружном (см. Рис. 2а). Так как волокна, как правило, имеют постоянные поперечные сечения [19], интенсивность армирования ω_1 радиально уложенных волокон в осесимметричном случае для полой оболочки определяется так [34]:

$$\omega_1(r) = r_0 \omega_{01} / r, \quad \omega_{01} \equiv \omega_1(r_0), \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (46)$$

где r — полярный радиус; ω_{01} — плотность армирования, заданная на внутренней кромке $r = r_0$.

Согласно формуле (46) интенсивность армирования ω_1 волокнами радиального семейства убывает от внутренней кромки $r = r_0$ к внешней $r = r_1$. Так как при укладке волокон в окружном направлении плотность армирования $\omega_2(r)$ может быть описана произвольной функцией радиуса r [34], зададим $\omega_2(r)$ такой, чтобы суммарная плотность армирования $\omega(r) = \omega_1(r) + \omega_2(r)$ была постоянной, причем примем $\omega(r) = \omega_{01} = 0,3$.

Внешнюю кромку $r = r_1$ пологой сферической оболочки считаем жестко закрепленной, то есть в соотношениях (18) и (24) нужно принять $U_{*3} \equiv 0$, $u_{*i}^{(l)} \equiv 0$ ($0 \leq l \leq K+1$), так как при $r = r_1$ имеем $U_{*i} \equiv 0$, $i = 1, 2$ (см. (26)). В отверстие такой оболочки вставлена абсолютно жесткая шайба, которая жестко прикреплена к оболочке по ее внутренней кромке, то есть имеют место условия сопряжения

$$w_0(t) = w|_{r=r_0}, \quad u_i^{(l)}|_{r=r_0} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad 0 \leq l \leq K+1, \quad t \geq t_0, \quad (47)$$

где w_0 — перемещение шайбы как жесткого целого в осевом направлении Ox_3 .

При рассматриваемых типах нагружения (см. (42)–(44)), закрепления (см. (47)) и структуре армирования в пологой сферической оболочке реализуется случай осесимметричного деформирования, то есть решения соответствующих начально-краевых задач динамики не зависят от полярного угла. При этом поперечный сдвиг и тангенциальное перемещение в окружном направлении отсутствуют ($u_2^{(l)} \equiv 0$, $0 \leq l \leq K+1$ и, согласно (28), (30), $u_2 \equiv 0$, $\varepsilon_{23}^{(l)} \equiv 0$, $0 \leq l \leq K$).

Для замыкания системы разрешающих уравнений в случае наличия жесткой шайбы нужно использовать уравнение ее движения, которое с учетом (42) и (44) имеет вид:

$$M_0 \ddot{w}_0 = \pi r_0^2 p(t) + 2\pi r_0 M_{13}^{(0)}(t, x_1)|_{r=r_0}, \quad t \geq t_0, \quad (48)$$

где M_0 — масса шайбы, $M_{13}^{(0)}$ — перерезывающая сила (см. (12)₃). Для шайбы зададим $\rho = 2710 \text{ кг/м}^3$ (это значение соответствует алюминиевым сплавам [19]) и толщину ее примем равной 2 см. По этим данным вычисляется масса M_0 .

При проведении расчетов в случае пологой сферической оболочки вдоль полярного радиуса r вводилась сетка с шагом $\Delta r = (r_1 - r_0)/100 = 5 \text{ мм}$, а шаг по времени составлял $\tau = 0,5 \text{ мкс}$. Согласно такой дискретизации $\Delta r/\tau = 10 \text{ км/с}$ и $2h/\tau = 20 \text{ км/с}$. Эти отношения превосходят значения a , приведенные в таблице. Следовательно, необходимые условия устойчивости разработанной численной схемы типа «крест» для сферической оболочки выполняются с запасом [24].

На рисунке 3 изображены зависимости $w_0(t)$, характеризующие осцилляции шайбы, вставленной в пологую сферическую композитную оболочку со стрелой подъема $f = 15 \text{ см}$ (см. (41)), рассчитанные по разным теориям при $t_{\min} = 2 \text{ мс}$ и различных значениях p_{\max} (см. (42) и (44)). При этом сплошные кривые 1 получены по уточненной теории при $K = 7$ (см. (1), (3), (4)), а пунктирные линии 2 — при $K = 0$, то есть по теории Редди. На рисунке 3а приведены результаты расчетов при $p_{\max} = -2 \text{ МПа}$, то есть, согласно (44), при нагружении конструкции со стороны верхней (выпуклой) лицевой поверхности, а на рисунке 3б — при $p_{\max} = 2 \text{ МПа}$, то есть при нагружении со стороны нижней (вогнутой) лицевой поверхности. В обоих случаях $t_{\min} = 2 \text{ мс}$, поэтому, в соответствии с (42), (43), при $t > 2 \text{ мс}$ и таких типах нагружения колебания пологих оболочек можно рассматривать как свободные.

Сопоставление кривых 1 и 2 на рисунке 3а показывает, что в течение первых двух периодов колебаний конструкции зависимости $w_0(t)$, установленные по обеим теориям, визуально практически совпадают. Однако с течением времени осцилляции все больше и больше различаются.

Качественно аналогичное поведение зависимостей $w_0(t)$ наблюдается и на рисунке 3б. Вблизи начального момента времени ($0 \leq t < 30 \text{ мс}$, то есть примерно в течение 10–12 первых периодов колебаний) кривые 1 и 2 почти неразличимы (деформированное же состояние в связующем материале в соответствующих расчетах разное), поэтому зависимости $w_0(t)$ при этих значениях времени

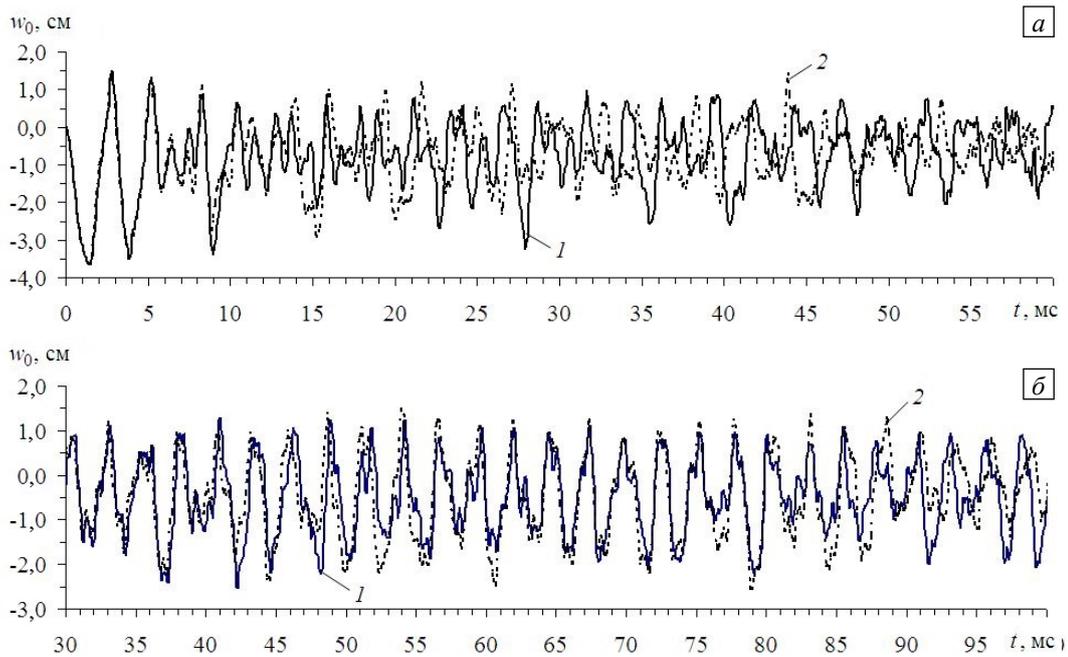


Рис. 3. Осцилляции шайбы в полой сферической оболочке при нагружении последней с разных сторон: (а) – по верхней (выпуклой) лицевой поверхности; (б) – по нижней (вогнутой) лицевой поверхности

на рисунке 3б не изображены. При $t > 30$ мс полученные для $w_0(t)$ решения теряют похожесть, и с течением времени их различие только усиливается.

Сравнение кривых на рисунке 3 свидетельствует о том, что со временем уточненное решение все в большей степени отличается от решения по теории Редди. С увеличением количества осцилляций несхожесть прогрессирует и становится существенно заметной уже при $t \approx 0,1$ с. Поэтому невысокая точность решения согласно теории Редди может привести в конечном итоге к неадекватным результатам расчетов, особенно в тех случаях, когда конструкции нагружаются повторно.

В работе [24] исследовалась динамика упругопластических армированных удлиненных прямоугольных пластин при цилиндрическом изгибе. Однако с практической точки зрения особый интерес вызывают армированные цилиндрические панели [7, 8]. Поэтому рассмотрим цилиндрические панели прямоугольной удлиненной в плане формы, которые ориентируем вдоль оси Ox_1 и жестко закрепим вдоль продольных кромок ($x_2 = 0, L$). Панели армированы волокнами одного семейства ($N = 1$) вдоль оси Ox_2 (Рис. 2б) с постоянной плотностью армирования ($\omega_1 = \text{const}$). Конструкции искривлены в направлении Ox_2 , поэтому $1/R_1 = 0$, $R_2 = R = \text{const}$.

Следует подчеркнуть, что структуры армирования, изображенные на рисунке 2, можно считать рациональными, так как при выполнении равенств (32) и (33) по крайней мере на лицевых поверхностях пологих оболочек ($x_3 = \pm h$), направления такого армирования совпадают с направлениями главных напряжений и деформаций.

Предполагается, что искривленные удлиненные прямоугольные в плане панели испытывают цилиндрический изгиб, то есть решение не зависит от продольной координаты x_1 . На рисунках 4 и 5 приведены зависимости $w_*(t) = w(t, L/2)$, характеризующие поперечные осцилляции точек центрального сечения $x_2 = L/2$ относительно тонкой цилиндрической панели ($2h = 2$ см, $2h/L = 1/50$) со стрелой подъема $f = 12$ см (см. (41)), рассчитанные при $\omega_1 = 0,3$, $t_{\min} = 2$ мс, $p_{\max} = -5$ МПа (Рис. 4; нагружение со стороны верхней — выпуклой — лицевой поверхности) и $p_{\max} = 5$ МПа (Рис. 5; нагружение со стороны нижней — вогнутой — лицевой поверхности). Результаты на рисунках 4а и 5а получены по теории Редди ($K = 0$), а на рисунках 4б и 5б — по уточненной теории при $K = 7$ (см. (1), (3), (4)).

Вычисления проводились при равномерном разбиении интервала $x_2 \in [0, L]$ с шагом $\Delta x_2 = L/100 = 1$ см для времени $\tau = 0,5$ мкс и $\Delta x_2/\tau = 20$ км/с, $2h/\tau = 40$ км/с. Указанные отношения значительно превосходят величины a , приведенные в таблице для материалов компонентов композиции. Следовательно, для таких панелей необходимые условия устойчивости схемы «крест» выполняются со значительным запасом [24].

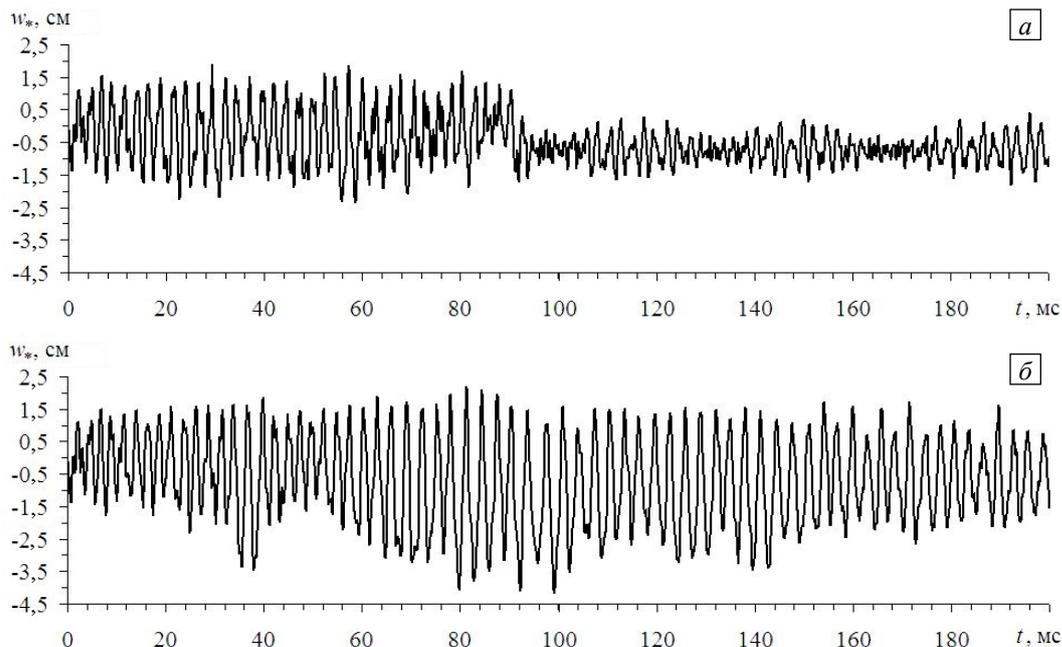


Рис. 4. Осцилляции центрального сечения относительно тонкой прямоугольной удлиненной в плане цилиндрической панели при нагружении со стороны верхней (выпуклой) лицевой поверхности, рассчитанные по разным теориям: (а) – теория Редди ($K = 0$); (б) – уточненная теория ($K = 7$)

Сопоставление кривых, изображенных на рисунках 4а, 5а, с кривыми рисунков 4б, 5б соответственно, показывает, что теория Редди гарантирует удовлетворительную точность расчетов по прогибам лишь на начальном этапе колебаний конструкции, равном 2–3-м первым периодам. При временах больших, чем 5–6 первых периодов колебаний рассматриваемой композитной панели, расчеты по теории Редди становятся совершенно неприемлемыми, так как могут в разы занижать ее амплитуды колебаний.

Сравнение кривых на рисунках 4б и 5б, свидетельствует, что динамическое поведение гибких пологих армированных оболочек из упругопластических материалов (в отличие от гибких пластин [24]) зависит от того, к какой лицевой поверхности (выпуклой или вогнутой) прикладывается внешняя поперечная нагрузка.

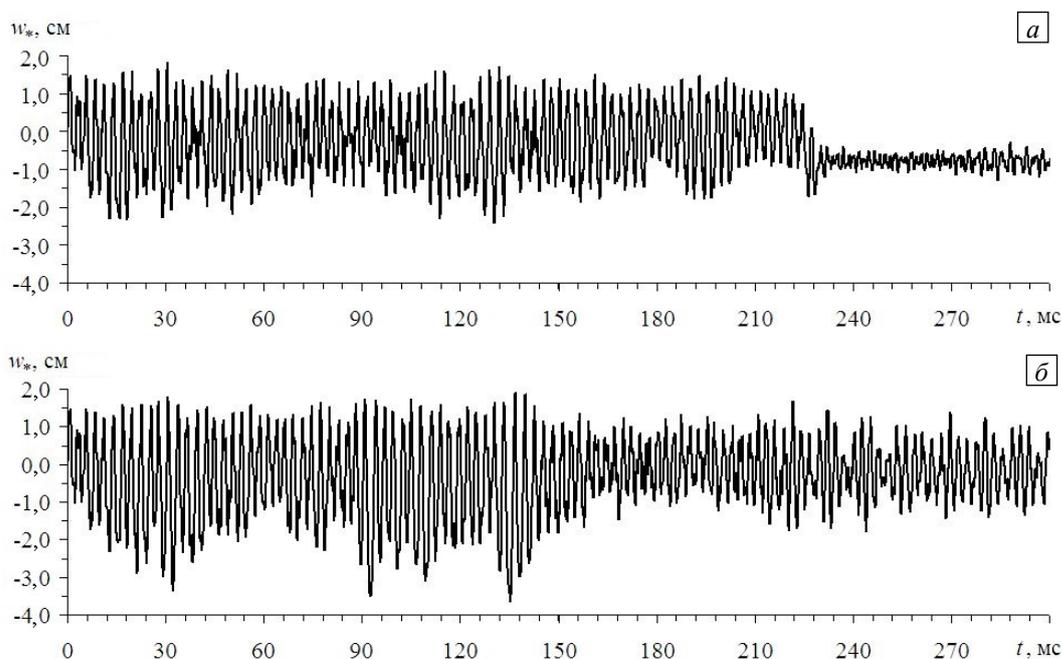


Рис. 5. Осцилляции центрального сечения относительно тонкой прямоугольной удлиненной в плане цилиндрической панели при нагружении со стороны нижней (вогнутой) лицевой поверхности, рассчитанные по разным теориям: (а) – теория Редди ($K = 0$); (б) – уточненная теория ($K = 7$)

В обсуждаемом случае $t_{\min} = 2$ мс, поэтому при $t > 2$ мс осцилляции такой цилиндрической панели можно считать свободными. Традиционно при изучении динамики тонкостенных конструкций ограничиваются, как правило, рассмотрением 2–3-х первых периодов их поперечных осцилляций [10, 24, 25, 29, 31, 32], считая, что дальнейшие колебания малоинтересны, так как являются свободными. Однако зависимости $w_*(t)$, изображенные на рисунках 4б и 5б говорят о том, что при ограничении в процессе исследования только 2–3-мя первыми периодами колебаний такой композитной панели нельзя адекватно оценить максимальное значение ее податливости при интенсивном нагружении взрывного типа. Действительно, особенности поведения кривых на рисунках 4б и 5б свидетельствуют, что в силу физической и геометрической нелинейности изучаемой задачи наибольшие по модулю прогибы такой панели достигаются не при первом локальном экстремуме зависимостей $w_*(t)$, а существенно позже, возможно, после нескольких десятков осцилляций конструкции (см. рисунки 4б и 5б). Следовательно, оценка податливости такой цилиндрической панели по 2–3-м первым периодам ее поперечных колебаний является ошибочной.

В работе [24] показано, что для относительно тонких ($2h/L \leq 1/50$) гибких композитных пластин результаты расчетов их упругопластического динамического поведения, проведенных в рамках теорий Рейсснера и Редди, по прогибам различаются незначительно. Однако для относительно толстых армированных пластин ($2h/L = 1/10$) прогибы, определенные по этим теориям, существенно разные (отличие порядка 10%) уже на первом периоде поперечных колебаний (см. Рис. 5 в [24]). При этом открытым остается вопрос о том, достаточную ли точность обеспечивает в этих случаях теория Редди. В связи с этим определим параметры динамического упругопластического поведения относительно толстых армированных цилиндрических панелей на базе теории Редди и уточненной теории и сравним их.

На рисунке 6 изображены зависимости $w_*(t)$, рассчитанные при $2h = 10$ см, $f = 15$ см, $\omega_1 = 0,5$, $t_{\min} = 200$ мс, $p_{\max} = -20$ МПа (Рис. 6а; нагружение со стороны верхней — выпуклой — лицевой поверхности) и $p_{\max} = 20$ МПа (Рис. 6б; нагружение со стороны нижней — вогнутой — лицевой поверхности). Использовалась прежняя дискретизация задачи, поэтому необходимые условия устойчивости схемы «крест» [24] и в этом случае выполняются со значительным запасом. Сплошные кривые 1 на рисунке 6 получены по уточненной теории ($K = 7$; см. (1), (3), (4)), а пунктирные линии 2 — по теории Редди ($K = 0$). Так как в этих случаях $t_{\min} = 200$ мс (см. (42), (43)), на рассматриваемом отрезке времени ($0 \leq t \leq 50$ мс) колебания такой конструкции не являются свободными.

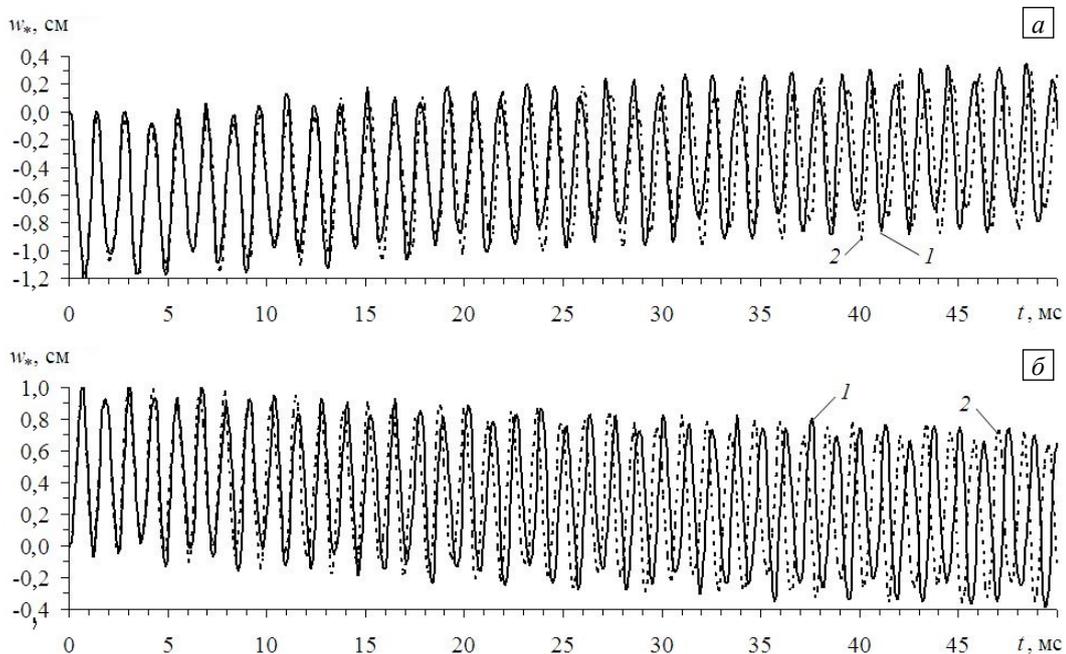


Рис. 6. Осцилляции центрального сечения относительно толстой прямоугольной удлиненной в плане цилиндрической пластины при нагружении по разным лицевым поверхностям: (а) – по верхней (выпуклой); (б) – по нижней (вогнутой)

Как видно из рисунка 6, с течением времени разность решений по прогибам, полученных в рамках теории Редди и уточненной теории, возрастает, результаты расчетов по теории Редди могут стать совершенно неприемлемыми уже при $t = 0,1$ с. Поведение всех кривых на рисунке 6 свидетельствует о том, что в случае относительно толстых цилиндрических панелей максимальные по модулю прогибы (в отличие от рисунков 4 и 5) достигаются уже на первом периоде колебаний таких конструкций.

Проведенные дополнительные расчеты показали, что разработанная в разделе 3 численная схема при $K \geq 8$ (см. формулы (1), (3), (4)), как правило, неустойчива. Объясняется это, по-видимому, тем, что для тонкостенных конструкций матрица C в соотношении (27) (компоненты см. (29)) становится плохо обусловленной при $K \geq 8$ (использовалась двойная машинная точность). Это приводит к тому, что численное обращение матрицы C (см. равенства (30) и (31)) порождает большие ошибки, последнее же оказывает негативное воздействие на устойчивость разработанной численной схемы.

В работе [24] демонстрируется, что для построенной там и примененной в настоящем исследовании структурной модели механики упругопластических композитных сред в каждый дискретный момент времени в каждой точке конструкции (независимо от других точек), необходима организация итерационного процесса вычислений, аналогичного процедуре «посадки» напряженного состояния в точке на поверхность текучести [10]. Выполненные расчеты выявили, что в каждый момент времени t_{n+1} достаточно делать всего две итерации, при этом на второй итерации уточняется деформированное состояние фаз композиции на величину, примерно равную относительной толщине пологой оболочки. Последующие итерации решение практически не уточняют.

Строго говоря, для адекватного расчета пологих стеклопластиковых оболочек, рассмотренных в этом разделе, необходимо учитывать вязкие свойства материалов фаз композиции, из которой такие тонкостенные конструкции изготовлены (в той или иной степени вязкими свойствами обладают все материалы). Однако на сегодняшний день отсутствуют структурные модели механики композитных волокнистых материалов, которые бы включали определяющие соотношения для упруговязкопластической среды [35]. Однако построение такой модели выходит за рамки настоящей статьи. Здесь же стеклопластиковых конструкций касались в основном лишь для того, чтобы можно было обоснованно сослаться на результаты расчетов в [24] без их повторного пересчета для других композиций, например полиметаллических.

5. Заключение

В работе [24] было продемонстрировано, что теория Рейсснера, базирующаяся на гипотезе независимой ротации остающейся прямолинейной поперечной нормали, становится малопригодной для расчетов изгиба армированных упругопластических пластин относительной толщины $1/10$ и более. На основании этого для получения адекватных результатов расчетов в [24] рекомендовано прибегать к теории Редди, которая учитывает в первом приближении искривление поперечной нормали. Проведенные в данной работе исследования выявили, что при изучении динамического упругопластического поведения гибких армированных пологих оболочек теория Редди может приводить к существенному отличию от результатов расчетов по уточненной теории даже для относительно тонких композитных искривленных панелей. С увеличением значений расчетных моментов времени это различие возрастает и наиболее ярко проявляется при сравнении напряженно-деформированных состояний в материалах фаз композиции. Поэтому для достижения в условиях упругопластического динамического деформирования перекрестно-армированных пологих оболочек достоверных данных необходимо при математическом описании процесса использовать уточненные теории, предложенные в данной работе.

Проведенные расчеты показали, что упругопластическое поведение гибких пологих армированных оболочек существенно зависит от того, к какой лицевой поверхности (вогнутой или выпуклой) прикладывается динамическая нагрузка. Так как рассматриваемые задачи обладают геометрической и физической нелинейностью, максимальный по модулю прогиб в поперечном направлении армированной искривленной панели может возникнуть даже после нескольких десятков ее колебаний, а не в течение первого периода, как это обычно принято считать [10, 24, 31, 32].

Наиболее вероятный механизм возникновения состояния начального предразрушения подобных композитных конструкций заключается в накоплении повреждений в связующем материале композиции за счет малоциклового усталости: в силу колебаний конструкции при динамическом нагружении в материале реализуется знакопеременная пластичность.

Литература

1. *Bannister M.* Challenges for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // *Compos. Part A-Appl. S.* – 2001. – Vol. 32, no. 7. – P. 901-910. DOI
2. *Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K.* Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // *Compos. Struct.* – 2001. – Vol. 53, no. 1. – P. 21-42. DOI
3. *Михайлин Ю.А.* Конструкционные полимерные композиционные материалы. – СПб: Научные основы и технологии, 2010. – 822 с.
4. *Gibson R.F.* Principles of composite material mechanics. – Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012.
5. *Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.* Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastic composite // *Front. Mech. Eng.* – 2013. – Vol. 8, no. 2. – P. 187-200. DOI

6. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наукова думка, 1973. – 228 с.
7. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
8. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопrotивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 571 с.
9. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 287 с.
10. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
11. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis. – Boca Raton: CRC Press, 2004.
12. Muc A., Ulatowska A. Design of plates with curved fiber format // Compos. Struct. – 2010. – Vol. 92, no. 7. – P. 1728-1733. DOI
13. Muc A., Muc-Wierzgoń M. An evolution strategy in structural optimization problems for plates and shells // Compos. Struct. – 2012. – Vol. 94, no. 4. – P. 1461-1470. DOI
14. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: Книжный дом «Либроком», 2012. – 336 с.
15. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. – Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2013. – 93 с.
16. Каледин В.О., Аульченко С.М., Миткевич А.Б., Решетникова Е.В., Седова Е.А., Шнакова Ю.В. Моделирование статики и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов. – М.: Физматлит, 2014. – 196 с.
17. Белькаид К., Тати А., Бумараф Р. Простой конечный элемент с пятью степенями свободы в узле, основанный на теории сдвигового деформирования третьего порядка // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 2. – С. 367-384. (English version DOI).
18. Whitney J. A higher order theory for extensional motion of laminated composites // J. Sound Vib. – 1973. – Vol. 30, no. 1. – P. 85-97. DOI
19. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
20. Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. / Под ред. Дж. Любина. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.
21. Композиционные материалы. Справочник / Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
22. Maćko W., Kowalewski Z.L. Mechanical properties of A359/SiCp metal matrix composites at wide range of strain rates // Appl. Mech. Mater. – 2011. – V. 82. – P. 166–171.
23. Янковский А.П. Упругопластическое деформирование изгибаемых армированных пластин при ослабленном сопротивлении поперечному сдвигу // ПММ. – 2013. – Т. 77, № 6. – С. 853-876. (English version DOI).
24. Янковский А.П. Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2016. – Т. 9, № 3. – С. 279-297. DOI
25. Янковский А.П. Моделирование динамического поведения гибких армированных пластин из нелинейно-упругих материалов // Конструкции из композиционных материалов. – 2017. – № 1. – С. 12-26.
26. Романова Т.П., Янковский А.П. Сравнительный анализ моделей изгибного деформирования армированных балок-стенки из нелинейно-упругих материалов // Проблемы прочности и пластичности. – 2014. – Т. 76, № 4. – С. 297-309.
27. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. – М: Мир, 1972. – 418 с.
28. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
29. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Comput. Struct. – 1987. – Vol. 26, no. 1-2. – P. 1-15. DOI
30. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 707 p.
31. Librescu L., Oh S.-Y., Hohe J. Linear and non-linear dynamic response of sandwich panels to blast loading // Compos. Part B-Eng. – 2004. – Vol. 35, no. 6-8. – P. 673-683. DOI
32. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // Int. J. Nonlinear Mech. – 2011. – Vol. 46, no. 5. – P. 807-817. DOI
33. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 371 с.
34. Немировский Ю.В., Янковский А.П. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т. 3, № 2. – С. 15-39.
35. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. – М.: Физматгиз, 1962. – 432 с.

References

1. Bannister M. Challenges for composites into the next millennium – a reinforcement perspective. *Compos. Part A-Appl. S.*, 2001, vol. 32, no. 7, pp. 901-910. DOI
2. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines. *Compos. Struct.*, 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21-42. DOI
3. Mikhailin Yu.A. *Konstruktsionnye polimernye kompozitsionnye materialy* [Constructional polymeric composite materials]. St. Petersburg: Nauchnye osnovy i tekhnologii, 2010. 822 p.
4. Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics*. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012.
5. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastic composite. *Front. Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187-200. DOI

6. Grigorenko Ya.M. *Izotropnye i anizotropnye sloistye obolochki vrashcheniya peremennoy zhestkosti* [Isotropic and anisotropic layered shells of rotation of variable rigidity]. Kiev: Naukova dumka, 1973. 228 p.
7. Ambartsumyan S.A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* [General theory of anisotropic shells]. Moscow: Nauka, 1974. 446 p.
8. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie polimernykh i kompozitnykh materialov* [Resistance polymeric and composite materials]. Riga: Zinatne, 1980. 571 p.
9. Andreev A.N., Nemirovskii Yu.V. *Mnogosloynnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustoychivost' i kolebaniya* [Multilayered anisotropic shells and plates. Bending, stability and vibration]. Novosibirsk: Nauka, 2001. 287 p.
10. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksij* [Nonlinear problems of dynamics of composites designs]. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 2002. 400 p.
11. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004.
12. Muc A., Ulatowska A. Design of plates with curved fiber format. *Compos. Struct.*, 2010, vol. 92, no. 7, pp. 1728-1733. DOI
13. Muc A., Muc-Wierzoń M. An evolution strategy in structural optimization problems for plates and shells. *Compos. Struct.*, 2012, vol. 94, no. 4, pp. 1461-1470. DOI
14. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A. *Nelineinoe deformirovanie i ustoichivost' uprugikh obolochek neodnorodnoi struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi* [Nonlinear deformation and stability of elastic shells of non-uniform structure: Models, methods, algorithms, the insufficiently studied and new problems]. Moscow: Knizhny dom "Librokom", 2012. 336 p.
15. Andreev A.N. Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis. Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 p.
16. Kaledin V.O., Aul'chenko S.M., Mitkevich A.B., Reshetnikova E.V., Sedova E.A., Shpakova Yu.V. *Modelirovanie statiki i dinamiki obolocheknykh konstruksij iz kompozitsionnykh materialov* [Modeling of statics and dynamics of shell structures made of composite materials]. Moscow: Fizmatlit, 2014. 196 p.
17. Belkaid K., Tati A., Boumaraf R. A simple finite element with five degrees of freedom based on Reddy's third-order shear deformation theory. *Mech. Compos. Mater.*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 257-270. DOI
18. Whitney J. A higher order theory for extensional motion of laminated composites. *J. Sound Vib.*, 1973, vol. 30, no. 1, pp. 85-97. DOI
19. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Handbook], ed. by D.M. Karpinos. Kiev, Naukova dumka, 1985. 592 p.
20. *Handbook of composites*, ed. by G. Lubin. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982.
21. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Reference Book], ed. by V.V. Vasil'ev, Yu.M. Tarnopol'skii. Moscow: Mashinostroenie, 1990. 512 p.
22. Maćko W., Kowalewski Z.L. Mechanical properties of A359/SiCp metal matrix composites at wide range of strain rates. *Appl. Mech. Mater.*, 2011, vol. 82, pp. 166-171.
23. Yankovskii A.P. Elastoplastic deformation of flexible reinforced plates with a reduced shear strength. *J. Appl. Math. Mech.*, 2013, vol. 77, no. 6, pp. 613-628. DOI
24. Yankovskii A.P. Using of explicit time-central difference method for numerical simulation of dynamic behavior of elasto-plastic flexible reinforced plates. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 279-297. DOI
25. Yankovskii A.P. Modeling of dynamic behavior of flexible reinforced plates of nonlinear elastic materials. *Konstrukcii iz kompozitsionnykh materialov – Composite materials constructions*, 2017, no. 1, pp. 12-26.
26. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Comparative analysis of models of bending deformation of reinforced walls-beams of nonlinear elastic materials. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2014, vol. 76, no. 4, pp. 297-309.
27. Richtmyer R.D., Morton K.W. *Difference methods for initial-value problems*. New York: John Wiley & Sons, 1967.
28. Samarsky A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1989. 616 p.
29. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Comput. Struct.*, 1987, vol. 26, no. 1-2, pp. 1-15. DOI
30. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 707 p.
31. Librescu L., Oh S.-Y., Hohe J. Linear and non-linear dynamic response of sandwich panels to blast loading. *Compos. Part B-Eng.*, 2004, vol. 35, no. 6-8, pp. 673-683.
32. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 807-817. DOI
33. Novozhilov V.V. *Theory of elasticity*. Elsevier, 1961. 460 p.
34. Nemirovskii Yu.V., Yankovskii A.P. O nekotorykh osobennostyakh uravneniy obolochek, armirovannykh voloknami postoyannogo poperechnogo secheniya [About some features of the equations of shells reinforced with fibers of constant cross-section section]. *Journal on Composite Mechanics and Design*, 1997, vol. 3, no. 2, pp. 15-39.
35. Freudental R.A., Geiringer H. *The mathematical theories of the inelastic continuum*. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer-Verlag, 1958.

Поступила в редакцию 26.05.2017; опубликована в электронном виде 04.10.2017