

DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.3.21

УДК 532.516.4:519.632.4

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ОБРАТНЫМ УСТУПОМ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

А. А. Фомин<sup>1</sup>, Л. Н. Фомина<sup>2</sup><sup>1</sup>Кузбасский государственный университет имени Т. Ф. Горбачева, Кемерово, Российская Федерация<sup>2</sup>Кемеровский государственный университет, Кемерово, Российская Федерация

В статье методом сеток получены численные решения задачи стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с обратным уступом. Движение жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса в переменных «скорость–давление». Основные расчеты выполнены на равномерной сетке с числом узлов  $6001 \times 301$ . Для разностной аппроксимации исходных уравнений применен метод контрольного объема второго порядка по пространству. Корректность результатов подтверждена для диапазона чисел Рейнольдса  $100 \leq Re \leq 3000$  путем сравнения с найденными в литературе экспериментальными и теоретическими данными. Устойчивость вычислительного алгоритма при больших значениях числа Рейнольдса достигнута за счет использования подробной разностной сетки (малого сеточного шага). Исследование проведено для короткого канала при числах Рейнольдса от 1000 до 10000 с шагом 1000. Выявлена нестандартная структура первичного вихря за уступом – наличие многочисленных центров вращения как внутри вихря, так и в пристенной области под ним. Показано, что количество центров вращения в первичной рециркуляционной зоне растет вместе с увеличением значения числа Рейнольдса. Также проанализированы профили коэффициентов трения и гидродинамического сопротивления потоку в зависимости от величины  $Re$ . Результаты работы могут быть полезны для сравнения и проверки достоверности решений задач подобного типа.

*Ключевые слова:* уравнения Навье–Стокса, плоский канал с обратным уступом, отрывное течение, большие числа Рейнольдса

## NUMERICAL SOLUTIONS OF 2D STEADY INCOMPRESSIBLE BACKWARD-FACING STEP FLOW AT HIGH REYNOLDS NUMBERS

A.A. Fomin<sup>1</sup> and L.N. Fomina<sup>2</sup><sup>1</sup>T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Kemerovo, Russian Federation<sup>2</sup>Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation

Numerical solutions of the test problem of 2D steady incompressible viscous flow over backward-facing step are presented in the article. The Navier–Stokes equations in a velocity–pressure formulation are numerically solved using a uniform grid of  $6001 \times 301$  points. The control-volume technique for second-order difference approximation for spatial derivatives is used. The obtained numerical solutions were validated for a wide range of Reynolds numbers ( $100 \leq Re \leq 3000$ ), comparing them to numerous experimental and numerical results found in the literature. The use of an original technology for building a solution at the exit from the channel (an open boundary of the solution domain) has made it possible to drastically reduce the length of the channel and, as a consequence, to decrease a size of the grid step. As a result, the increase in the stability of the computational algorithm took place, and it was possible to obtain solutions of the problem for large Reynolds numbers. Main research calculations have been performed for a short channel at Reynolds numbers from 1000 to 10000 with increment 1000. The obtained results have revealed a non-standard structure of primary vortex behind the step – numerous centers of rotation are present both in the vortex and under it in the area adjacent to the wall. It is shown that the number of the centers of rotation of the primary recirculation zone grows in accordance with the increase of the Reynolds number. Also, the behavior of profiles of friction coefficients and hydrodynamic resistance to the flow depending on the Reynolds number are analyzed in the work. The obtained results may be useful for comparison and verification of solutions of this type of problems.

*Key words:* Navier–Stokes equations, 2D channel with backward-facing step, separation flow, high Reynolds numbers

### 1. Введение

Исследование отрывных течений имеет важное значение как с фундаментальной, так и прикладной точек зрения. Примером подобного течения является движение несжимаемой вязкой жидкости в плоском канале с обратным уступом, в котором присутствуют как отрыв потока на кромке уступа с его последующим присоединением вниз по течению к нижней стенке канала, так и зона рециркуляции жидкости сразу же за уступом. Причем в зависимости от соотношения инерции течения и вязких сил таких зон рециркуляции и сопровождающих их точек отрыва и присоединения потока к стенкам канала может быть несколько. При этом задача характеризуется простотой геометрии и зависимостью решения, вообще говоря, всего от двух параметров: числа Рейнольдса  $Re$  и параметра расширения потока  $ER$ , равного отношению полной высоты канала к высоте входного участка. Однако имеет место фактор, осложняющий задачу, — открытая выходная граница канала. Единая методология решения задач с открытыми границами, особенно для несжимаемых течений, до сих пор не создана, что и определяет общепринятую тактику локализации такой границы — чем она дальше от зоны основных возмущений потока, тем лучше.

В силу вышеуказанных причин рассматриваемая задача является практически идеальной для тестирования и демонстрации возможностей новых вычислительных технологий, разрабатываемых для моделирования отрывных течений в полукрытых областях. Соответственно в литературе можно найти большое количество работ, посвященных изучению несжимаемых течений вязкой жидкости в плоском канале с обратным уступом в двумерном приближении. Большинство из них выполнено для чисел Рейнольдса, не превышающих  $Re = 1000$  (здесь и далее число Рейнольдса строится по полной высоте канала и среднемассовой входной скорости потока) [1–14]. Однако существует несколько публикаций, в которых стационарное решение задачи найдено для более высоких значений  $Re$ , вплоть до 3000 [15–21]. И совсем немного статей посвящены задачам при значениях числа Рейнольдса меньше единицы вплоть до  $Re = 10^{-4}$  [6, 22, 23]. Основной их целью было получение вихрей Моффатта [24] у основания уступа, поскольку при столь низких значениях  $Re$  эффект инерции потока пренебрежимо мал по сравнению с вязкими силами и, следовательно, в этом месте движение жидкости имеет чисто стоковский характер.

Что касается влияния параметра расширения потока  $ER$ , то его изучение проведено в ограниченном числе публикаций [5, 6, 8, 10, 23], причем диапазон изменения  $ER$  обычно невелик и укладывается в промежутки  $1,17 \leq ER \leq 3,0$ . Исключения составляют следующие статьи: [4], в которой  $1,33 \leq ER \leq 4,0$ ; [21], в которой  $1,43 \leq ER \leq 5,0$ ; [12], в которой  $1,11 \leq ER \leq 10,0$ . В этих работах авторы, как правило, делали вывод о прямой зависимости длины первичного вихря за уступом —  $x_1$ , от величины  $ER$ : чем больше  $ER$ , тем больше  $x_1$ . Однако в [12, 21] показано, что эта зависимость немонотонная и имеет место максимум значения  $x_1$  при  $ER \approx 2,5 \div 3,0$  для  $Re \leq 1000$ .

Относительно влияния других параметров задачи, таких как общая длина канала или длина входного участка, мнения исследователей расходятся. В [1, 3, 5, 18, 23] длина входного участка обнуляется, так как их авторы считают, что параметры потока во входном участке не изменяются. Иными словами, граничные условия для втекающей жидкости, известные на большом удалении от уступа, можно сразу располагать в сечении внезапного расширения канала. Однако в большинстве публикаций полагается, что изменяющиеся параметры течения перед обратным уступом влияют на решение задачи в целом (см., например, [2, 8–16, 20, 21]).

В представленных в настоящем обзоре работах [15, 17, 19, 21, 25] анализируются как численные, так и экспериментальные результаты. Достаточно подробные измерения параметров ламинарного, переходного и турбулентного режимов течений в плоском канале за обратным уступом были выполнены в [15]. Исследования проведены для  $ER = 1,9423$  и чисел Рейнольдса до значений порядка 8000. Кроме распределения компонент скорости потока в нескольких поперечных сечениях, также выявлена зависимость длины первичного вихря за уступом от  $Re$ . Показано, что при  $Re = 400 \div 500$  начинают проявляться признаки трехмерности движения жидкости. При этих же значениях числа Рейнольдса около верхней стенки канала возникает вторичный вихрь.

Общепризнано, что моделирование реальных двумерных ламинарных течений в канале с обратным уступом с помощью уравнений Навье–Стокса возможно только при числах  $Re \leq 400 \div 600$  [15, 17, 19, 21, 25]. Тем не менее существуют работы, в которых приводятся имеющие модельный характер решения уравнений Навье–Стокса для рассматриваемой задачи при числах  $Re$ , значительно превышающих данный предел [7, 10, 16, 20, 21]. Объясняется это тем, что с увеличением числа Рейнольдса резко возрастает сложность численного построения решений уравнений Навье–Стокса, обусловленная, прежде всего, неустойчивостью существующих алгоритмов. Для выхода из этой ситуации необходимо совершенствовать существующие, либо создавать новые вычислительные технологии, возможности которых удобнее всего демонстрировать на примере решения эталонных задач вычислительной гидромеханики, таких, как задачи течения несжимаемой вязкой жидкости в квадратной каверне с подвижной верхней крышкой (например, [26]) или в плоском канале с обратным уступом. Понятно, что в последующем эти технологии успешно применяются при моделировании реальных движений жидкости и теплообмена.

Поскольку для обеспечения устойчивости вычислительного алгоритма при росте значения числа Рейнольдса требуется уменьшать значение сеточного шага [20, 26, 27], то это, соответственно, приводит к большей размерности систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Еще одна причина, по которой растет количество узлов сетки (размерность СЛАУ) — это выбор местоположения открытой выходной границы канала. Чем больше  $Re$  (то есть, например, при прочих равных условиях, — меньше вязкость), тем дальше необходимо ставить выходную границу канала вследствие появления вихрей далее вниз по течению. Таким образом, приходится увеличивать количество узлов сетки, даже если она в общем случае и неравномерная.

В этом смысле наиболее показательной является работа [20], в которой приведены решения задачи для  $ER = 2$  и  $Re$  от 100 до 3000 с шагом 100. Для столь больших значений числа Рейнольдса автор был вынужден рассматривать канал, у которого длина в 160 раз превышала его высоту. При этом только

в первой четверти длины канала решение в виде чередующихся пристенных вихрей представляло интерес. Остальные три четверти были необходимы для того, чтобы однонаправленное течение ближе к выходу трансформировалось в плоскопараллельный полностью развитый поток с параболическим профилем продольной компоненты скорости. Иными словами, 75% расчетной области присутствовало в исследовании для выполнения чисто технической функции — стабилизации итерационного алгоритма построения стационарного решения задачи.

Очевидно, что в этой ситуации при дальнейшем увеличении значения числа Рейнольдса необходимо принципиально менять подход к выбору местоположения открытой выходной границы расчетной области. Для этого в [28] излагается технология, согласно которой выходную границу канала можно помещать практически в произвольном месте, даже если эта граница пересекает пристенные вихри течения. При этом искажения решения имеют место лишь в узкой приграничной зоне, не превышающей 10–15% от общей длины канала. Соответственно задачу можно решать в так называемом «коротком» канале, в котором за счет существенного сокращения количества узлов по длине можно уменьшить шаг сетки как вдоль, так и поперек канала, оставаясь при этом в пределах разумного количества уравнений СЛАУ. В итоге возросшая за счет этого устойчивость итерационного алгоритма позволит находить стационарные решения задачи для значительно больших значений числа  $Re$ .

Исходя из вышеизложенного, цель настоящей работы заключается в том, чтобы с помощью технологии из [28] получить решения двумерных уравнений Навье–Стокса в плоском канале с обратным уступом при  $ER = 2$  для чисел Рейнольдса от 1000 до 10000 с шагом 1000.

## 2. Постановка задачи

### 2.1. Схема течения

Рассматривается движение несжимаемой вязкой жидкости с постоянными характеристиками, такими как плотность  $\rho$  и динамический коэффициент вязкости  $\mu$ . Считается, что поток двумерный и стационарный. На рисунке 1 в безразмерных координатах приведена схема течения: основная струя и сопутствующие вихри. В качестве характерной длины в задаче выбрана полная высота канала, в дальнейшем обозначаемая как  $H$ . Здесь  $l_c$  и  $h_c$  — соответственно безразмерные длина и высота уступа,  $L$  — безразмерная длина канала,  $(1-h_c)$  — безразмерная высота входного участка канала. По определению  $ER = 1/(1-h_c)$ . Обозначения  $B1, B2, \dots, B6$  для границ расчетной области взяты из [29].

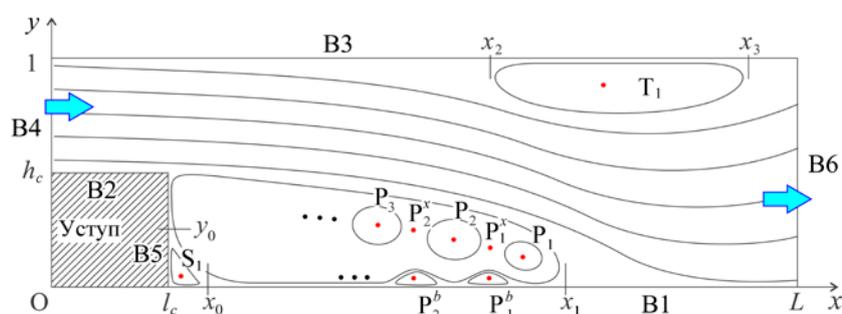


Рис. 1. Схема движения жидкости в плоском канале с обратным уступом

Полностью развитый поток (параболический профиль продольной компоненты скорости и нулевое значение поперечной компоненты скорости) втекает через левую границу  $B4$ , а через правую границу  $B6$  жидкость вытекает (хотя частично может и втекать). При этом в силу малой длины канала течение на выходе не может считаться полностью развитым. Наряду с первичным вихрем длиной  $x_1 - l_c$  непосредственно за уступом существует вторичный вихрь с центром вращения  $T_1$  и длиной  $x_3 - x_2$  около верхней стенки. Также наблюдается малый вихрь длиной  $x_0 - l_c$  и высотой  $y_0$  между основанием уступа и первичным вихрем. Его центр вращения обозначен как  $S_1$ . При  $Re > 1000$  около нижней стенки под первичным вихрем присутствует несколько малых вихрей, которые обозначены как  $P_i^b$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Также для больших чисел  $Re$  внутри первичного вихря имеют место центры вращения:  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Понятно, что между ними должны существовать седловые точки течения:  $P_i^x$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Похожую схему динамики жидкости можно обнаружить в [12, 20, 28, 30]. Однако не во всех этих исследованиях явным образом обозначены множественные центры вращения и седловые точки.

## 2.2. Математическая постановка

Движение жидкости описывается системой нестационарных двумерных уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

Здесь:  $u$  и  $v$  — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости соответственно;  $p$  — давление;  $\text{Re}$  — число Рейнольдса  $\text{Re} = \rho U_a H / \mu$ , где  $U_a$  — среднемассовая скорость потока на входе в канал. Время и давление обезразмерены на комплексы  $H/U_a$  и  $\rho U_a^2$  соответственно. Нестационарная форма записи уравнений (2) и (3) обусловлена использованием метода установления при построении стационарного решения задачи.

Считается, что в начальный момент времени жидкость покоится:  $u = v = 0$ . Затем на левой границе В4 интенсивность течения плавно нарастает до максимального значения по закону

$$u(t, y) = 6f(t)(y - h_c)(1 - y)/(1 - h_c)^2, \quad (4)$$

$$v = 0, \quad (5)$$

где

$$f(t) = \begin{cases} 0,5 \{ \sin[0,5\pi(2t/t_m - 1)] + 1 \}, & 0 \leq t \leq t_m, \\ 1, & t_m < t. \end{cases}$$

На стенках канала (границы В1, В2, В3, В5) используются условия прилипания и непротекания. На выходе из канала В6 граничное условие имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Здесь необходимо иметь в виду, что в силу отсутствия точной информации о поведении решения на открытой границе В6 условие (6) следует рассматривать как приближенное. Это означает, что в процессе итерационного построения решения задачи, исходя из требования баланса массы во всей расчетной области, значения компонент  $u$  и  $v$  на каждой итерации подвергаются малой корректировке. Подробно данная технология изложена в [28].

## 2.3. Характеристики течения

Для всестороннего анализа получаемых решений задачи полезно рассмотреть дополнительные характеристики потока, такие как коэффициент трения  $C_f$  и коэффициент гидростатического сопротивления потоку  $\lambda$  [31]:

$$C_f = \frac{\tau_w}{0,5 \rho U_a^2}, \quad (7)$$

$$\lambda = \frac{\Delta p}{l} \frac{H}{0,5 \rho U_a^2},$$

где  $\tau_w$  — напряжение трения на стенке,  $\Delta p/l$  — падение давления на единицу длины вдоль канала. Используя параметры обезразмеривания, можно записать выражение для напряжения трения

$$\tau_w = \frac{\mu U_a}{H} \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)_w, \quad (8)$$

где  $\mathbf{n}$  — безразмерная внешняя нормаль к стенке, индекс « $w$ » означает стенку. Подстановка (8) в (7) приводит к выражению для коэффициента трения:

$$C_f = \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)_w.$$

Однако при анализе более удобным является так называемый модифицированный коэффициент трения [8], который определяется как

$$C_f^* = C_f \frac{\text{Re}}{2}, \quad (9)$$

и не зависит от  $\text{Re}$ . Что касается коэффициента гидродинамического сопротивления потока, то нетрудно понять, что в безразмерном виде формула для его вычисления будет следующей:

$$\lambda = \frac{2}{x} \int_0^1 [p(0, y) - p(x, y)] dy, \quad (10)$$

причем для обеспечения универсальности записи (10) внутри области уступа полагается, что  $p(x, y) \equiv 0$ . Понятно, что и  $C_f^*$ , и  $\lambda$  являются функциями только продольной координаты  $x$ .

### 3. Метод решения

Как известно, для несжимаемых течений уравнение неразрывности (1) напрямую никак не связано с уравнениями движения (2) и (3). Для преодоления этой трудности из уравнений (1)–(3) выводится уравнение Пуассона для давления, которое в расчетном алгоритме используется вместо уравнения неразрывности (1). В результате для решения преобразованной системы применяется метод расщепления [32]. В настоящей работе он модифицирован. Отличие от оригинала заключается в том, что задача Неймана записывается не для полного давления  $p$ , а для его поправки  $p'$ , с точностью до множителя равной разности полей давления на текущем и предыдущем слоях по времени. В предположении гладкости полей переменных искомого решения такой подход приводит к условиям Неймана для  $p'$  на всех границах области независимо от выбора граничных условий для  $u$  и  $v$ .

Разностная аппроксимация исходной постановки на равномерной сетке осуществляется методом контрольного объема с первым порядком по времени и вторым по пространству [33]. Применяется неявная схема, что позволяет выбирать числа Куранта много больше единицы. Решение считается установившимся при выполнении условия:

$$\frac{\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_1 + \|\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}\|_1}{\tau \|\mathbf{V}^n\|_1} < \varepsilon. \quad (11)$$

Здесь:  $\tau$  — шаг по времени;  $\mathbf{V}^n$  — вектор скорости течения,  $|\mathbf{V}^n| = \sqrt{(\mathbf{u}^n)^2 + (\mathbf{v}^n)^2}$ , где  $\mathbf{u}^n$  и  $\mathbf{v}^n$  — числовые векторы компонент скорости на  $n$ -м слое по времени. Во всех расчетах точность полагается равной  $\varepsilon = 10^{-5}$ , что обеспечивает стабилизацию значений компонент скорости до шестого знака включительно после запятой. Шаг по времени вычисляется из соотношения  $\tau = C \min(h, \text{Re} h^2)$ , где  $h$  — шаг по пространству,  $C$  — число Куранта, которое принимается равным 30.

Системы разностных уравнений решаются неявным итерационным полинейным рекуррентным методом второго порядка, ускоренным в подпространствах Крылова [34]. Решение СЛАУ считается найденным, если относительное уменьшение первой нормы невязки становится менее  $10^{-8}$ . При выполнении этого условия первая норма разности двух следующих друг за другом векторов приближения решения не превышает  $10^{-7}$ .

### 4. Апробация алгоритма решения

Для определения параметров сеточного разбиения области, обеспечивающих насыщение решения, была просчитана задача для  $\text{Re} = 5000$  на равномерных сетках  $2001 \times 101$ ,  $4001 \times 201$ ,  $6001 \times 301$ ,  $8001 \times 401$ ,  $10001 \times 501$ . Здесь и далее геометрические параметры канала имели следующие значения:  $L = 20$ ;  $ER = 2,0$ ;  $l_c = 0,5$ . В силу того, что визуально картины течения (линии тока) для всех пяти вариантов сетки различий не имели, степень насыщения находилась по поведению профилей компонент скорости (Рис. 2) и по установлению параметров течения (см. Табл. 1).

Из приведенных графиков видно, что сеточного разбиения  $6001 \times 301$  (шаг  $1/300$ ) вполне достаточно, чтобы рассматривать получаемые результаты как насыщенные. Любопытно, что в [35] при решении

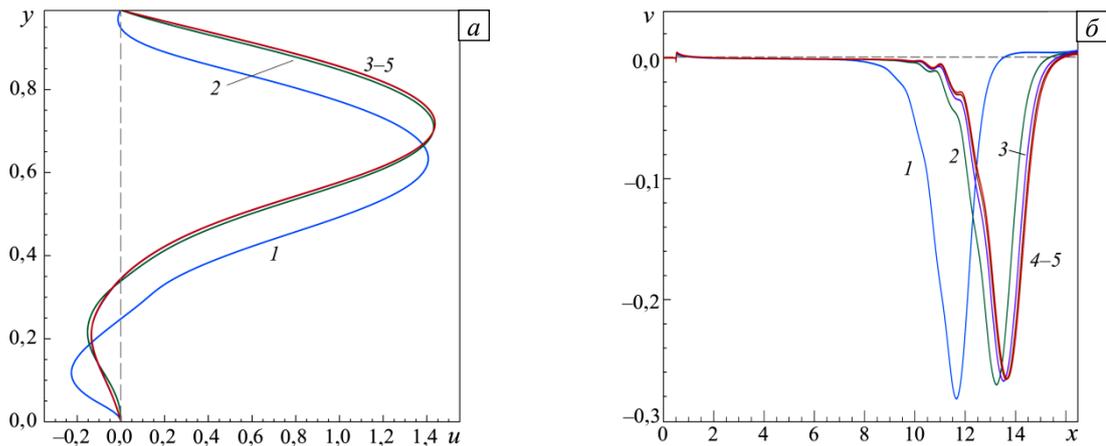


Рис. 2. Профили компонент скорости – продольной  $u$  при  $x=10$  (а) и поперечной  $v$  при  $y=0,5$  (б), вычисленные при различных сеточных разбиениях: 1 –  $2001 \times 101$ ; 2 –  $4001 \times 201$ ; 3 –  $6001 \times 301$ ; 4 –  $8001 \times 401$ , 5 –  $10001 \times 501$

подобной задачи на многопроцессорной ЭВМ на очень подробной сетке при использовании минимального количества процессоров (для минимизации операций обмена) на каждый из процессоров приходилось порядка 1,8 млн ячеек. Такое совпадение говорит о выборе оптимального сеточного разрешения при применении современных вычислительных мощностей. Следует заметить, что столь высокие требования к степени подробности сетки обусловлены высоким значением  $Re$ . И наоборот, авторы данной работы ранее приходили к вполне удовлетворительным результатам на сеточных шагах  $1/200$  и даже  $1/100$  для малых и умеренных чисел Рейнольдса (то есть для  $Re \leq 1000$ ), которые хорошо совпадали с литературными данными [28].

Таблица 1. Длина первичного вихря за уступом и экстремумы дополнительных характеристик потока в зависимости от сеточного разбиения расчетной области

Сеточный шаг		1/100	1/200	1/300	1/400	1/500
Характеристика потока	Длина первичного вихря за уступом $x_1 - l_c$	10,38	13,48	13,80	13,91	13,96
	значение	26,03	20,53	18,91	18,26	17,96
$\max \{C_f^*\}$ на В1	$x$ -координата	12,85	14,68	15,04	15,17	15,24
	значение	-1,384	-1,154	-1,104	-1,084	-1,074
$\min \{C_f^*\}$ на В3	$x$ -координата	10,57	12,30	12,63	12,75	12,80
	значение	-0,01368	-0,01075	-0,01016	-0,00994	-0,00984
$\min \{\lambda\}$	$x$ -координата	12,26	13,95	14,27	14,38	14,43
	значение					

Анализ содержимого таблицы 1 говорит о том, что, начиная уже с шага  $1/200$ , значения экстремумов характеристик потока и координаты их положения различаются слабо. Тем не менее выбор в пользу сеточного разбиения с шагом  $1/300$  является более предпочтительным хотя бы потому, что результаты, соответствующие этой сетке, обладают определенным «запасом прочности» в части своей количественной достоверности. При этом нетрудно видеть, что относительные отличия в значениях характеристик потока, полученных при шагах  $1/300$ — $1/500$ , составляют 3–5%, а по координатам и того меньше — не более 1,5%.

Для валидации программного кода были проведены сравнения вычисленных данных с теоретическими и экспериментальными данными других авторов. Соответствующие графики представлены на рисунке 3. Частичное отличие решений из [1, 23] на рисунке 3б объясняется отсутствием в этих исследованиях начального участка канала. Степень влияния наличия начального участка на результат обсуждается в [16, 20, 26, 28].

На рисунке 4 для сравнения представлены профили модифицированного коэффициента трения на верхней и нижней стенках канала. Здесь, в отличие от предыдущего рисунка, отсутствие входного участка канала не сказывается на результатах. И в том, и в другом случаях имеет место хорошее совпадение с литературными данными. На рисунке 5 показаны зависимости длины первичного вихря за уступом при  $ER = 2$  от числа Рейнольдса в диапазоне значений от 100 до 1500. Видно неплохое согласование как теоретических, так и экспериментальных данных практически из всех работ для  $Re \leq 500$ . Для больших значений числа Рейнольдса заметно расхождение кривых, особенно по отношению к полученным экспериментально. В последнем случае это объясняется присутствием в экспериментах эффектов трехмерности и турбулентности [15, 17, 19].

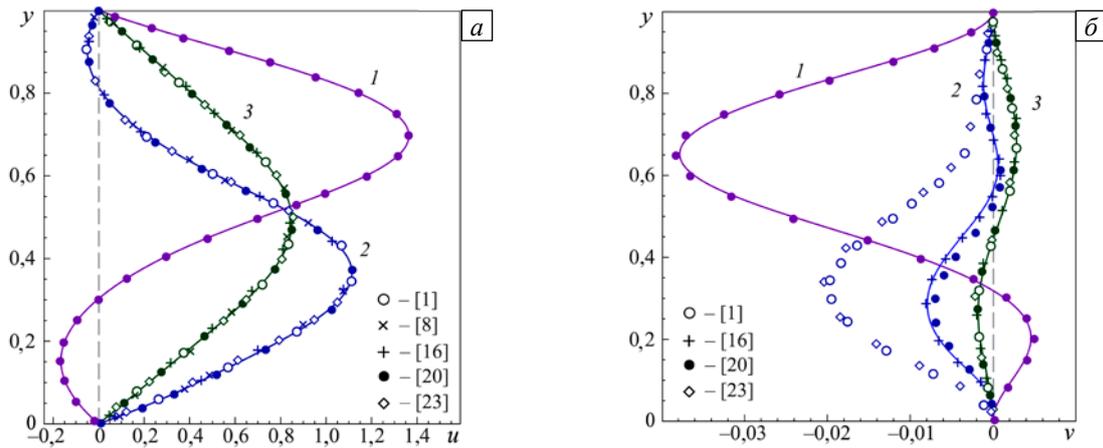


Рис. 3. Профили компонент скорости: продольной  $u$  (а) и поперечной  $v$  (б), вычисленные для  $Re = 800$  в сечениях  $x$ : 3,5 (кривая 1); 7,5 (2); 12,5 (3); сплошные линии – авторские результаты

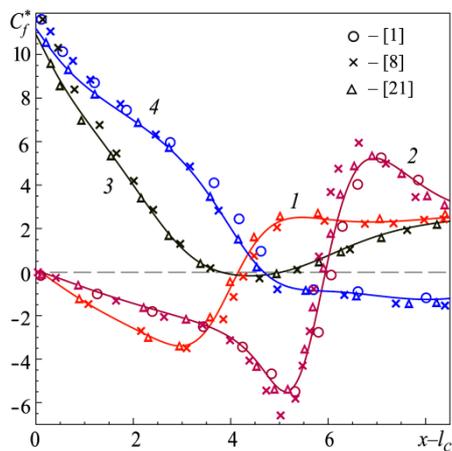


Рис. 4. Поведение модифицированного коэффициента трения на нижней и верхней стенках канала:  $Re = 400$ ,  $y = 0$  (кривая 1);  $Re = 800$ ,  $y = 0$  (2);  $Re = 400$ ,  $y = 1$  (3);  $Re = 800$ ,  $y = 1$  (4); сплошные линии – авторские результаты

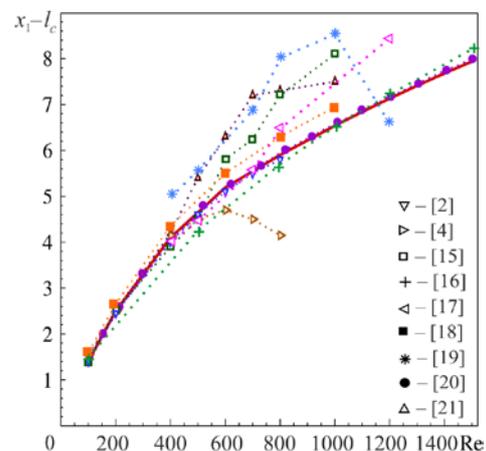


Рис. 5. Зависимости длины первичного вихря за уступом от числа Рейнольдса при  $ER = 2$ ; сплошная линия – авторский результат

Основная цель настоящего исследования — получение решений задачи течения несжимаемой жидкости в плоском канале с обратным уступом для чисел Рейнольдса, намного превосходящих те, которые встречаются в литературных источниках. Исходя из этого, полезно провести сравнение с существующими литературными данными, отвечающими максимально большим значениям  $Re$ . Наиболее подходящей в этом смысле является публикация [20], поскольку в ней приведены детализированные характеристики потока для  $Re$  вплоть до 3000 при  $ER = 2$ . На рисунке 6 представлены рассчитанные профили продольной компоненты скорости в различных сечениях канала для  $Re = 3000$ ,  $ER = 2$  и для сравнения — результаты из [20].

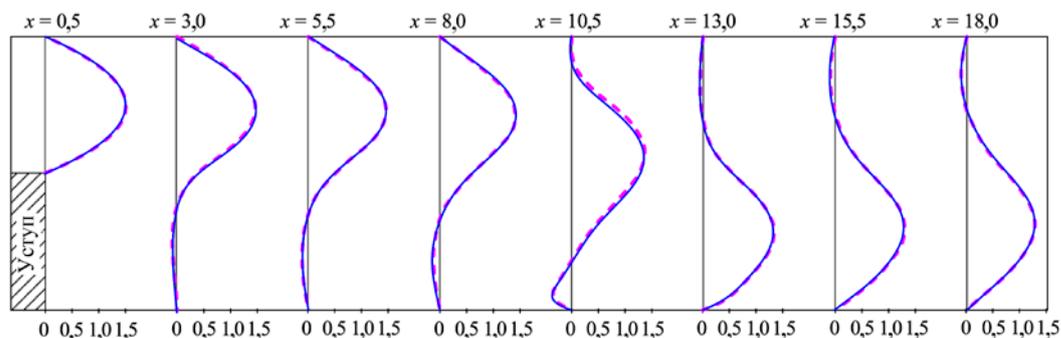


Рис. 6. Профили компоненты скорости  $u$  для  $Re = 3000$  и  $ER = 2$  в различных сечениях по длине канала; сплошные линии – авторский результат, штриховые линии – [20]

## 5. Результаты расчетов и обсуждение

Эволюция картины течения для различных значений числа Рейнольдса от 1000 до 10000 с шагом 1000 представлена на рисунке 7. Видно, что первичная зона рециркуляции удлиняется вместе с увеличением значения  $Re$ . Вторичный вихрь около верхней стенки аналогично становится длиннее, а также сдвигается вниз по потоку, «зависая» своей передней кромкой над задней кромкой первичного вихря. Необходимо отметить, что для  $Re > 2000$  ширина основного потока практически неизменна во всей области рассмотрения. Это происходит потому, что из-за низкой, при прочих равных условиях, вязкости жидкости поток почти не тормозится и, следовательно, не расширяется. И наоборот, из-за чередования по потоку нижнего и верхнего вихрей их поперечные размеры практически совпадают. Также нетрудно увидеть, что с ростом значения  $Re$  происходит увеличение размеров малого вихря  $S_1$  у основания уступа.

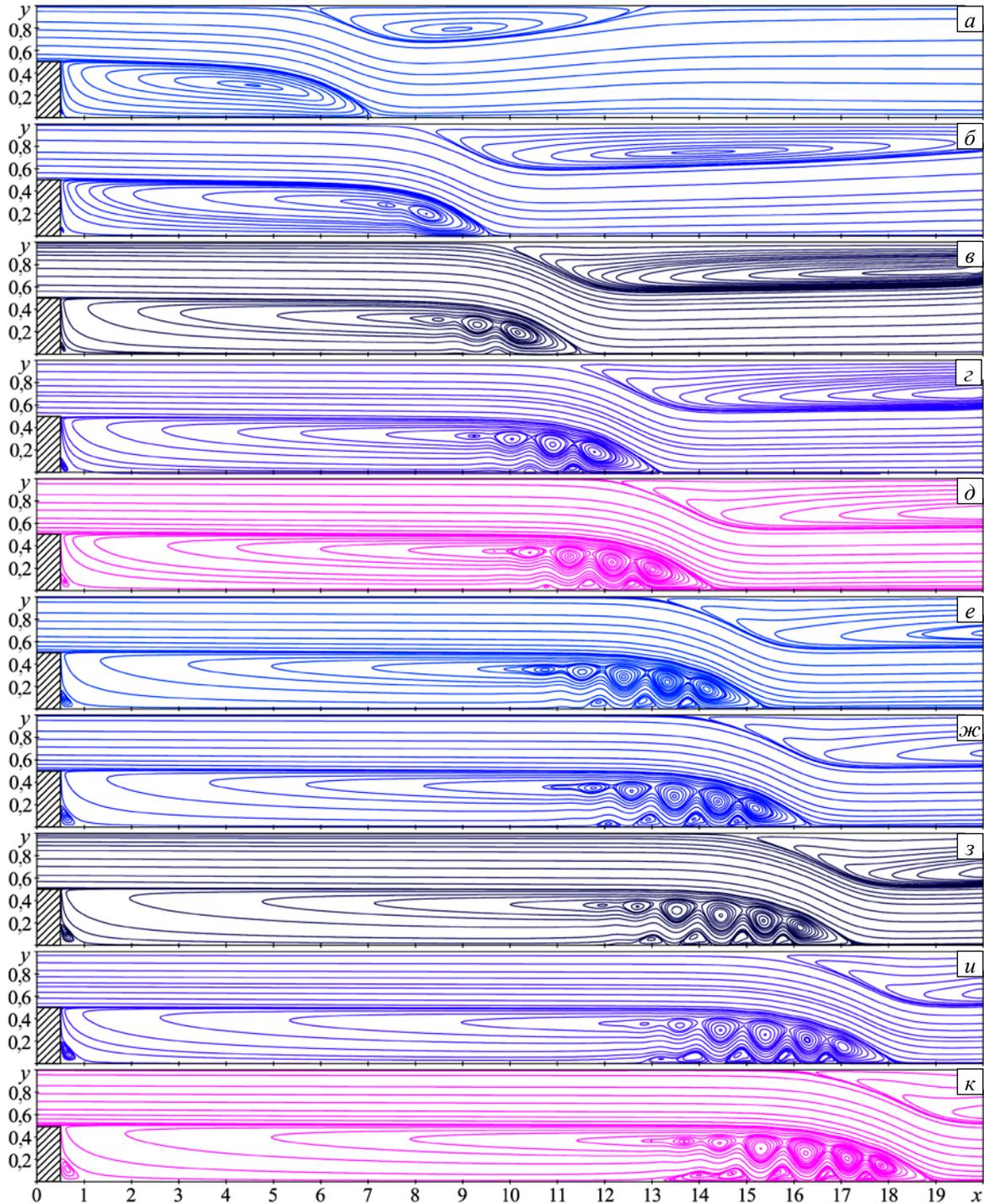


Рис. 7. Картина течения в зависимости от числа Рейнольдса  $Re$ : 1000 (а); 2000 (б); 3000 (в); 4000 (г); 5000 (д); 6000 (е); 7000 (ж); 8000 (з); 9000 (и); 10000 (к)

Однако наибольший интерес представляет трансформация сложной структуры зоны первичной рециркуляции за уступом. Только для  $Re=1000$  эта зона имеет один центр вращения. Начиная с  $Re=2000$  количество центров вращения, обозначенных на рисунке 1 как  $P_1, P_2$  и далее, непрерывно растет. Любопытно, что для промежутка значений  $Re$  от 1000 до 5000 их количество равно числу Рейнольдса, деленному на 1000. Но для  $Re > 5000$  эта закономерность уже не выполняется.

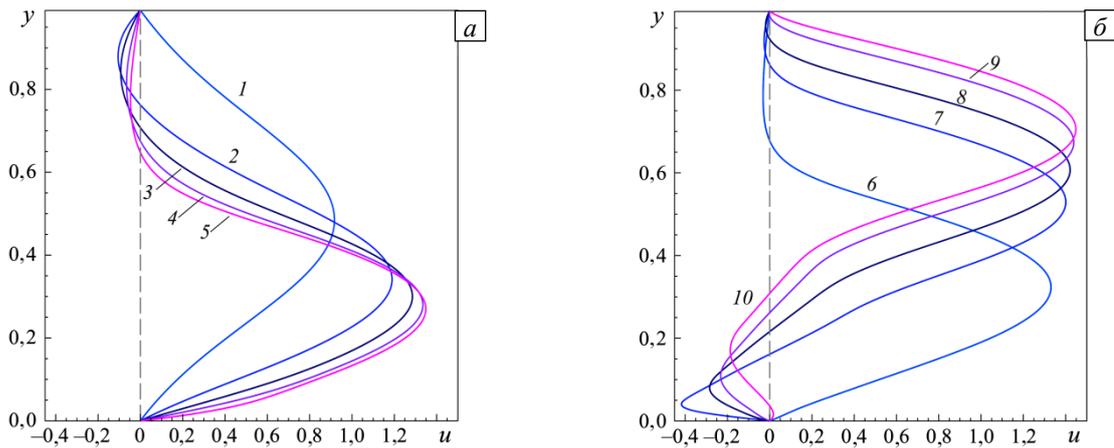
Как отмечалось ранее, между внутренними центрами вращения первичного вихря  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) располагаются седловые точки  $P_i^s$  ( $i=1, 2, \dots$ ). И еще одной особенностью структуры течения при больших числах Рейнольдса является возникновение малых вихрей вдоль нижней стенки, которые на рисунке 1 обозначены как  $P_i^b$  ( $i=1, 2, \dots$ ). При этом понятно, что их количество будет определяться количеством центров вращения  $P_i$  поскольку по длине канала каждый вихрь  $P_i^b$  находится между вихрями  $P_i$  и  $P_{i+1}$  ( $i=1, 2, \dots$ ).

В таблице 2 для чисел Рейнольдса 5000 и 10000 приведены характеристики особых точек течения, таких как координаты центров вращения и экстремумы функций тока  $\psi$  и завихренности  $\omega$ . Из этих данных следует, что вертикальные координаты центров вихрей слабо зависят от  $Re$ , в то время как их горизонтальные координаты чувствительны к изменению его величины. Интересная закономерность наблюдается для экстремумов функции тока и завихренности. Для средних и больших вихрей  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) значения функции тока и завихренности в их центрах вращения почти не зависят от  $Re$ . Этот же вывод можно сделать и для седловых точек  $P_i^s$  ( $i=1, 2, \dots$ ). И наоборот, значения экстремумов малых пристенных вихрей  $P_i^b$  ( $i=1, 2, \dots$ ) изменяются в несколько раз при увеличении числа Рейнольдса от 5000 до 10000.

На рисунке 8 изображены профили горизонтальной компоненты скорости  $u(y)$  в сечении  $x=15,5$ . Видно, что для  $Re=1000$  кривая 1 (Рис. 8а) качественно отличается от остальных за счет

Таблица 2. Параметры особых точек потока для больших чисел Рейнольдса

Вихрь	Re = 5000				Re = 10000			
	$x-l_c$	$y$	$\Psi$	$\omega$	$x-l_c$	$y$	$\Psi$	$\omega$
$S_1$	0,088	0,082	$6,08 \times 10^{-6}$	$6,65 \times 10^{-3}$	0,145	0,115	$1,63 \times 10^{-5}$	$9,55 \times 10^{-3}$
$P_1$	12,512	0,185	$-4,11 \times 10^{-2}$	-3,814	17,348	0,148	$-3,55 \times 10^{-2}$	-5,074
$P_2$	11,655	0,248	$-4,19 \times 10^{-2}$	-2,533	16,623	0,208	$-3,96 \times 10^{-2}$	-3,075
$P_3$	10,748	0,295	$-3,61 \times 10^{-2}$	-2,118	15,752	0,255	$-3,94 \times 10^{-2}$	-2,159
$P_4$	9,918	0,335	$-2,98 \times 10^{-2}$	-2,089	14,798	0,299	$-3,45 \times 10^{-2}$	-1,844
$P_5$	9,228	0,348	$-2,74 \times 10^{-2}$	-1,891	13,927	0,345	$-2,71 \times 10^{-2}$	-2,082
$P_6$	-	-	-	-	13,185	0,358	$-2,44 \times 10^{-2}$	-1,947
$P_7$	-	-	-	-	12,492	0,365	$-2,30 \times 10^{-2}$	-1,735
$P_1^b$	12,052	0,058	$1,07 \times 10^{-3}$	1,781	16,932	0,045	$1,91 \times 10^{-3}$	4,254
$P_2^b$	11,142	0,065	$5,69 \times 10^{-4}$	0,801	16,102	0,062	$1,74 \times 10^{-3}$	2,013
$P_3^b$	10,265	0,028	$2,48 \times 10^{-5}$	0,205	15,148	0,075	$1,14 \times 10^{-3}$	1,042
$P_4^b$	-	-	-	-	14,192	0,078	$4,81 \times 10^{-4}$	0,473
$P_5^b$	-	-	-	-	13,493	0,062	$2,01 \times 10^{-4}$	0,312
$P_1^s$	12,115	0,258	$-2,76 \times 10^{-2}$	-2,993	17,025	0,215	$-2,21 \times 10^{-2}$	-3,426
$P_2^s$	11,222	0,325	$-2,70 \times 10^{-2}$	-2,240	16,238	0,298	$-2,21 \times 10^{-2}$	-2,436
$P_3^s$	10,310	0,348	$-2,69 \times 10^{-2}$	-2,060	15,307	0,348	$-2,26 \times 10^{-2}$	-1,977
$P_4^s$	9,358	0,348	$-2,73 \times 10^{-2}$	-1,898	14,365	0,372	$-2,21 \times 10^{-2}$	-1,939
$P_5^s$	-	-	-	-	13,548	0,372	$-2,29 \times 10^{-2}$	-1,995
$P_6^s$	-	-	-	-	12,628	0,365	$-2,30 \times 10^{-2}$	-1,754

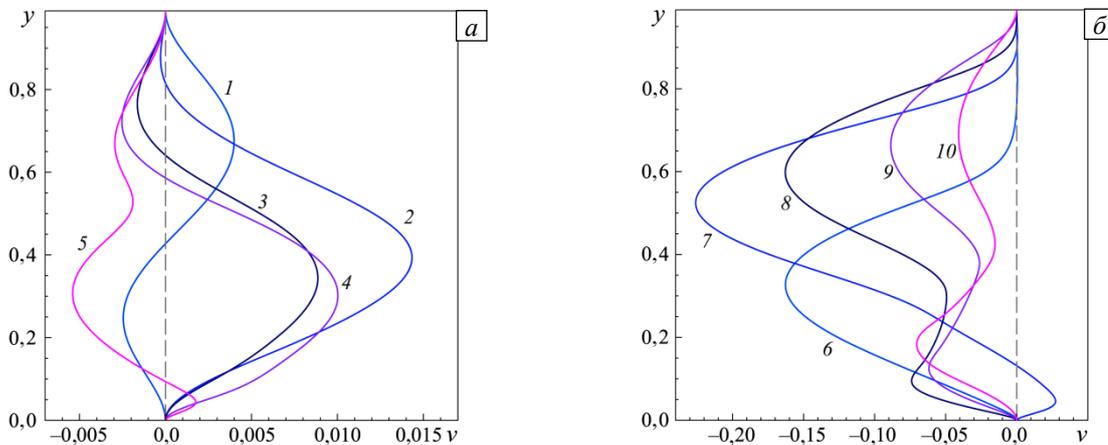


**Рис. 8.** Горизонтальная компонента скорости в сечении  $x=15,5$  при числах Рейнольдса  $1000 \leq Re \leq 5000$  (а) и  $6000 \leq Re \leq 10000$  (б); 1000 (кривая 1); 2000 (2); 3000 (3); 4000 (4); 5000 (5); 6000 (6); 7000 (7); 8000 (8); 9000 (9); 10000 (10)

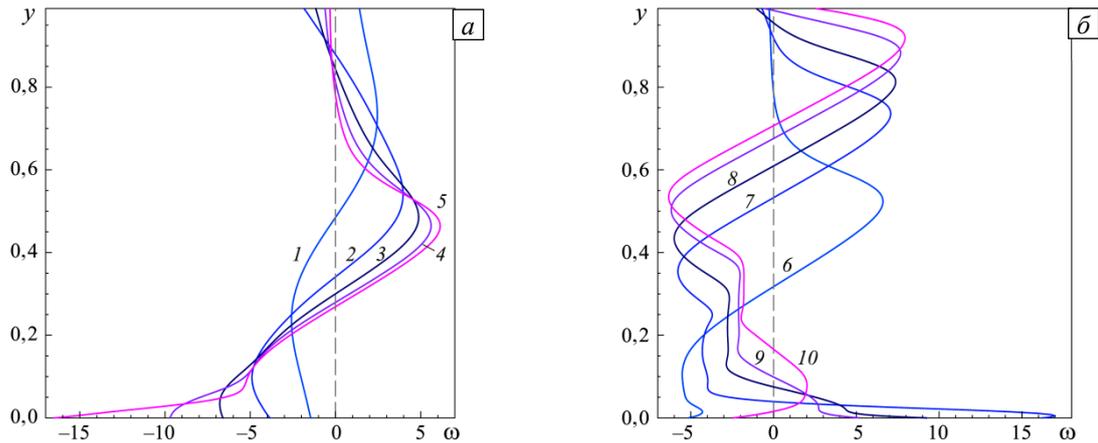
однонаправленности движения жидкости в этом сечении — обе зоны рециркуляции находятся вверх по потоку, в то время как для остальных чисел Рейнольдса имеют место участки с отрицательной скоростью, то есть присутствуют вихревые зоны. Причем, если для кривых 2–6 участки отрицательных  $u(y)$  наблюдаются у верхней границы, что говорит о наличии верхнего вихря (см. Рис. 7б–е), то у кривых 7–10 верхний участок отрицательных значений горизонтальной компоненты скорости либо исчезающе мал, либо отсутствует. Зато у этих кривых появляется нижний участок отрицательных значений  $u(y)$ , то есть координата правой кромки первичного вихря за уступом для чисел  $Re > 7000$  превышает величину 15,5 (см. Рис. 7ж–к). Относительно малые по модулю скорости возвратного течения свидетельствуют о слабой по отношению к основному потоку интенсивности движения жидкости в вихрях. Также следует отметить незначительную зависимость максимума скорости от величины  $Re$ , что естественно при практически неизменной ширине основного однонаправленного тока жидкости.

Профили вертикальной компоненты скорости  $v(y)$  в том же сечении представлены на рисунке 9. Видно, что максимумы абсолютных значений  $v$  для  $1000 \leq Re \leq 5000$  (Рис. 9а) на порядок меньше подобных значений для  $Re > 5000$  (Рис. 9б). Следовательно, графики рисунка 9а соответствуют практически плоскопараллельному течению жидкости в рассматриваемом сечении для  $Re \leq 5000$  как в основном потоке, так и в верхнем вихре, а графики рисунка 9б — интенсивному нисходящему потоку ( $v$  отрицательна) над задней кромкой первичного вихря. При этом постепенное уменьшение максимума модуля  $v$  при  $Re$  от 7000 до 10000 говорит о восстановлении в основном потоке режима почти плоскопараллельного течения при  $y > 0,5$  (см. Рис. 7е–к).

На рисунке 10 смена завихренностью  $\omega$  знака вблизи стенок отражает перемену направления движения жидкости около стенок в рассматриваемом сечении с ростом величины числа Рейнольдса, что хорошо видно при сравнении фрагментов (е) и (ж) рисунка 7. При этом амплитуда изменения завихренности у нижней



**Рис. 9.** Вертикальная компонента скорости в сечении  $x=15,5$  при числах Рейнольдса  $1000 \leq Re \leq 5000$  (а) и  $6000 \leq Re \leq 10000$  (б); 1000 (кривая 1); 2000 (2); 3000 (3); 4000 (4); 5000 (5); 6000 (6); 7000 (7); 8000 (8); 9000 (9); 10000 (10)



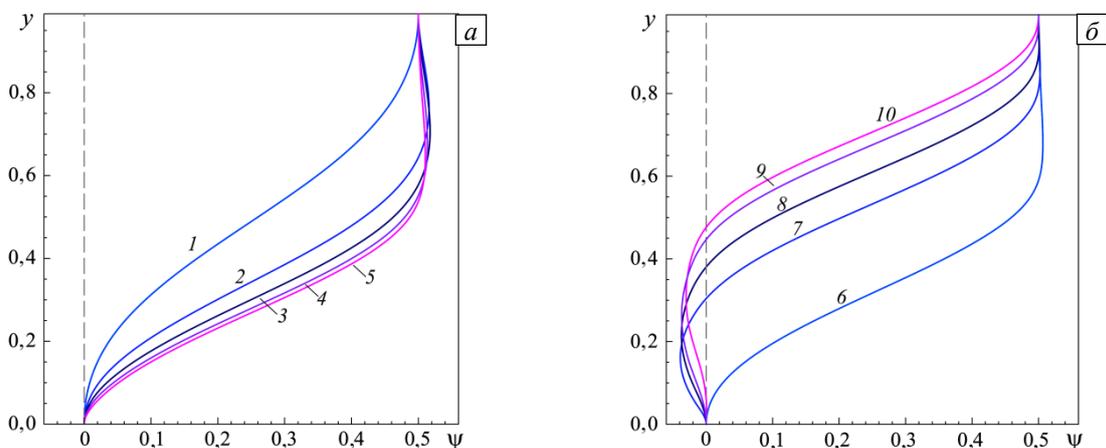
**Рис. 10.** Завихренность в сечении  $x=15,5$  при числах Рейнольдса  $1000 \leq Re \leq 5000$  (а) и  $6000 \leq Re \leq 10000$  (б); 1000 (кривая 1); 2000 (2); 3000 (3); 4000 (4); 5000 (5); 6000 (6); 7000 (7); 8000 (8); 9000 (9); 10000 (10)

стенки намного превышает аналогичную величину у верхней стенки, что также свидетельствует о малой интенсивности течения в зоне верхнего вихря. Более того, для  $Re = 4000 \div 6000$  в диапазоне высот  $0,7 \leq y \leq 1,0$  величина  $\omega$  почти нулевая. То есть в этом случае имеет место практически безвихревая циркуляция жидкости вокруг центра  $T_1$  верхнего вихря. Иными словами, здесь жидкость вращается почти как твердое тело, аналогично тому, как это происходит в первичном вихре задачи стационарного течения в плоской каверне с подвижной верхней крышкой (см., например, [26]).

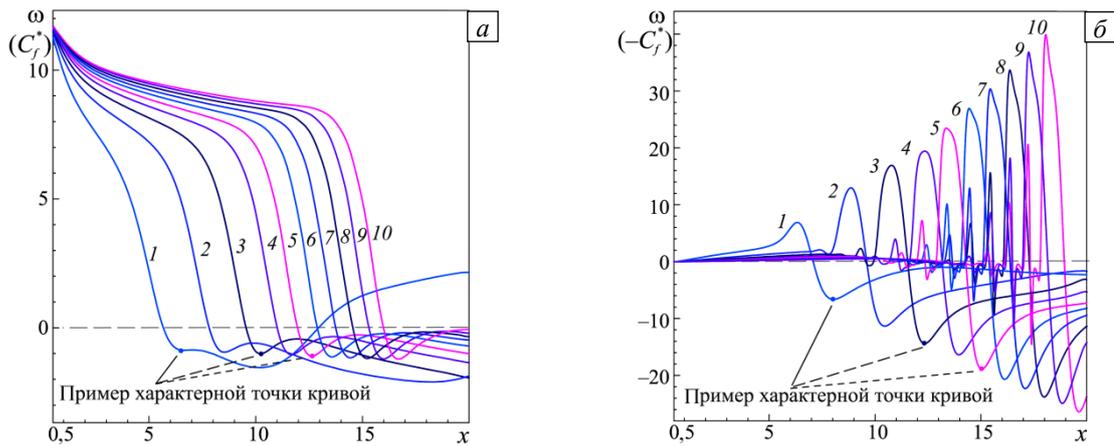
И наконец, на рисунке 11 приведено поперечное распределение функции тока  $\psi(y)$ . Из графиков следует, что поток в рассматриваемом сечении ускоряется, о чем свидетельствует уменьшение наклона кривых к оси абсцисс с ростом значения  $Re$ . Для  $Re > 6000$  присутствие первичной зоны рециркуляции приводит к изменению знака  $\psi$  в нижней части профиля. При этом хорошо видно, что рост значения числа Рейнольдса вызывает увеличение высоты первичного вихря, которая достигает своего максимума приблизительно равного 0,5 для  $Re = 10000$ .

Совокупный анализ кривых на рисунках 8–11 говорит о том, что при переходе от  $Re = 6000$  к 7000 (то есть от кривой 6 к кривой 7) происходит качественное изменение структуры течения в сечении  $x = 15,5$ . Это связано с появлением в данном сечении задней кромки первичного вихря за уступом. Некоторое исключение представляют собой графики на рисунке 9, которые свидетельствуют о перестроении движения жидкости между кривыми 5 и 7. Первую стадию его видоизменения — между профилями 5 и 6 — можно объяснить появлением нисходящего основного течения (см. Рис. 7e), а причина второй стадии перестройки потока — между кривыми 6 и 7 — все та же — появление задней кромки первичного вихря.

Поведение завихренности вдоль продольных стенок канала представлено на рисунке 12. Из-за наличия малых вихрей  $P_i^b$  ( $i=1, 2, \dots$ ) профили  $\omega$  вдоль нижней стенки характеризуются ярко выраженной немонотонностью. При этом границы пристенных вихрей несложно установить в силу того,



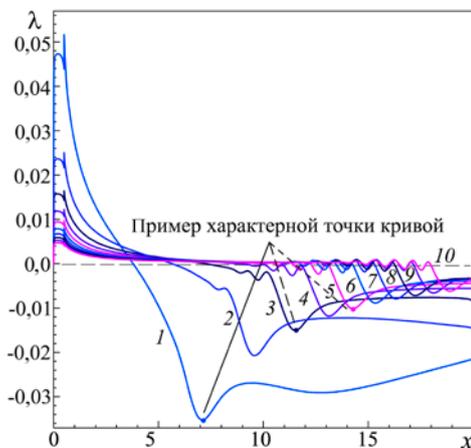
**Рис. 11.** Функция тока в сечении  $x=15,5$  при числах Рейнольдса  $1000 \leq Re \leq 5000$  (а) и  $6000 \leq Re \leq 10000$  (б); 1000 (кривая 1); 2000 (2); 3000 (3); 4000 (4); 5000 (5); 6000 (6); 7000 (7); 8000 (8); 9000 (9); 10000 (10)



**Рис. 12.** Распределение завихренности (модифицированного коэффициента трения) вдоль стенок канала в сечениях  $y=1$  (а) и  $y=0$  (б) при различных значениях числа Рейнольдса  $Re$  : 1000 (кривая 1); 2000 (2); 3000 (3); 4000 (4); 5000 (5); 6000 (6); 7000 (7); 8000 (8); 9000 (9); 10000 (10)

что при переходе от одного вихря к другому завихренность меняет свой знак. По причине совпадения на стенке определений завихренности и модифицированного коэффициента трения (см. формулу (9)) кривые на рисунке 12 можно рассматривать как распределение  $C_f^*$  по длине канала. Единственное отличие этих двух величин заключается в противоположности их знаков на нижней стенке ( $C_f^* = -\omega$  при  $y=0$ ) из-за внешнего направления нормали, используемой в формуле для  $C_f^*$ .

Графики коэффициента гидродинамического сопротивления потоку вдоль канала приведены на рисунке 13. Здесь нужно обратить внимание на следующие моменты. Во-первых, значение  $\lambda$



**Рис. 13.** Распределение коэффициента гидродинамического сопротивления потоку при различных значениях числа Рейнольдса  $Re$  : 1000 (кривая 1); 2000 (2); 3000 (3); 4000 (4); 5000 (5); 6000 (6); 7000 (7); 8000 (8); 9000 (9); 10000 (10)

во входной части канала ( $0 \leq x \leq l_c$ ) почти постоянно и хорошо согласуется с величиной, получаемой по известной формуле для гладких плоских каналов:  $\lambda = 24 / Re_c$  [31], где  $Re_c$  определяется через  $(1-h_c)$  — высоту входной части канала. Во-вторых, скачок  $\lambda$  в сечении  $x_0 - l_c$  говорит о сингулярности решения в окрестности верхней кромки уступа. В-третьих, положение локального минимума профиля  $\lambda$  зависит от расположения задней кромки первичного вихря, в то время как местонахождение передней кромки верхнего вихря  $T_1$  никак на это положение не влияет. И наконец, в-четвертых, слабые колебания кривых около нулевого уровня указывают на сложную структуру течения в задней по потоку части первичной зоны рециркуляции.

Все графики на рисунках 12 и 13 обладают интересной особенностью: позиция характерной точки кривой (такой точкой, например, может быть локальный экстремум) описывается приближенной формулой

$$x - l_c \approx (x_0 - l_c) \left( \frac{Re}{Re_0} \right)^{0,45}, \tag{12}$$

где  $Re_0$  есть некоторое фиксированное число Рейнольдса, а  $x_0$  — горизонтальная координата рассматриваемой характерной точки кривой при  $Re = Re_0$  (см. Рис. 12 и 13). При этом следует заметить, что при различных  $Re$  графики не являются подобными. Для этого достаточно обратить внимание на отличия в поведении кривых  $\omega$  и  $\lambda$  для  $Re=1000$  от их поведения для других значений  $Re$  или сравнить количество локальных экстремумов у профилей  $\lambda$  для различных чисел Рейнольдса. Данные в таблице 3 иллюстрируют точность соотношения (12) на примере позиций локального минимума кривых

Таблица 3. Координата  $(x-l_c)$  экстремумов кривых на рисунках 12 и 13

Re/Re <sub>0</sub>		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случай I	Рис. 12a	5,95	8,04	9,74	11,27	12,16	13,11	13,98	14,73	15,53	16,77
	Формула (12)	5,95	8,13	9,75	11,10	12,28	13,33	14,28	15,17	15,99	16,77
Случай II	Рис. 13	6,60	9,09	11,06	12,66	13,81	14,86	15,84	16,78	17,64	18,60
	Формула (12)	6,60	9,02	10,82	12,32	13,62	14,78	15,84	16,82	17,74	18,60

завихренности при  $y=1$  (Рис. 12a) и локального минимума кривых коэффициента  $\lambda$  (Рис. 13) (в таблице они обозначены как случай I и II соответственно). Если принять  $Re_0 = 1000$ , то по рисункам 12 и 13 также нетрудно установить, что  $x_0 - l_c$  составляет 5,95 для случая I и 6,60 для случая II.

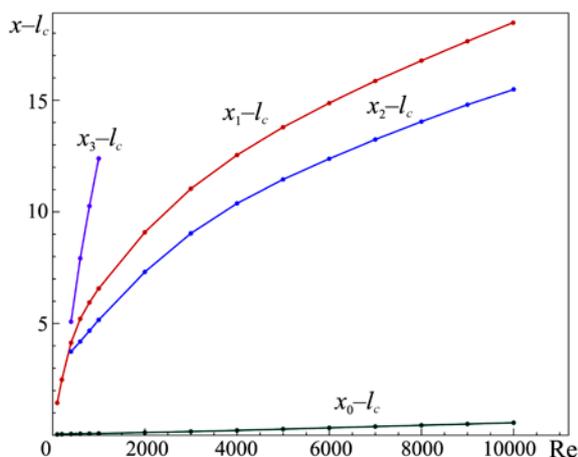


Рис. 14. Зависимости от числа Re положений передних и задних кромок вихрей; здесь  $x_0 - l_c$  и  $x_1 - l_c$  – горизонтальный размер, соответственно, вихря в основании уступа и первичного вихря за уступом,  $x_2 - l_c$  и  $x_3 - l_c$  – горизонтальное расстояние от уступа до передней и задней кромок верхнего вихря (см. Рис. 1)

Видно хорошее согласование расчетных и аппроксимационных результатов: относительная ошибка не превышает 2–3%. Понятно, что формула (12) справедлива только для  $ER = 2$ . Если же возникнет необходимость в дополнительном учете величины  $ER$ , то это приведет к более сложному соотношению, подобному, например, формуле определения длины первичного вихря в [21].

На рисунке 14 изображены зависимости положений передних и задних кромок вихрей для Re от 100 до 10000 в пределах горизонтального размера расчетной области. Малая длина кривой  $x_3 - l_c$  объясняется, с одной стороны, быстрым увеличением координаты  $x_3$ , а с другой стороны, небольшим размером самого канала. Нетрудно видеть, что координаты кромок вихрей зависят от Re нелинейно. Однако с ростом значения числа Рейнольдса эта нелинейность становится пренебрежимо малой.

## 6. Заключение

В работе представлены численные решения уравнений Навье–Стокса применительно к задаче стационарного течения несжимаемой вязкой жидкости в коротком плоском канале с обратным уступом. Полученные результаты хорошо согласуются как с теоретическими, так и экспериментальными данными других исследователей. Продемонстрирована эволюция течения при параметре расширения потока  $ER = 2$  для чисел Рейнольдса от 1000 до 10000 с шагом 1000. Определены основные параметры центров вихрей: координаты, значения функций тока и завихренности. Проанализированы профили компонент скорости, функции тока и завихренности в поперечном сечении  $x=15,5$ , а также коэффициентов трения и гидродинамического сопротивления потоку вдоль канала. Приведена простая аппроксимационная формула для нахождения положений характерных точек кривых  $C_f^*$  и  $\lambda$ .

На базе полученных решений задачи для чисел Рейнольдса от 1000 до 10000 при  $ER = 2$  можно сделать следующие выводы:

1. С ростом величины числа Рейнольдса структура течения усложняется вплоть до формирования сильно растянутого по потоку первичного вихря за уступом с несколькими центрами вращения и седловыми точками между ними.
2. Между первичным вихрем и нижней стенкой возникают небольшие вихри, количество которых растет по мере увеличения значения Re.
3. Распределение по длине канала модифицированного коэффициента трения и гидродинамического сопротивления потоку имеет немонотонный характер, что отражает сложную структуру отрывного течения в канале.

4. Максимальная абсолютная величина модифицированного коэффициента трения достигается при максимальном значении  $Re$ . И, наоборот, максимальная абсолютная величина коэффициента гидродинамического сопротивления потоку имеет место при минимальном значении числа Рейнольдса.

## Литература

1. *Gartling D.K.* A test problem for outflow boundary conditions – flow over a backward-facing step // *Int. J. Numer. Meth. Fl.* – 1990. – Vol. 11, no. 7. – P. 953-967. DOI
2. *Rogers S.E., Kwak D.* An upwind differencing scheme for the incompressible Navier–Stokes equations // *Appl. Numer. Math.* – 1991. – Vol. 8, no. 1. – P. 43-64. DOI
3. *Durst F., Pereira J.C.F., Tropea C.* The plane symmetric sudden-expansion flow at low Reynolds numbers // *J. Fluid Mech.* – 1993. – Vol. 248. – P. 567-581. DOI
4. *Valencia A., Hinojosa L.* Numerical solutions of pulsating flow and heat transfer characteristics in a channel with a backward-facing step // *Heat Mass Transfer.* – 1997. – Vol. 32, no. 3. – P. 143-148. DOI
5. *Батенко С.Р., Терехов В.И.* Влияние динамической предыстории потока на аэродинамику ламинарного отрывного течения в канале за обратным прямоугольным уступом // *ПМТФ.* – 2002. – Т. 43, № 6. – С. 84-92. (English version DOI).
6. *Biswas G., Breuer M., Durst F.* Backward-facing step flows for various expansion ratios at low and moderate Reynolds numbers // *J. Fluids Eng.* – 2004. – Vol. 126. – P. 362-374. DOI
7. *Батенко С.Р., Терехов В.И.* Трение и теплообмен в ламинарном отрывном потоке за прямоугольным уступом при наличии пористого вдува или отсоса // *ПМТФ.* – 2006. – Т. 47, № 1. – С. 18-28. (English version DOI).
8. *Abu-Nada E., Al-Sarkhi A., Akash B., Al-Hinti I.* Heat transfer and fluid flow characteristics of separated flows encountered in a backward-facing step under the effect of suction and blowing // *J. Heat Transfer.* – 2007. – Vol. 129, no. 11. – P. 1517-1528. DOI
9. *Бубенчиков А.М., Фирсов Д.К., Котовщикова М.А.* Численное решение плоских задач динамики вязкой жидкости методом контрольных объемов на треугольных сетках // *Матем. моделирование.* – 2007. – Т. 19, № 6. – С. 71-86.
10. *Бруцкий Е.В., Костин А.Г.* Прямое численное моделирование течения в плоском внезапно расширяющемся канале на основе уравнений Навье–Стокса // *Прикладна гідромеханіка.* – 2010. – Т. 12, № 1. – С. 11-27.
11. *Попонин В.С., Кошеутов А.В., Григорьев В.П., Мельникова В.Н.* Метод спектральных элементов для решения плоских задач динамики вязкой жидкости на неразнесенных неструктурированных сетках // *Известия Томского политехнического университета.* – 2010. – Т. 317, № 2. – С. 31-36.
12. *Фомин А.А., Фомина Л.Н.* Численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости и теплообмена в плоском канале с обратным уступом // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* – 2015. – Т. 25:2. – С. 280-294. DOI
13. *Алексин В.А., Манаенкова Т.А.* Расчет течений несжимаемой жидкости с отрывом и учетом теплообмена // *Известия МГИУ.* – 2011. – № 4(24). – С. 28-38.
14. *Борзенко Е.И., Хегай Е.И.* Численное моделирование стационарного течения жидкости Балкли–Гершеля в канале с внезапным расширением // *Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика.* – 2016. – Т. 1 (39). – С. 68-81. DOI
15. *Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schönung B.* Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow // *J. Fluid Mech.* – 1983. – Vol. 127. – P. 473-496. DOI
16. *Cruchaga M.A.* A study of the backward-facing step problem using a generalized streamline formulation // *Commun. Numer. Meth. En.* – 1998. – Vol. 14, no. 8. – P. 697-708. DOI
17. *Lee T., Mateescu D.* Experimental and numerical investigation of 2-D backward-facing step flow // *J. Fluid. Struct.* – 1998. – Vol. 12, no. 6. – P. 703-716. DOI
18. *Chiang T.P., Sheu T.W.H., Fang C.C.* Numerical investigation of vortical evolution in a backward-facing step expansion flow // *Appl. Math. Model.* – 1999. – Vol. 23, no. 12. – P. 915-932. DOI
19. *Mouza A.A., Pantzali M.N., Paras S.V., Tihon J.* Experimental & numerical study of backward-facing step flow // 5th National Chemical Engineering Conference. – Thessaloniki, Greece, 2005. (URL: [http://philon.cheng.auth.gr/philon/site/sdocs/paper%20PESXM\\_Tihon.pdf](http://philon.cheng.auth.gr/philon/site/sdocs/paper%20PESXM_Tihon.pdf)).
20. *Erturk E.* Numerical solutions of 2-D steady incompressible flow over a backward-facing step, Part I: High Reynolds number solutions // *Comput. Fluids.* – 2008. – Vol. 37, no. 6. – P. 633-655. DOI
21. *Tihon J., Pěnková V., Havlica J., Šimčík M.* The transitional backward-facing step flow in a water channel with variable expansion geometry // *Exp. Therm. Fluid Sci.* – 2012. – Vol. 40. – P. 112-125. DOI
22. *Saleel C.A., Shaija A., Jayaraj S.* On simulation of backward facing step flow using immersed boundary method // *American Journal of Fluid Dynamics.* – 2013. – Vol. 3, no. 2. – P. 9-19. (URL: <http://article.sapub.org/10.5923.j.ajfd.20130302.01.html>)
23. *Teruel F.E., Fogliatto E.* Numerical simulations of flow, heat transfer and conjugate heat transfer in the backward-facing step geometry // *Mecánica Computacional.* – 2013. – Vol. 32, no. 39. – P. 3265-3278. (URL: <http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/viewFile/4551/4480>).
24. *Moffatt H.K.* Viscous and resistive eddies near a sharp corner // *J. Fluid Mech.* – 1964. – Vol. 18, no. 1. – P. 1-18. DOI
25. *Sinha S.N., Gupta A.K., Oberai M.* Laminar separating flow over backsteps and cavities. Part I: Backsteps // *AIAA Journal.* – 1981. – Vol. 19, no. 12. – P. 1527-1530. DOI
26. *Erturk E.* Discussions on driven cavity flow // *Int. J. Numer. Meth. Fl.* – 2009. – Vol. 60, no. 3. – P. 275-294. DOI
27. *Фомин А.А., Фомина Л.Н.* О стационарном решении задачи течения несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса // *Мат. моделир. и числ. методы.* – 2015. – № 4(8). – С. 92-109. (URL: <http://mmcm.bmstu.ru/articles/65/>)
28. *Фомин А.А., Фомина Л.Н.* Численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости в коротком плоском канале с обратным уступом // *Матем. моделирование.* – 2016. – Т. 28, № 5. – С. 32-46.

29. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
30. Kosma Z. The method of lines for the computation of incompressible viscous flows // PAMM Proc. Appl. Math. Mech. – 2009. – Vol. 9, no. 1. – P. 483-484. DOI
31. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учебник для вузов. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
32. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // ЖВММФ. – 1975. – Т. 15, № 1. – С. 197-207. (English version DOI).
33. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
34. Фомин А.А., Фомина Л.Н. Ускорение полинейного рекуррентного метода в подпространствах Крылова // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. – 2011. – № 2. – С. 45-54.
35. Лашкин С.В., Козелков А.С., Ялозо А.В., Герасимов В.Ю., Зеленский Д.К. Исследование эффективности параллельной реализации алгоритма SIMPLE на многопроцессорных ЭВМ // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2016. – Т. 9, № 3. – С. 298-315. DOI

## References

1. Gartling D.K. A test problem for outflow boundary conditions-flow over a backward-facing step. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 1990, vol. 11, no. 7, pp. 953-967. DOI
2. Rogers S.E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier–Stokes equations. *Appl. Numer. Meth.*, 1991, vol. 8, no. 1, pp. 43-64. DOI
3. Durst F., Pereira J.C.F., Tropea C. The plane symmetric sudden-expansion flow at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 1993, vol. 248, pp. 567-581. DOI
4. Valencia A., Hinojosa L. Numerical solutions of pulsating flow and heat transfer characteristics in a channel with a backward-facing step. *Heat Mass Transfer*, 1997, vol. 32, no. 3, pp. 143-148. DOI
5. Batenko S.R., Terekhov V.I. Effect of dynamic prehistory on aerodynamics of a laminar separated flow in a channel behind a rectangular backward-facing step. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2002, vol. 43, no. 6, pp. 854-860. DOI
6. Biswas G., Breuer M., Durst F. Backward-facing step flows for various expansion ratios at low and moderate Reynolds numbers. *J. Fluids Eng.*, 2004, vol. 126, pp. 362-374. DOI
7. Batenko S.R., Terekhov V.I. Friction and heat transfer in a laminar separated flow behind a rectangular step with porous injection or suction. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2006, vol. 47, no. 1, pp. 12-21. DOI
8. Abu-Nada E., Al-Sarkhi A., Akash B., Al-Hinti I. Heat transfer and fluid flow characteristics of separated flows encountered in a backward-facing step under the effect of suction and blowing. *J. Heat Transfer*, 2007, vol. 129, no. 11, pp. 1517-1528. DOI
9. Bubenchikov A.M., Firsov D.K., Kotovshchikova M.A. Numerical solution of 2D viscous fluid dynamics problems using finite volume method (FVM) on triangular grid. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*, 2007, vol. 19, no. 6, pp. 71-86.
10. Bruyatskii E.V., Kostin A.G. Pryamoe chislennoe modelirovanie techeniya v ploskom vnezapno rasshiryayushchemsya kanale na osnove uravnenii Navi'e–Stoksa [Direct numerical simulation of flow in a plane channel with sudden expansion based on the Navier-Stokes equations]. *Prikladna gidromekhanika – Applied Hydrodynamics*, 2010, vol. 12, no. 1, pp. 11-27.
11. Poponin V.S., Kosheutov A.V., Grigor'ev V.P., Mel'nikova V.N. Metod spektral'nykh elementov dlya resheniya ploskikh zadach dinamiki vyazkoi zhidkosti na neraznesennykh nestruturirovannykh setkakh [A method of spectral elements for solving plane problems of viscous fluid dynamics on unshifted unstructured grids]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2010, vol. 317, no. 2, pp. 31-36.
12. Fomin A.A., Fomina L.N. Numerical simulation of the viscous incompressible fluid flow and heat transfer in a plane channel with backward-facing step. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, vol. 25:2, pp. 280-294. DOI
13. Aleksin V.A., Manaenkova T.A. Raschet techenii neszchimaemoi zhidkosti s otryvom i uchetom teploobmena [Calculation of incompressible separated fluid flows, taking into account heat transfer]. *Izvestiya of the Moscow State Industrial University*, 2011, no. 4(24), pp. 28-38.
14. Borzenko E.I., Khagai E.I. Numerical simulation of the steady-state Herschel–Bulkley fluid flow in a channel with sudden expansion. *Vestn. Tom. gos. un-ta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2016, no. 1(39), pp. 68-81. DOI
15. Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schönung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 127, pp. 473-496. DOI
16. Cruchaga M.A. A study of the backward-facing step problem using a generalized streamline formulation. *Commun. Numer. Meth. En.*, 1998, vol. 14, no. 8, pp. 697-708. DOI
17. Lee T., Mateescu D. Experimental and numerical investigation of 2-D backward-facing step flow. *J. Fluid. Struct.*, 1998, vol. 12, no. 6, pp. 703-716. DOI
18. Chiang T.P., Sheu T.W.H., Fang C.C. Numerical investigation of vortical evolution in a backward-facing step expansion flow. *Appl. Math. Model.*, 1999, vol. 23, no. 12, pp. 915-932. DOI
19. Mouza A.A., Pantzali M.N., Paras S.V., Tihon J. Experimental & Numerical study of backward-facing step flow. *5th National Chemical Engineering Conference, Thessaloniki, Greece*, 2005. (URL: [http://philon.cheng.auth.gr/philon/site/sdocs/paper%205PESXM\\_Tihon.pdf](http://philon.cheng.auth.gr/philon/site/sdocs/paper%205PESXM_Tihon.pdf)).
20. Erturk E. Numerical solutions of 2-D steady incompressible flow over a backward-facing step, Part I: High Reynolds number solutions. *Comput. Fluids*, 2008, vol. 37, no. 6, pp. 633-655. DOI
21. Tihon J., Pěnkavová V., Havlica J., Šimčík M. The transitional backward-facing step flow in a water channel with variable expansion geometry. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 2012, vol. 40, pp. 112-125. DOI

22. Saleel C.A., Shaija A., Jayaraj S. On simulation of backward facing step flow using immersed boundary method. *American Journal of Fluid Dynamics*, 2013, vol. 3, no. 2, pp. 9-19. DOI
23. Teruel F.E., Fogliatto E. Numerical simulations of flow, heat transfer and conjugate heat transfer in the backward-facing step geometry. *Mecánica Computacional*, 2013, vol. 32, no. 39, pp. 3265-3278. (URL: <http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/viewFile/4551/4480>).
24. Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *J. Fluid Mech.*, 1964, vol. 18, no. 1, pp. 1-18. DOI
25. Sinha, S.N., Gupta A.K., Oberai M. Laminar separating flow over backsteps and cavities. Part I: Backsteps. *AIAA Journal*, 1981, vol. 19, no. 12, pp. 1527-1530. DOI
26. Erturk E. Discussions on driven cavity flow. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 2009, vol. 60, no. 3, pp. 275-294. DOI
27. Fomin A.A., Fomina L.N. On stationary solution of the problem of an incompressible viscous fluid at high Reynolds numbers. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody* [Mathematical modeling and numerical methods], 2015, no. 4(8), pp. 92-109. (URL: <http://mmcm.bmstu.ru/articles/65/>)
28. Fomin A.A., Fomina L.N. Numerical simulation of viscous incompressible fluid in a short plane channel with backward-facing step. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2016, vol. 28, no. 5, pp. 32-46.
29. Roache P.J. *Computational fluid dynamics*. Hermosa Publishers, 1976. 446 p.
30. Kosma Z. The method of lines for the computation of incompressible viscous flows. *PAMM Proc. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol. 9, no. 1, pp. 483-484. DOI
31. Loitsyanskii L.G. *Mechanics of liquids and gases*. New York: Begell House, 1995. 971 p.
32. Belotserkovskii O.M., Gushchin V.A., Shchennikov V.V. Use of the splitting method to solve problems of the dynamics of a viscous incompressible fluid. *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, 1975, vol. 15, no. 1, pp. 190-200. DOI
33. Patankar S.V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Co, 1980. 197 p.
34. Fomin A.A., Fomina L.N. Acceleration of the line-by-line recurrent method in Krylov subspaces. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2011, no. 2, pp. 45-54.
35. Lashkin S.V., Kozelkov A.S., Yalozo A.V., Gerasimov V.Yu., Zelensky D.K. Efficiency analysis of parallel implementation of SIMPLE algorithm on multi-processor computers. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 298-315. DOI

Поступила в редакцию 15.05.2017; опубликована в электронном виде 04.10.2017

---

Сведения об авторах

Фомин Александр Аркадьевич, кфмн, снс, Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф.Горбачева (КузГТУ), 650000, Кемерово, ул. Весенняя, д. 28; e-mail: fomin\_aa@mail.ru

Фомина Любовь Николаевна, кфмн, доц., Кемеровский государственный университет (КемГУ), 650043, Кемерово, ул. Красная, д. 6; e-mail: lubafomina@mail.ru