

DOI: [10.7242/1999-6691/2017.10.3.20](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.3.20)
УДК 539.374

К РАСЧЕТУ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

А.А. Буренин^{1,2}, А.В. Ткачева¹, Г.А. Щербатюк²

¹*Институт машиностроения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация*

²*Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация*

На примере одномерной краевой задачи теории температурных напряжений, моделирующей сборку из цилиндрических деталей способом горячей посадки, обсуждаются особенности расчетного подхода к прогнозированию эволюции температурных напряжений в случае, когда выбираемые условия пластичности являются кусочно-линейными. Решение задачи основывается на классическом условии достижения касательными напряжениями своего максимума (на критерии Треска–Сен-Венана), а условие максимальных приведенных касательных напряжений (критерий Ишлинского–Ивлева) используется только для сравнения результатов. Показано, что применение в теории пластического течения классических кусочно-линейных потенциалов разрешает интегрирование уравнений равновесия как в области обратимого деформирования, так и в различных частях области пластического течения. Полученные таким способом зависимости занимают существенное место в алгоритме пошаговых по времени вычислений. Предлагаемый алгоритм наделяется свойством отслеживать на каждом временном шаге место и момент как зарождения, так и завершения пластических течений. В результате расчетов установлено, что, изменяясь вслед за температурой, напряжения в материалах элементов сборки могут перейти от соответствия определенной грани поверхности нагружения к соответствию ее ребру и далее – иной грани. Данное обстоятельство заставляет разделять область необратимого деформирования на части, в которых пластическое течение подчинено различным системам уравнений, учитывающим принадлежность напряженных состояний разным граням и ребрам поверхности нагружения. Построенный вычислительный алгоритм позволяет также фиксировать начало деления области течения на части, особенности продвижения границ частей по необратимо деформирующимся материалам, включая моменты их совпадения (исчезновение при этом частей расчетной области). Показано, что возможно возникновение повторного пластического течения. Оно зарождается при дальнейшем остывании сборки, когда вследствие эволюции напряженных состояний материалы ее элементов возвращаются в условия обратимого деформирования. Обнаружено, что учет смены режимов пластических течений, вызванной использованием кусочно-линейных пластических потенциалов, существенным образом сказывается на уровне и распределении остаточных напряжений и на итоговом натяге в сборке.

Ключевые слова: упругость, пластичность, температурные напряжения, горячая посадка, сборка с натягом

ON THE CALCULATION OF UNSTEADY THERMAL STRESSES IN ELASTOPLASTIC SOLIDS

A.A. Burenin^{1,2}, A.V. Tkacheva¹ and G.A. Scherbatyuk²

¹*Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation*

²*Komsomolsk-on-Amur State Technical University, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation*

The features of estimated prediction of thermal stress evolution are considered in terms of the one-dimensional boundary problem of the theory of thermal stresses, in which a shrink fit assembly of cylindrical parts is simulated on the assumption of piecewise linear plasticity conditions. The problem solution is principally based on the classical maximum shear stress criterion (Tresca–Saint Venant yield criterion), whereas the maximum reduced shear stress criterion (Ishlinsky–Ivlev yield criterion) is used only for comparison of calculation results. It is shown that the use of piecewise linear potentials makes it possible to integrate an equilibrium equation in both reversible deformation area and various irreversible deformation areas. Dependences thus obtained are used in a time-step calculation algorithm. Calculations have shown that, as the temperature changes, stresses in the materials of the assembly can change plastic flow pattern. It means that the correspondence of plastic flow to a certain facet of loading surface passes into the correspondence to an edge and then to other facet. These circumstances cause irreversible deformation areas to be divided into parts in which the plastic flow obeys different sets of simultaneous equations, which take into account the assignment of the stress states to different facets and edges of the loading surface. The designed algorithm makes it possible to trace the moments of appearance and disappearance of such plastic flow areas, as well as their propagation in the deformed material. The calculations demonstrate the possibility of occurrence of a repeated plastic flow during unloading in a certain area of the assembly after return of the process to reversible deformation conditions on cooling. It has been established that taking into account the change of plastic flows caused by the use of piecewise linear plastic potentials has an essential impact on the distribution of current and residual stresses and on the final tightness of the assembly.

Key words: elasticity, plasticity, thermal stresses, shrink fit, assembly with interference

1. Введение

Существуют промышленные технологии (сварка, горячая штамповка порошковых материалов и другие), в которых процессы упругопластического деформирования принципиально нельзя полагать изотермическими. Технологическая операция сборки способом горячей посадки элементов как раз относится к таковым, так как именно температурные напряжения, являющиеся следствием протекания термомодеформационных процессов, обеспечивают в сборке требуемый натяг [1]. Если не учитывать тепло, образующееся за счет необратимого деформирования, то моделирование данной операции сводится к краевой задаче теории температурных напряжений [2–4]. В рамках теории термоупругости такая задача

в настоящее время сведена, по существу, к инженерной, решение которой входит в нормативные технологические документы [5].

Положение существенно усложняется, когда учитываются пластические свойства материалов элементов сборки. Так, еще Д. Бленд, решая задачу определения температурных напряжений в толстостенной трубе [6], испытывающей интенсивные термомеханические воздействия, заметил, что область пластического течения может разделяться на подобласти, в которых течение, в зависимости от принадлежности напряженных состояний разным граням или ребрам призмы Треска (в пространстве главных напряжений поверхность текучести, определяемая кусочно-линейным условием пластичности Треска–Сен-Венана, представляет собой правильную шестигранную призму, ось которой равно наклонена к декартовым осям этого пространства), происходит по-разному [7]. Моменты возникновения поверхностей, разделяющих такие подобласти, закономерности продвижения этих поверхностей и упругопластических границ по деформируемым материалам являются элементами решения краевых задач и должны учитываться при их алгоритмизации. Ограниченность вычислительного аппарата приводила к тому, что первоначально решались только простейшие задачи термопластичности. Обширный квалифицированный обзор таких решений содержится в [8].

Соответствующие технические возможности появились только к концу прошлого столетия, что заметно продвинуло развитие теории термопластичности и, в частности, теории температурных напряжений в упругопластических телах [9–14]. В то же время интерес к задачам термопластичности постоянно поддерживался настоятельными требованиями технологической практики, поэтому были созданы новые математические модели [9, 11, 15, 16], способные отображать достаточно тонкие термомеханические эффекты, сопутствующие необратимому деформированию, построены модели, описывающие большие необратимые и неизотермические деформации [17–19], предложены численные и численно-аналитические методы решения задач термопластичности в разных постановках и на основе различных моделей [20–29].

Задача определения напряжений в сборке из цилиндрических деталей способом горячей посадки относится по своей постановке к простейшим задачам теории температурных напряжений и поэтому рассматривалась неоднократно [30–33]. При линейной зависимости предела текучести от температуры в [30–32] исследовались температурные напряжения плоского напряженного состояния, в [33] — температурные напряжения при плоских деформациях. Критерием пластичности в этих работах служило условие достижения касательным напряжением своего максимума [34]. Методика расчетов, использованная в [29, 30], опиралась на метод конечных элементов и поэтому оказалась не способной учесть в геометрии пластических областей изменения, связанные с появлением и исчезновением их частей. В рамках данного подхода невозможно было проследить возникновение и развитие новых областей течения: такие области с точностью до параметров их геометрии обязаны быть заданными изначально.

В данной работе применяется та же алгоритмизация задачи, что и в [32, 33]. Однако выбранные там исходные параметры (температура разогрева, механические постоянные, геометрические размеры) не позволили отобразить все особенности решения, связанные с кусочно-линейным представлением условия пластичности. Эти особенности заключаются в переходах напряженных состояний, отвечающих пластическим течениям, с грани поверхности нагружения на ребро (где имеет место состояние полной пластичности), и далее на иную грань. Незамеченным оказалось возникновение повторного пластического течения. Отметим, что ряд качественных эффектов в решениях задачи горячей посадки более отчетливо проявляется при применяемой здесь квадратичной зависимости предела текучести от температуры (а не линейной, как в [30–33]). Таким образом, цель дальнейшего исследования определим не только как прогнозирование на основе расчетного подхода эволюции температурных напряжений в процессе горячей посадки от момента соединения элементов сборки до момента полного их остывания до комнатной температуры, но и как рассмотрение процесса в условиях, при которых проявляются все особенности решения задачи, отражающие процесс.

2. Исходные соотношения

Для малых деформаций d_{ij} материала примем, что они разлагаются на упругую — e_{ij}^e , и пластическую — e_{ij}^p , составляющие:

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = e_{ij}^e + e_{ij}^p. \quad (1)$$

Здесь u_i — компонента вектора перемещений в прямоугольной декартовой системе координат. Упругие деформации, напряжения σ_{ij} и температура T связываются законом Дюамеля–Неймана [2, 3]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (\lambda e_{kk}^e - K\theta)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \\ \theta &= 3\alpha(T - T_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Будем считать, что в (2) параметры Ламе λ , μ , модуль всестороннего сжатия $K = \lambda + 2\mu/3$ и коэффициент линейного расширения α постоянны и не зависят от температуры; T_0 — комнатная температура, то есть такая температура, при которой элементы сборки находятся в свободном состоянии (в них отсутствуют деформации).

Рост пластических деформаций e_{ij}^p может происходить только при выполнении условия пластического течения $f(\sigma_{ij}) = 0$, которое задает некоторую поверхность в пространстве напряжений, называемую поверхностью нагружения. Если принять положения принципа максимума Мизеса [7, 34], то уравнение поверхности нагружения $f(\sigma_{ij}) = 0$ будет играть роль пластического потенциала, из которого следует ассоциированный закон пластического течения:

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{de_{ij}^p}{dt} = \psi \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}; \quad \psi > 0. \quad (3)$$

Далее рассмотрим наиболее простой случай, когда пластический потенциал является функцией только напряжений и не зависит от кинематических параметров и истории деформирования. Для продекларированных целей будем использовать кусочно-линейные пластические потенциалы (поверхности нагружения), отвечающие условию максимальных касательных напряжений (критерию Треска–Сен-Венана) и условию максимума приведенных касательных напряжений (критерию Ишлинского–Ивлева) [34]. В пространстве главных напряжений σ_i им соответствуют поверхности нагружения, описываемые уравнениями [34]:

$$\begin{aligned} \max |\sigma_i - \sigma_j| &= 2k, & 1 \\ \max |\sigma_i - \sigma| &= \frac{4}{3}k, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk}. & 2 \end{aligned} \quad (4)$$

Совокупность кусочно-линейных поверхностей (4₁) будем называть далее призмой Треска, (4₂) — призмой Ивлева. Предел текучести k в (4) зададим как зависимость от температуры:

$$k = k_0 \frac{(T_p - T)^2}{(T_p - T_0)^2}. \quad (5)$$

В (5) $k_0 = \text{const}$ есть предел текучести материала элемента сборки при комнатной температуре T_0 , T_p — температура его плавления. Поскольку предел текучести полагается зависимым от температуры, то в каждый момент времени поверхности нагружения (4) оказываются разными, но подобными самим себе в пространстве главных напряжений. Это позволяет не изменять вид ассоциированного закона текучести (3) и считать, что в рамках теории температурных напряжений записан он именно в рассматриваемый (расчетный) момент времени. Основанием для принятия данного положения является несвязанность деформационных и тепловых процессов в этой теории. При этом условия активного $\varepsilon_{ij}^p \neq 0$ и нейтрального $\varepsilon_{ij}^p = 0$ нагружений, а также разгрузки $\varepsilon_{ij}^p = 0$ приобретают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^p \neq 0 & \text{ при } f(\sigma_{ij}, T_m) = 0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{d\sigma_{ij}}{dt} > 0; & 1 \\ \varepsilon_{ij}^p = 0 & \text{ при } f(\sigma_{ij}, T_m) \leq 0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{d\sigma_{ij}}{dt} \leq 0. & 2 \end{aligned} \quad (6)$$

Выражения (6₂), где T_m — температура в рассматриваемый момент времени и в текущей точке упругопластического материала, необходимы для организации алгоритма решения задачи в соответствии именно с теорией температурных напряжений. Далее такой алгоритм представляется. Согласно ему

на каждом шаге по времени находятся распределения напряжений и деформаций (обратимых и необратимых) по предварительно вычисленному для заданного момента времени полю температуры. Предполагается сравнить друг с другом итоговые распределения остаточных напряжений и окончательные натяги в сборке, отвечающие критериям (4₁) и (4₂), а также эволюцию напряжений в процессе выравнивания температуры по элементам сборки.

3. Постановка задачи. Обратимое деформирование

Пусть в момент времени $t=0$ муфта (длинный полый цилиндр), нагретая до температуры T_* и имеющая при этом размеры $R_1 \leq r \leq R_2$, насаживается на вал размерами $0 \leq r \leq R_1$, находящийся при комнатной температуре T_0 . Считая сборку, состоящую из муфты и вала, достаточно длинной и пренебрегая краевыми эффектами, приходим к одномерной задаче теории температурных напряжений. Распределение температуры по сборке найдем путем решения уравнения теплопроводности. Пренебрегая связанностью процессов деформирования и теплопередачи, запишем

$$T_{,t} = a(T_{,rr} + r^{-1}T_{,r}). \quad (7)$$

В записи (7) использованы цилиндрические координаты r, φ, z ; индексом после запятой обозначены соответствующие частные производные; a — коэффициент теплопроводности ($a = a_1$ для материала муфты, $a = a_2$ для материала вала).

Уравнение теплопроводности (7) следует дополнить начальными и граничными условиями. В качестве начальных условий имеем $T(r, 0) = T_0$ при $0 < r \leq R_1$ и $T(r, 0) = T_*$ при $R_1 \leq r \leq R_2$. Граничными условиями рассматриваемой одномерной задачи являются:

– на свободной границе $r = R_2$

$$\psi_2 T_{,r} \Big|_{r=R_2} = \chi(T_0 - T); \quad (8)$$

– на контактной поверхности $r = R_1$

$$\begin{aligned} T^{(1)} \Big|_{r=R_1} &= T^{(2)} \Big|_{r=R_1}, \\ \psi_1 T_{,r}^{(1)} \Big|_{r=R_1} &= \psi_2 T_{,r}^{(2)} \Big|_{r=R_1}. \end{aligned} \quad (9)$$

В (8), (9) принято: ψ_1, ψ_2 — коэффициенты теплопроводности для материала вала и муфты соответственно, χ — коэффициент теплоотдачи от внешней поверхности муфты $r = R_2$ в окружающую среду.

Непосредственно после момента соединения материалы элементов сборки деформируются упруго. Их деформации определяются через единственную отличную от нуля компоненту u_r вектора перемещений $u_r = u(r, t)$: $d_{rr} = e_{rr}^e = u_{,r}$; $d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi}^e = r^{-1}u$. Остальные компоненты тензора деформаций равняются нулю. Уравнение равновесия с учетом зависимостей (2) сводится к виду:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) = \frac{K}{w} \frac{\partial \theta}{\partial r}. \quad (10)$$

Интегрируя (10), где $w = 2\mu + \lambda$, получаем распределение перемещения $u(r, t)$ и, следовательно, напряжений, в зависимости от температуры $T(r, t)$ в каждый рассматриваемый момент времени

$$\begin{aligned} u^{(j)} &= 0,5rC_1^{(j)}(t) + r^{-1}C_2^{(j)}(t) + w^{-1}F(-1, l, r), \\ \sigma_r^{(j)} &= gC_1^{(j)}(t) + (-2\mu)r^{-2}C_2^{(j)}(t) - 2\mu(rw)^{-1}F(-1, l, r), \\ \sigma_\varphi^{(j)} &= 2\mu(rw)^{-1}(F(-1, l, r) - rK\theta(r, t)) + C_1^{(j)}(t)g + 2r^{-2}\mu C_2^{(j)}(t), \\ \sigma_z^{(j)} &= \lambda C_1^{(j)}(t) - 2\mu w^{-1}K\theta(r, t), \\ F(h, l_j, r) &= Kr^h \int_{l_j}^r \rho^{-h} \theta(\rho, t) d\rho, \quad g = (\lambda + \mu). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $j=1$ относится к материалу вала и $j=2$ — к материалу муфты, при этом в (11) $l_1=0$, $l_2=R_1$. Необходимо также учитывать, что параметры λ и μ для материалов вала и муфты могут принимать разные значения (так же как и коэффициенты теплопроводности).

Распределение температуры по элементам сборки устанавливается в результате решения краевой задачи (7)–(9). В обсуждаемом здесь простейшем случае решение можно найти аналитически, а при более сложной геометрии — численно. Вследствие того, что при пошаговых по времени расчетах решение приходится отыскивать многократно, удобным оказался разностный подход, основанный на неявной конечно-разностной схеме и методе прогонки. По полученному таким способом распределению температуры в каждый рассматриваемый момент времени вычисляются распределения перемещений, деформаций и напряжений. Значения постоянных интегрирования (функций времени) на каждом шаге расчетов находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений при выполнении граничных условий: отсутствие напряжения σ_r на свободной поверхности муфты $r=R_2$ ($\sigma_r(t, R_2)=0$); непрерывность перемещения u_r и радиального напряжения σ_r на поверхности контакта $r=R_1$; равенство нулю компоненты перемещения u_r на оси вала ($u_r^{(1)}(0, t)=0$). Из последнего ограничения непосредственно вытекает, что $C_2^{(1)}=0$. Однако предлагаемый в данной работе алгоритм правомерен только до некоторого момента времени $t=t_1 > 0$. В результате получаем, что в момент времени $t=t_2 > t_1$ на граничной поверхности муфты $r=R_1$ справедливо условие пластического течения материала и, следовательно, образуется и далее развивается область необратимого деформирования.

4. Пластическое течение

Первоначально воспользуемся критерием максимального касательного напряжения (4₁). Последовательные расчеты показывают, что пластическое течение в муфте возникает на ее контактирующей с валом поверхности $r=R_1$ и распространяется по материалу вглубь муфты. При этом пластическая область отделяется от упругой упругопластической границей, движущейся по закону $r=n_1(t) > R_1$. Пластическое течение происходит в условиях соответствия напряженного состояния грани призмы Треска: $\sigma_r - \sigma_\phi = -2k$. Таким образом, в сборке появляются три области, в двух из которых — $0 \leq r \leq R_1$, $n_1(t) \leq r \leq R_2$, продолжается упругое деформирование, а в третьей области — $R_1 \leq r \leq n_1(t)$, деформации необратимы (пластические).

На рисунке 1 схематически представлена последовательность возникновения и исчезновения различных областей обратимого («Упр.») и необратимого (приводятся формулы грани или ребра) деформирования в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_7 . Так, рисунок 1а соответствует упругому деформированию до начала течения — до момента t_1 , рисунок 1б — пластическому течению с напряжениями, отвечающими грани $\sigma_r - \sigma_\phi = -2k$ с момента t_1 до времени t_2 , рисунок 1в — деформированию с момента возникновения разгружающей упругопластической границы $r=m_1(t)$ и до времени t_3 — момента полного исчезновения течения и так далее.

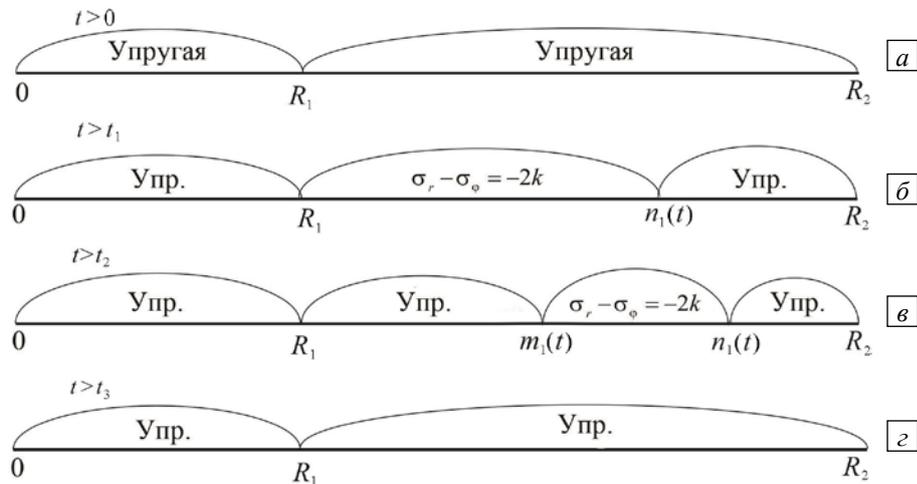


Рис. 1. Схематичное представление возникновения и исчезновения различных областей деформирования: термоупругое деформирование (а), развитие первой области пластического течения (б) и так далее

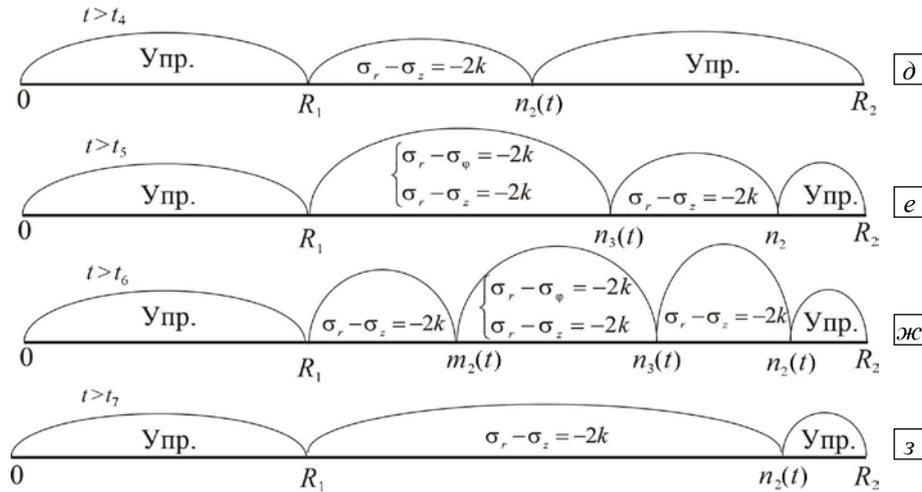


Рис. 1. Продолжение

Используя соответствие напряженного состояния определенной грани призмы Треска — $\sigma_r - \sigma_\phi = -2k$, и следующее из ассоциированного закона пластического течения условие пластической несжимаемости — $e_r^p + e_\phi^p = 0$, $e_z^p = 0$, найдем: $e_r^p = 0,5(u_{,r} - r^{-1}u + k\mu^{-1})$. Это позволяет записать напряжения в (2) как

$$\begin{aligned}\sigma_r &= g(u_{,r} + r^{-1}u) - k - K\theta, \\ \sigma_\phi &= g(u_{,r} + r^{-1}u) + k - K\theta, \\ \sigma_z &= \lambda(u_{,r} + r^{-1}u) - K\theta.\end{aligned}\quad (12)$$

Учитывая (12), приводим уравнение равновесия (10) к виду:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) \right) = -g^{-1} \left(\frac{2}{r} k + \frac{\partial k}{\partial r} + K \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (13)$$

Подстановка решения (12) в (11) дает следующие выражения:

$$\begin{aligned}u^{(3)} &= g^{-1} (F(-1, l, r) + G(1, l, r)) + 0,5C_1^{(3)}(t)r + C_2^{(3)}(t)r^{-1}, \\ \sigma_r^{(3)} &= gC_1^{(3)}(t) + 2r^{-1}G(1, l, r), \\ \sigma_\phi^{(3)} &= gC_1^{(3)}(t) + 2r^{-1}G(1, l, r) + 2k(r, t), \\ \sigma_z^{(3)} &= -g^{-1} (K\mu\theta(r, t) - \lambda(2r^{-1}G(1, l, r) + k(r, t))) + \lambda C_1^{(3)}(t), \\ e_r^p &= (2g)^{-1} (K\theta(r, t) + \mu\mu^{-1}k(r, t)) - (rg)^{-1} F(-1, l, r) - r^{-2}C_2^{(3)}(t), \\ G(h, l, r) &= r^h \int_l^r \rho^{-h} k(\rho, t) d\rho, \quad l = R_1.\end{aligned}\quad (14)$$

Зависимости (14) вместе с (11) разрешили бы задачу отыскания температурных напряжений по определенному ранее распределению температуры, если бы в них были известны функции времени $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$, $C_1^{(3)}$, $C_2^{(3)}$ и положение упругопластической границы $n_1(t)$. Значения этих семи функций в каждый расчетный момент времени находятся из решения системы алгебраических уравнений, получающейся в результате выполнения краевых условий совместно с условием непрерывности перемещений, деформаций и напряжений на упругопластической границе $r = n_1(t)$. Проведенные расчеты подтверждают, что на упругопластической границе имеет место активное нагружение, то есть $\sigma_r - \sigma_\phi = -2k$ при $r = n_1(t)$.

5. Разгрузка

Поиск температурных напряжений согласно алгоритму, включающему в себя зависимости (11) и (14) и вычисление на каждом шаге по времени распределения температуры по сборке, проводится

до некоторого момента времени $t = t_2 > t_1$. В момент t_2 от поверхности $r = R_1$ отделяется и начинает перемещаться по материалу муфты новая (теперь разгружающая) упругопластическая граница $r = m_1(t)$ (Рис. 1б). В результате в муфте образуется и растет область упругого деформирования: $R_1 \leq r \leq m_1(t)$. Обратимое деформирование в этой области возможно при наличии в ней накопленных, но далее не изменяющихся необратимых деформаций $p_r(r)$ и $p_\varphi(r)$. Отличие $e_r^p(r, t)$, $e_\varphi^p(r, t)$ от $p_r(r)$ и $p_\varphi(r)$, соответственно, заключается в том, что последние есть то же, что и первые, только время в них фиксированное — это моменты прихода упругопластической границы $r = m_1(t)$ к поверхности с текущей координатой r (для каждого r это свой момент времени).

Уравнение равновесия в области разгрузки $R_1 \leq r \leq m_1(t)$ выражается через перемещения $u_r(r, t)$ и приобретает вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) = \frac{K}{w} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{2\mu}{rw} (p_r - p_\varphi) - \frac{\lambda}{w} \frac{\partial}{\partial r} (p_\varphi) + \frac{\partial p_r}{\partial r}. \quad (15)$$

Разрешая это обыкновенное дифференциальное уравнение, найдем:

$$\begin{aligned} u^{(4)} &= 0,5rC_1^{(4)}(t) + r^{-1}C_2^{(4)}(t) + w^{-1} (F(-1, l, r) + 2\mu\Psi_r(1, l, r)), \\ \sigma_r^{(4)} &= gC_1^{(4)}(t) - (2\mu)r^{-2}C_2^{(4)}(t) + 2\mu(rw)^{-1} (2g\Psi_r(1, l, r) - F(-1, l, r)), \\ \sigma_\varphi^{(4)} &= 2\mu(rw)^{-1} (g(2\Psi_r(1, l, r) + 2rp_r(r)) + F(-1, l, r) - rK\theta(r, t)) + C_1^{(4)}(t)g + 2r^{-2}\mu C_2^{(4)}(t), \\ \sigma_z^{(4)} &= \lambda C_1^{(4)}(t) + 2\mu w^{-1} (\lambda(r^{-1}2\Psi_r(1, l, r) + p_r) - K\theta(r, t)), \\ \Psi_r(h, l, r) &= r^h \int_l^r \rho^{-h} p_r(\rho, t) d\rho, \quad l = R_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Сборка разделена теперь на четыре области: в двух из них $R_0 \leq r \leq R_1$ и $n_1(t) \leq r \leq R_2$ материал, согласно зависимостям (11), деформируется упруго; в области $m_1(t) \leq r \leq n_1(t)$ продолжается пластическое течение в соответствии с (14), где l следует положить равной $m_1(t)$; наконец в области $R_1 \leq r \leq m_1(t)$ в присутствии неизменяющихся пластических деформаций материал деформируется обратимо, и справедливы зависимости (16). Число находимых на каждом временном шаге значений функций увеличивается на четыре ($C_1^{(4)}$, $C_2^{(4)}$, m_1 , n_1 , а всего их станет десять) и сообразно с этим к числу алгебраических уравнений добавятся уравнения, вытекающие из условий на упругопластической границе $r = m_1(t)$.

В процессе последовательных во времени расчетов при выравнивании температуры в сборке наступает момент времени $t = t_3 > t_2$, когда упругопластическая граница разгрузки $r = m_1(t)$ догоняет упругопластическую границу нагрузки $r = n_1(t)$ (Рис. 1з). Далее сборка снова деформируется только обратимо, с тем только различием, что в области $R_1 \leq r \leq m_1(t_3) = n_1(t_3)$ величины вычисляются по (16), а в остальных областях — по (11). Казалось бы, что на этом процесс счета заканчивается, но оказалось, что это не так.

6. Повторное пластическое течение

Продолжая пошаговое по времени решение задачи определения напряжений и необратимых деформаций уже в рамках только термоупругого деформирования, обнаруживаем, что в некоторый момент времени $t_4 > t_3$ в муфте на ее граничной поверхности $r = R_1$ снова выполняется условие пластичности в форме $\sigma_r - \sigma_z = -2k$. То есть в материале возникает повторное пластическое течение с новой продвигающейся нагружающей упругопластической границей $r = n_2(t)$ ($n_2(t_4) = R_1$) и, следовательно, новая область течения $R_1 \leq r \leq n_2(t)$ (Рис. 1д). Теперь зависимости, вытекающие из закона Дюамеля–Неймана, принимают форму:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= w(u_{,r} - p_r - e_r^p) + \lambda(r^{-1}u - p_\varphi - e_z^p) - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= \lambda(u_{,r} - p_r + e_z^e - e_r^p - e_z^p) + w(r^{-1}u - p_\varphi) - K\theta, \\ \sigma_z &= \lambda(r^{-1}u + u_{,r} - p_\varphi - p_r - e_r^p) - w(e_z^p) - K\theta. \end{aligned}$$

Отличие $p_r(r)$ от $e_r^p(r,t)$, $p_\phi(r)$ от $e_\phi^p(r,t)$ ранее уже отмечалось, но здесь $e_r^p(r,t)$ и $e_\phi^p(r,t)$ отсчитываются от начальных своих значений, которыми и являются $p_r(r)$, $p_\phi(r)$. Уравнение равновесия в данной области повторного пластического течения сводится, таким образом, к виду:

$$gu_{,rr} + gr^{-1}u_{,r} - wr^{-2}u = K\theta_r + (k_{,r} + kr^{-1}) + \mu r^{-1}(p_r - 0,5p_\phi) + gp_{r,r} + \lambda p_{\phi,r}. \quad (17)$$

После интегрирования (17) получаем зависимости для u , σ_r , σ_ϕ , σ_z — решения задачи для области повторного пластического течения. Они записываются так:

$$\begin{aligned} u^{(5)} &= (2gh)^{-1} \left[q_1 \Psi_r(-h,l,r) + q_2 \Psi_r(h,l,r) + s_1 \Psi_\phi(-h,l,r) - s_2 \Psi_\phi(h,l,r) + h(G(-h,l,r) + G(h,l,r)) \right] + \\ &\quad + (2gh)^{-1} \left[((h+1)F(-h,l,r) + (h-1)F(h,l,r)) \right] + r^{-h} C_1^{(5)}(t) + r^h C_2^{(5)}(t), \\ \sigma_z^{(5)} &= (2ghr)^{-1} \left(-q_1 s_2 \Psi_\phi(h,l,r) + q_2 s_1 \Psi_\phi(-h,l,r) - q_1 q_2 (\Psi_r(h,l,r) - \Psi_r(-h,l,r)) \right) + \\ &\quad + (2ghr)^{-1} \left(q_1 ((h-1)F(h,l,r) + hG(h,l,r)) - q_2 ((h+1)F(-h,l,r) + hG(-h,l,r)) \right) + 2k(r,t) + \\ &\quad + q_2 r^{-1-h} C_1^{(5)}(t) + q_1 r^{h-1} C_2^{(5)}(t), \\ \sigma_\phi^{(5)} &= (2ghr)^{-1} \left(s_2 q_1 (\Psi_r(-h,l,r)) + q_1 q_2 (\Psi_\phi(-h,l,r) - \Psi_\phi(h,l,r)) - s_1 q_2 (\Psi_r(h,l,r)) \right) + \\ &\quad + (2ghr)^{-1} \left(s_1 ((h-1)F(h,l,r) - hG(h,l,r)) + s_2 ((h+1)F(-h,l,r) - hG(-h,l,r)) \right) + \\ &\quad + (w - \lambda^2 g^{-1}) p_\phi(r) - K \mu g^{-1} \theta(r,t) + \lambda g^{-1} k(r,t) + s_1 r^{h-1} C_2^{(5)}(t) - s_2 C_1^{(5)}(t) r^{-(1+h)}, \\ e_r^p &= (4gr)^{-1} \left(-q_1 (\Psi_r(-h,l,r)) - q_2 (\Psi_r(h,l,r)) - s_2 \Psi_\phi(h,l,r) - s_1 \Psi_\phi(-h,l,r) \right) + \\ &\quad + (4gr)^{-1} \left(F(h,l,r)(h-1) - F(-h,l,r)(h+1) + h(G(-h,l,r) - G(h,l,r)) \right) + \\ &\quad + (2g)^{-1} K \theta(r,t) + k(r,t) w (2g\mu)^{-1} + (2g)^{-1} p_\phi(r) + 0,5hr^{h-1} C_2^{(5)}(t) - 0,5hC_1^{(5)}(t) r^{-(1+h)}, \\ h &= \sqrt{w/g}, \quad s_1 = h\lambda + w, \quad s_2 = w - h\lambda, \quad s_3 = (hg)^2 - \lambda^2, \\ q_1 &= hg + \lambda, \quad q_2 = \lambda - hg, \quad q_3 = gh - w. \end{aligned} \quad (18)$$

В других двух областях, как показано на рисунке 1б, продолжается обратимое деформирование. Остаются справедливыми зависимости (11), (16) с тем только отличием, что в (16) следует положить $l = n_2(t)$. Значения функций времени $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $C_1^{(4)}$, $C_2^{(4)}$ и появившихся в (18) $C_1^{(5)}$, $C_2^{(5)}$ вместе с положением упругопластической границы n_2 необходимо рассчитать, как и ранее, исходя из краевых условий и условий на упругопластической границе $r = n_2(t)$.

Продолжая расчеты по обозначенному алгоритму, убеждаемся, что в некоторый момент времени $t = t_5 \geq t_4$ на контактной поверхности материала муфты становится справедливым критерий Треска $\sigma_r - \sigma_\phi = -2k$. Он, вместе с продолжающим выполняться требованием $\sigma_r - \sigma_z = -2k$, задаст состояние полной пластичности (ребро призмы Треска). С момента времени $t = t_5$ (Рис. 1е) от поверхности $r = R_1$ начинает движение поверхность $r = n_3(t)$, разделяющая пластическую область $R_1 \leq r \leq n_2(t)$ на две подобласти, в которых пластическое течение осуществляется в соответствии с различными системами уравнений. В подобласти $n_3(t) \leq r \leq n_2(t)$ напряжения соотносятся с гранью $\sigma_r - \sigma_z = -2k$, а в подобласти $R_1 \leq r \leq n_3(t)$ — с ребром призмы Треска. В первой подобласти остаются справедливыми (с точностью до функций времени $C_1^{(5)}$, $C_2^{(5)}$, которые требуется определять заново) выражения (18). В подобласти полной пластичности необходимо найти зависимости, аналогичные (18). Так, из закона Дюамеля–Неймана для области полной пластичности следует:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= w(u_{,r} - p_r - e_r^p) + \lambda(r^{-1}u - p_\phi - e_\phi^p - e_z^p) - K\theta, \\ \sigma_\phi &= \lambda(u_{,r} - p_r - e_r^p - e_z^p) + w(r^{-1}u - p_\phi - e_\phi^p) - K\theta, \\ \sigma_z &= \lambda(r^{-1}u + u_{,r} - p_r - p_\phi - e_r^p - e_\phi^p) - w(e_z^p) - K\theta. \end{aligned}$$

Повторное пластическое течение в этой области описывается дифференциальным уравнением равновесия:

$$K \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right) \right) = K \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{\partial k}{\partial r} + 2 \frac{k}{r} + \frac{\partial p_r}{\partial r} + \frac{\partial p_\phi}{\partial r}. \quad (19)$$

Интегрируя (19), получаем соотношения для нахождения перемещения и напряжений в области $R_1 \leq r \leq n_3(t)$ — области полного пластического течения:

$$\begin{aligned}
 u_r^{(6)} &= \Psi_r(-1, l, r) + \Psi_\varphi(-1, l, r) + K^{-1}F(-1, l, r) + (3K)^{-1}G(1, l, r) + \\
 &\quad + 2K^{-1}G(1, l, r) + 0,5C_1^{(6)}(t)r + C_2^{(6)}(t)r^{-1}, \\
 \sigma_r &= KC_1^{(6)}(t) + k(r, t) + 4r^{-1}G(h, l, r), \\
 e_r^p &= (2G(1, l, r) - G(-1, l, r))(3rK)^{-1} + (1/6)C_1^{(6)}(t) - r^{-2}C_2^{(6)}(t) + (2/3)\theta(r, t) - \\
 &\quad - (1/3)(14(3K)^{-1} - 2\mu^{-1})k(r, t) - (Kr)^{-1}F(-1, l, r) + p_\varphi(r) - \\
 &\quad - r^{-1}(\Psi_r(-1, l, r) + \Psi_\varphi(-1, l, r)), \\
 e_\varphi^p &= (2G_h + G_{-h})(3rK)^{-1} + (1/6)C_{i1} + r^{-2}C_{i2} - 3^{-1}\theta(r, t) - \\
 &\quad - (1/3)(7(3K)^{-1} + \mu^{-1})k(r, t) + (Kr)^{-1}F_{-h} - P_\varphi + r^{-1}(Qr_{-h} + Qy_{-h} + Qz_{-h}), \\
 l &= R_1.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Перемещения и напряжения в сборке, как и прежде, определяются: в упругих областях зависимостями (11) и (16) ($l = n_2(t)$); в области $n_3(t) \leq r \leq n_2(t)$ зависимостями (17), в которых следует положить $l = n_3(t)$. К существующим функциям времени $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $C_1^{(4)}$, $C_2^{(4)}$, $C_1^{(5)}$, $C_2^{(5)}$ добавляются новые — $C_1^{(6)}$, $C_2^{(6)}$, и неизвестное положение граничной поверхности $r = n_3(t)$. Эти параметры устанавливаются на каждом временном шаге на основании краевых условий, к которым добавляются условия непрерывности напряжений и перемещений на границе $l = n_3(t)$.

Затухание полного пластического течения начинается с момента времени $t = t_6$. У поверхности контакта скорость роста окружной пластической деформации становится равной нулю, из чего следует, что перестает работать критерий Треска $\sigma_r - \sigma_\varphi = -2k$ (Рис. 1ж). Напряженное состояние возвращается на грань $\sigma_r - \sigma_z = -2k$ призмы Треска. На поверхности $r = R_1$ зарождается разгружающая пластическая граница $m_2(t)$, которая, продвигаясь по материалу муфты, достигает в момент времени $t = t_7$ пластической границы $r = n_3(t_5)$, что приводит к затуханию полного пластического течения (Рис. 1з). В области $R_1 \leq r \leq m_2(t)$ имеет место равенство $e_\varphi^p(r, t) = e_\varphi^p(r, t_7) = p_\varphi(r)$, при этом пластические деформации e_r^p , e_z^p продолжают расти.

На временном отрезке $t_6 \leq t \leq t_7$ перемещения, деформации и напряжения описываются ранее приведенными зависимостями. Так, в области $R_1 \leq r \leq m_2(t)$ выполняются соотношения (18), в области $m_2(t) \leq r \leq n_3(t)$ — (20), с тем только отличием, что $l = m_2(t)$, в области $n_3(t) \leq r \leq n_2(t)$ решения находятся по (16) при $l = n_3(t)$, область муфты $n_2(t) \leq r \leq R_2(t)$ остается упругой, и здесь справедливы соотношения (11) с $l = n_2(t)$. На каждом временном шаге наряду с определением положений упругопластических границ необходимо снова осуществлять перерасчет коэффициентов интегрирования (функций времени) уравнений равновесия. При этом следует иметь в виду, что уравнения равновесия для различных областей течения и упругого деформирования записываются по-разному.

После полного прекращения пластического течения в сборке остается три области, в двух из которых ($0 \leq r \leq R_1$, $n_2(t) \leq r \leq R_2$) материал деформируется упруго, а в одной ($R_1 \leq r \leq n_2(t)$) — необратимо, в соответствии с условием пластичности $\sigma_r - \sigma_z = -2k$.

7. Остаточные напряжения

После окончания процесса теплопроводности (процесс завершится, если температура выровняется по элементам сборки и станет равной комнатной T_0) напряжения некоторым образом перераспределятся по ее объему. Такие напряжения называются остаточными, а значения σ_r на поверхности контакта $r = R_1$ — натягом в соединении. В рассматриваемом случае при комнатной температуре в части муфты напряженное состояние по-прежнему продолжает соответствовать грани $\sigma_r - \sigma_z = -2k$ призмы Треска (Рис. 1з). Следовательно, в условиях, когда $T = T_0$, в материале муфты присутствуют две области: область $R_1(t) \leq r \leq n_2 - \text{const}$, где $\sigma_r - \sigma_z = -2k$, и область $n_2(t) \leq r \leq R_2(t)$, где нет необратимых деформаций. В последней области уравнение равновесия примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) = 0. \quad (21)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (21), получаем остаточные напряжения и перемещения в области деформирования $R_1(t) \leq r \leq n_2 - \text{const}$:

$$\begin{aligned} u &= 0,5rC_1^{(j)} + r^{-1}C_2^{(j)}, \quad \sigma_r = gC_1^{(j)} + (-2\mu)r^{-2}C_2^{(j)} - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= C_1^{(j)}g + 2r^{-2}\mu C_2^{(j)} - K\theta, \quad \sigma_z = \lambda C_1^{(j)} - K\theta, \\ l_1 &= 0, \quad l_2 = n_2. \end{aligned}$$

В области, в которой для материала выполняется условие Треска $\sigma_r - \sigma_z = -2k$, при отсутствии температурного градиента и росте пластических деформаций дифференциальное уравнение равновесия запишется в виде:

$$g \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{g}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - w \frac{u}{r^2} = -b \left(\frac{k}{r} \right) + \mu r^{-1} (p_r - 0,5p_\varphi) + gp_{r,r} + \lambda p_{\varphi,r}. \quad (22)$$

После интегрирования (22) приходим к выражениям для нахождения напряжений, перемещений и деформаций в нейтрально нагруженной области, в которой работает критерий Треска $\sigma_r - \sigma_z = -2k$:

$$\begin{aligned} u_r &= (2gh)^{-1} \left[-(2\mu + \lambda(1-h))\Psi_\varphi(1, n_2, r) - 2hr(1-h^2)^{-1}k_0 \right] + r^{-h}C_1^{(8)} + r^hC_2^{(8)} + \\ &+ (2gh)^{-1} \left[(\mu - g(h-1))\Psi_r(1, n_2, r) - (\mu - g(h+1))\Psi_r(-1, n_2, r) - (2\mu - \lambda(h+1))\Psi_\varphi(-1, n_2, r) \right], \\ \sigma_z &= -h^{-1} (2\mu p_\varphi(r) + g(h-1)\Psi_r(r)) - (\lambda - g(h^2 - 2)) (g(h^2 - 1))^{-1} k_0 + \\ &+ (2ghr)^{-1} q_1 (s_2 (\Psi_\varphi(1, n_2, r) - \Psi_r(1, n_2, r))) + (\lambda - hg)r^{-1-h}C_1^{(8)} + (\lambda + hg)r^{h-1}C_2^{(8)} + \\ &+ (2ghr)^{-1} \left[q_2 (\Psi_\varphi(-1, n_2, r) (\lambda(h+1) - 2\mu)) - q_3 \Psi_r(-1, n_2, r) \right] - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= (2ghr)^{-1} \left[-s_1 s_3 \Psi_r(1, n_2, r) - \Psi_\varphi(1, n_2, r) (4\mu g + \lambda^2 (1-h^2)) \right] + \lambda (h^{-1} - 1) p_r(r) + \\ &+ (2ghr)^{-1} \left[-s_2 (\Psi_\varphi(-1, n_2, r) (\lambda(1+h) - 2\mu) + q_1 \Psi_r(-1, n_2, r)) \right] - \\ &- g^{-1} (\mu(3kh + 2\lambda)h^{-1} p_\varphi(r)) - 2k_0 (h^2 - 1)^{-1} - K\theta^{(2)} + s_1 r^{h-1} C_2^{(8)} - s_2 C_1^{(8)} r^{-(1+h)}, \\ e_r^p &= 0,5(h^{-1} - 1) p_r(r) - p_\varphi(r) (\mu(gh)^{-1} - \lambda(2g)^{-1}) + k_0 (\mu - g(h^2 - 1)) (2\mu g (1-h^2))^{-1} + \\ &+ (4gr)^{-1} \left[(2\mu - \lambda(h+1))\Psi_\varphi(-1, n_2, r) - s_3 \Psi_r(1, n_2, r) + s_2 \Psi_\varphi(1, n_2, r) - q_1 \Psi_r(-1, n_2, r) \right] + \\ &+ 0,5hr^{h-1}C_2^{(8)} - 0,5C_1^{(8)}r^{-(1+h)}. \end{aligned}$$

Теперь для определения остаточных напряжений остается по неоднократно описанному ранее алгоритму найти на последнем расчетном шаге по времени постоянные интегрирования $C_1^{(8)}$ и $C_2^{(8)}$ вместе со значениями n_2 и C_1^1 , C_2^1 , C_1^2 и C_2^2 в момент остановки этой упругопластической границы. Для этого нужно выполнить граничные условия и условия непрерывности u , σ_r при $r = n_2$.

Важно, что описанный выше алгоритм вычислений имеет общий характер. Общность проявляется в том, что в целом ряде конкретных расчетных примеров некоторые из описанных областей пластического течения могут отсутствовать, но появление иных (не описанных здесь) в нем невозможно.

В качестве иллюстрации приведем именно такой случай, когда алгоритм используется в его общем (представленном выше) виде. С этой целью выберем бронзовый вал радиусом 0,06 м (бронза БрАЖ9-4) и латунную муфту, у которой внешний радиус равен 0,1 м (латунь ЛМш68-0.05). Последнюю нагреем до 300°C. В условиях горячей посадки материал муфты проходит все области пластического течения, включая как полное пластическое течение, так и повторное. Значения упругих постоянных, предела текучести при комнатной температуре, коэффициентов линейного расширения и температуропроводности позаимствованы для расчетов в [35, 36]. Окончательное распределение безразмерных (отнесенных к пределу текучести k_0 при комнатной температуре) напряжений σ_r , σ_φ и σ_z (остаточных напряжений) в сборке показаны на рисунке 2а.

Таблица. Свойства рассмотренных конструкционных материалов

Характеристики	Сталь 45	Сталь 12X17	Дюралюминий Д16т	Бронза БрАЖ9-4	Латунь ЛМш68-0.05
Коэффициент температуропроводности $a \cdot 10^{-6}$	0,944	2,25	2,532	0,972	0,397
Коэффициент линейного расширения $\alpha \cdot 10^{-6}$	11,1	10,4	22,9	16,2	19,1
Предел текучести материала при комнатной температуре k_0 , МПа	360,0	275,0	255	350	290
Температура плавления T_p , °C	1400	1400	660	1040	937
Модуль Юнга E , ГПа	210	200	72	116	101
Коэффициент Пуассона ν	0,27	0,27	0,3	0,3	0,3

Натяг (σ_r при R_1), МПа в сборке вал ($R_1 = 0,06$ м) – муфта ($R_2 = 0,1$ м). Температура муфты до посадки 300°C

Бронза–латунь	Бронза – бронза	Сталь45–Сталь45	Бронза – Сталь45	Сталь45 – бронза	Сталь45 – Сталь12X17
228,29	256,41	263,74	254,70	256,76	212,32

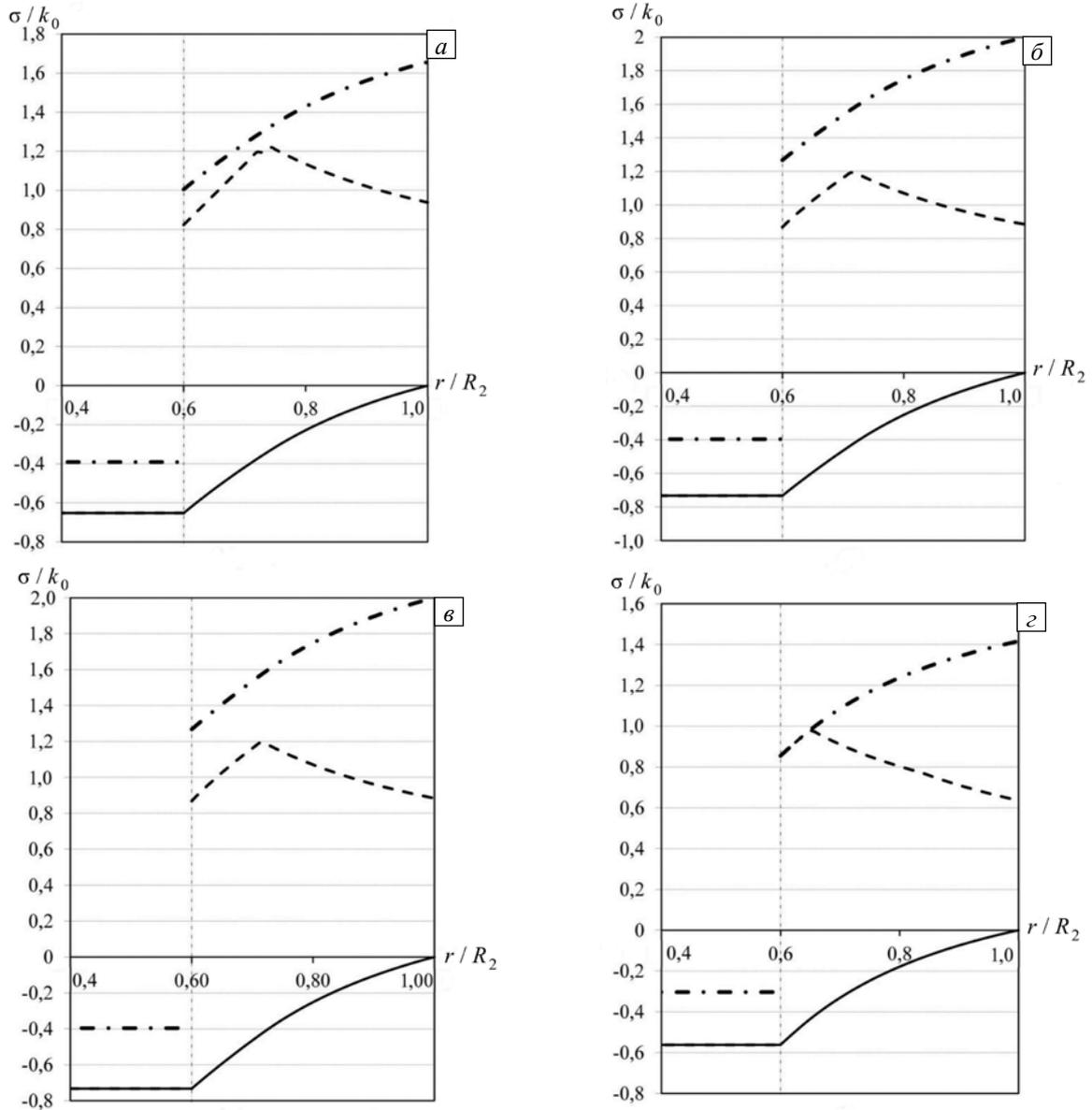


Рис. 2. Распределение остаточных напряжений в сборке из различных материалов: бронза (вал) – латунь (муфта) (а), бронза – бронза (б), сталь Ст45 – сталь Ст45 (в), сталь Ст45 – дюралюминий (г); σ_r/k_0 – сплошная линия, σ_θ/k_0 – штриховая линия и σ_z/k_0 – штрихпунктирная линия

Если и вал и муфта сделаны из одного материала (например из бронзы), то при нагреве муфты до температуры 300°C состояние полной пластичности (на ребре призмы Треска) отсутствует (Рис. 2б), в то время как повторное пластическое течение имеет место. То же самое происходит, если на стальной вал (Ст45) насаживается стальная муфта (Ст45), нагретая до той же температуры 300°C (Рис. 2в). В последнем случае итоговый натяг оказывается наибольшим из всех рассмотренных видов сборок элементов из наиболее распространенных конструкционных материалов. Но натяг существенно уменьшается (212 МПа против 263 МПа), если муфта изготавливается из стали (Ст 12Х17), что связано со значительным понижением предела текучести (275 МПа против 360 МПа). Отметим еще один существенный качественный момент: при посадке дюралюминивой муфты (Д16Т) на стальной вал (Ст45) при остывании сборки до комнатной температуры часть материала муфты остается в напряженном состоянии, соответствующем состоянию полной пластичности (ребру призмы Треска) (Рис. 2г), несмотря на то, что деформирование материала прекратилось.

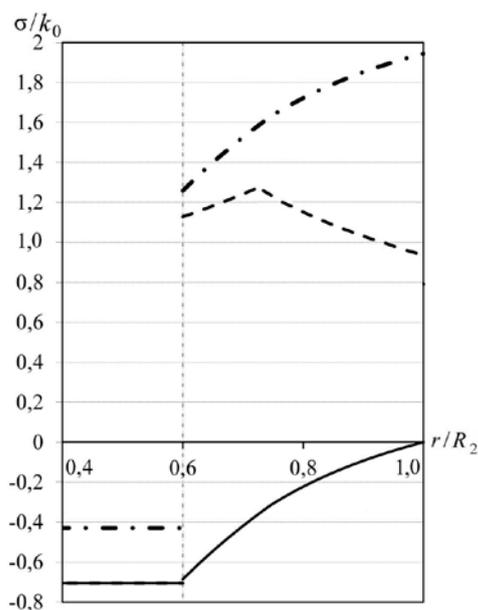


Рис. 3. Распределение остаточных напряжений в сборке сталь (вал) – бронза (муфта), полученное с использованием условия Ишлинского–Ивлева

в присутствии развитых пластических течений в материале муфты дает рисунок 4, где при одной и той же геометрии и начальном нагреве одних и тех же материалов элементов сборки представлено распределение итоговых остаточных напряжений. При этом на части рисунка 4а приведены результаты расчетов с использованием в качестве поверхности нагружения призмы Ивлева, а на рисунке 4б — призмы Треска. Сборка выполнена из стали (вал, Ст 45) и бронзы (муфта, БрАЖ9-4).

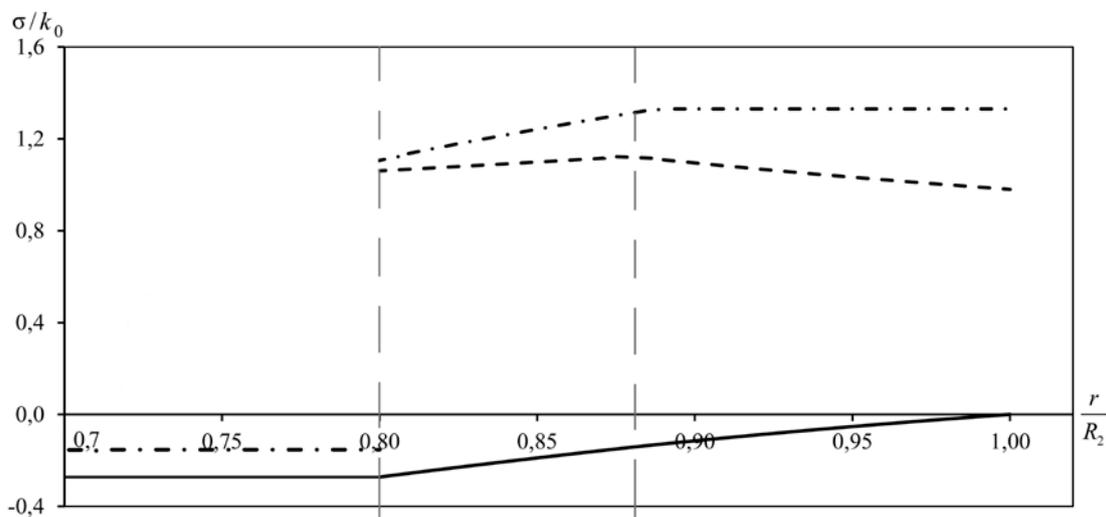


Рис. 4. Распределение остаточных напряжений в сборке сталь – бронза: условие Ишлинского–Ивлева (а), условие Треска–Сен-Венана (б); σ_r/k_0 – сплошная линия, σ_ϕ/k_0 – штриховая линия и σ_z/k_0 – штрихпунктирная линия

Что же произойдет, если вместо условия текучести максимального касательного напряжения, когда поверхность нагружения является призмой Треска, выбрать условие максимального приведенного касательного напряжения с поверхностью нагружения в форме призмы Ивлева? Расчеты показали, что при соответствии напряженного состояния одной грани призмы Ивлева $2\sigma_r - \sigma_\phi = -4k$ пластическое течение в рассматриваемой задаче всегда имеет место. На рисунке 3 представлено распределение остаточных напряжений в сборке из стального (Ст45) вала и бронзовой муфты. Однако последний случай не является общим. В данной задаче течение не претерпевает изменения, связанного со сменой граней призмы Ивлева. Переход в процессе деформирования напряженных состояний с одной грани призмы Ивлева на другую может осуществляться в иных задачах теории температурных напряжений, с другой исходной геометрией сопрягаемых деталей.

Сведения для сравнения качественных и количественных особенностей деформирования

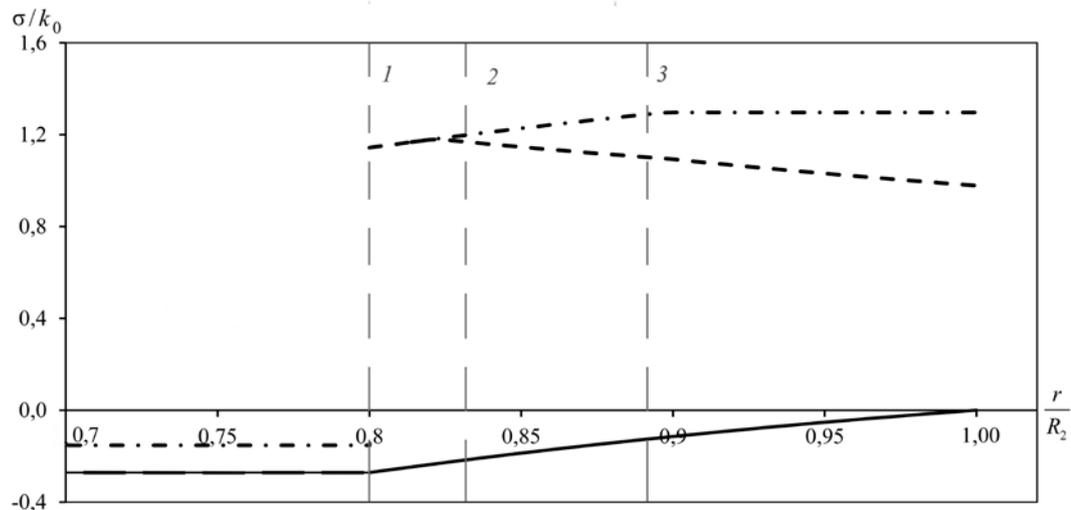


Рис. 4. Продолжение

Отметим, что рисунок 4б свидетельствует о существовании двух разных зон пластического течения (их границы отмечены вертикальными штиховыми линиями): (1–2) — зоны течения на ребре призмы Треска и (2–3) — зоны течения на ее грани $\sigma_r - \sigma_z = -2k$. При решении той же задачи на основе условия пластичности максимального приведенного касательного напряжения — призмы Ивлева, имеет место единственная область течения, соответствующая ее грани $2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z = -2k$. Важно заметить, что, несмотря на различия в распределении остаточных напряжений, итоговый натяг в обоих случаях одинаков (с точностью до погрешности вычислений).

Данное обстоятельство позволяет рекомендовать расчет остаточных температурных напряжений в сборке способом горячей посадки на основе критерия Ишлинского–Ивлева как нормативный, поскольку в этом случае объем вычислений существенно сокращается.

В заключение скажем, что только кусочно-линейный вид условий текучести предоставил возможность создания численно-аналитического алгоритма, основанного на записи в каждой из пластических областей деформирования своего уравнения равновесия в перемещениях и интегрировании этих уравнений даже в присутствии ранее приобретенных необратимых деформаций.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00507-а).

Литература

1. Берникер Е.И. Посадка с натягом в машиностроении. – Ленинград: Машиностроение, 1966. – 168 с.
2. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматлит, 1963. – 252 с.
3. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 512 с.
4. Гохфельд Д.А. Несущая способность конструкций в условиях теплосмен. – М.: Машиностроение, 1970. – 260 с.
5. Допуски и посадки: Справочник. В 2-х частях / В.Д. Мягков, М.А. Палей, А.Б. Романов, В.А. Брагинский. – Л.: Машиностроение, 1982. – Ч. 1. – 543 с.
6. Bland D.R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients // J. Mech. Phys. Solids. – 1956. – Vol. 4, no. 4. – P. 209-229. DOI
7. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.
8. Perzyna P., Sawczuk A. Problems of thermoplasticity // Nucl. Eng. Des. – 1973. – Vol. 24, no. 1. – P. 1-55. DOI
9. Ohno N., Wang J.D. Transformation of a nonlinear kinematic hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions // Int. J. Plasticity. – 1991. – Vol. 7, no. 8. – P. 879-891. DOI
10. Orçan Y., Gamer U. Elastic-plastic deformation of a centrally heated cylinder // Acta Mechanica. – 1991. – Vol. 90, no. 1. – P. 61-80. DOI
11. Chaboche J.L. Thermodynamically based viscoplastic constitutive equation: theory versus experiment // ASME Winter Annual Meeting. – USA, GA: Atlanta, 1991. – P. 1-20.
12. Lippmann H. The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit // Int. J. Plasticity. – 1992. – Vol. 8, no. 5. – P. 567-582. DOI
13. Gamer U. A concise treatment of the shrink fit with elastic-plastic hub // Int. J. Solids Struct. – 1992. – Vol. 29, no. 20. – P. 2463-2469. DOI
14. Mack W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft // Arch. Appl. Mech. – 1993. – Vol. 63, no. 1. – P. 42-50. DOI
15. Князева А.Г. Теплофизические основы современных высокотемпературных технологий. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – 357 с.
16. Бондарь В.С., Данишин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термопластичности // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 2. – С. 21-35. DOI

17. Ковтаниук Л.В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае // Дальневосточный математический журнал. – 2004. – Т. 5, № 1. – С. 110-120.
18. Роговой А.А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. – 2005. – Т. 46, № 5. – С. 138-149. (English version DOI).
19. Буренин А.А., Ковтаниук Л.В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. – Владивосток: Дальнаука, 2013. – 312 с.
20. Александров С.Е., Чиканова Н.Н. Упругопластическое напряженно-деформированное состояние в пластине с запрессованным включением под действием температурного поля // МТТ. – 2000. – № 4. – С. 149-158
21. Alexandrov S., Alexandrova N. Thermal effects on the development of plastic zones in thin axisymmetric plates // J. Strain Anal. Eng. – 2001. – Vol. 36, no. 2. – P. 169-175. DOI
22. Шевченко Ю.Н., Стебляк П.А. Вычислительные методы в стационарных и нестационарных задачах теории термопластичности // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – № 18. – С. 211-226.
23. Шевченко Ю.Н., Стебляк П.А., Петров А.Д. Численные методы в нестационарных задачах теории термопластичности // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2014. – № 22. – С. 251-264.
24. Горшков С.А., Дац Е.П., Мурашкин Е.В. Расчет плоского поля температурных напряжений в условиях пластического течения и разгрузки // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 3(21). – С. 169-175.
25. Буренин А.А., Ковтаниук Л. В., Панченко Г.Л. Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления // ДАН. – 2015. – Т. 464, № 3. – С. 284-287. (English version DOI).
26. Александров С.Е., Ломакин Е.В., Дзэнг Й.-Р. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению // ДАН. – 2012. – Т. 443, № 3. – С. 310-312. (English version DOI).
27. Александров С.Е., Лямина Е.А., Новожилова О.В. Влияние зависимости предела текучести от температуры на напряженное состояние в тонком полом диске // Проблеми машиностроения и надежности машин. – 2013. – № 3. – С. 43-48. (English version DOI).
28. Буренин А.А., Дац Е.П., Мурашкин Е.В. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // МТТ. – 2014. – № 2. – С. 124-131. (English version DOI).
29. Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В. Остаточные напряжения: теория и приложения. – М.: Наука, 1982. – 112 с.
30. Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // Acta Mechanica. – 1994. – Vol. 103, no. 1. – P. 243-257. DOI
31. Kovács Á. Residual stresses in thermally loaded shrink fits // Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng. – 1996. – Vol. 40, no. 2. – P. 103-112.
32. Дац Е.П., Ткачева А.В., Шпорт Р.В. Сборка конструкции «кольцо в кольцо» способом горячей посадки // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4(22). – С. 225-235.
33. Буренин А.А., Дац Е.П., Ткачева А.В. К моделированию технологии горячей посадки // СибЖИМ. – 2014. – Т. 17, № 3. – С. 40-47. (English version DOI).
34. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с.
35. Ложинов Ю.Н. Медь и деформируемые медные сплавы: Учеб. пособие. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2006. – 136 с.
36. Марочник сталей и сплавов / Под общ. ред. А.С. Зубченко. – М.: Машиностроение, 2003. – 784 с.

References

1. Berniker E.I. *Interference fit in mechanical engineering*. Leningrad: Mashinostroenie, 1966. 168 p.
2. Parkus H. *Instationäre Wärmespannungen* [Instationary Thermal Stresses]. Wien: Springer-Verlag, 1959.
3. Boley B.A., Weiner J.H. *The theory of thermal stresses*. NY: Wiley, 1960.
4. Gokhfeld D.A., Cherniavsky O.F. *Limit analysis of structures at thermal cycling*. The Netherlands: Sijthoff & Noordhoff, 1980.
5. *Dopuski i посадки: Spravochnik* [Tolerances and landing: A handbook], ed. by V.D. Myagkov, M.A. Palej, A.B. Romanov, V.A. Braginskii. Leningrad: Mashinostroenie, 1982, vol. 1. 543 p.
6. Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients. *J. Mech. Phys. Solids*, 1956, vol. 4, no. 4, pp. 209-229. DOI
7. Ishlinskii A.Y., Ivlev D.D. *Mathematical theory of plasticity*. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p.
8. Perzyna P., Sawczuk A. Problems of thermoplasticity. *Nucl. Eng. Des.*, 1973, vol. 24, no. 1, pp. 1-55. DOI
9. Ohno N., Wang J.D. Transformation of a nonlinear kinematic hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions. *Int. J. Plasticity*, 1991, vol. 7, no. 8, pp. 879-891. DOI
10. Orçan Y., Gamer U. Elastic-plastic deformation of a centrally heated cylinder. *Acta Mechanica*, 1991, vol. 90, no. 1, pp. 61-80. DOI
11. Chaboche J.L. Thermodynamically based viscoplastic constitutive equation: theory versus experiment. *ASME Winter Annual Meeting*, USA, GA: Atlanta, 1991. Pp. 1-20.
12. Lippmann H. The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit. *Int. J. Plasticity*, 1992, vol. 8, no. 5, pp. 567-582. DOI
13. Gamer U. A concise treatment of the shrink fit with elastic-plastic hub. *Int. J. Solids Struct.*, 1992. vol. 29, no. 20, pp. 2463-2469. DOI
14. Mack W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft. *Arch. Appl. Mech.*, 1993, vol. 63, no. 1, pp. 42-50. DOI
15. Knyazeva A.G. *Teplofizicheskie osnovy sovremennykh vysokotemperaturnykh tekhnologij* [Thermophysical fundamentals of modern high-temperature technologies]. Tomsk: Tomsk Polytechnic University, 2009. 357 p.
16. Bondar V.S., Danshin V.V., Kondratenko A.A. Version of the theory thermoplasticity. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 2, pp. 21-35. DOI

17. Kovtanuk L.V. The modelling of finite elastic-plastic deformation in non-isothermal case. *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal*, 2004, vol. 5, no. 1, pp. 110-120.
18. Rogovoi A.A. Constitutive relations for finite elastic-plastic strains. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2005, vol. 46, no. 5, pp. 730-739. DOI
19. Burenin A.A., Kovtanyuk L.V. Bol'shie neobratimye deformatsii i uprugoe posledejstvie [Large irreversible deformations and elastic aftereffects]. Vladivostok: Dalnauka, 2013. 312 p.
20. Alexandrov S.E., Chikanova N.N. Uprugoplasticheskoe napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie v plastine s zapressovannym vklyucheniem pod dejstviem temperaturnogo polya [Elastic-plastic stress-strain state in a plate with a pressed insertion under the action of a temperature field]. *Mech. Solids*, 2000, vol. 35, no. 4, pp. 125-132.
21. Alexandrov S., Alexandrova N. Thermal effects on the development of plastic zones in thin axisymmetric plates. *J. Strain Anal. Eng.*, 2001, vol. 36, no. 2, pp. 169-175. DOI
22. Shevchenko Yu.N., Steblyanko P.A. Computing methods in stationary and non-stationary problems of theory thermal-plasticity. *Problems computational mechanics and strength of structures*, 2012, no. 18, pp. 211-226.
23. Shevchenko Yu.N., Steblyanko P.A., Petrov A.D. Computing methods in non-stationary problems of theory thermal-plasticity. *Problems computational mechanics and strength of structures*, 2014, no. 22, pp. 251-264.
24. Gorshkov S.A., Dats E.P., Murashkin E.V. Calculation of plane stress field under plastic flow and unloading. *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*, 2014, no. 3(21), pp. 169-175.
25. Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L. Nonisothermal motion of an elastoviscoplastic medium through a pipe under a changing pressure. *Doklady Physics*, 2015, vol. 60, no. 9, pp. 419-422. DOI
26. Aleksandrov S.E., Lomakin E.V., Dzen Y.-R. Solution of the thermoelastoplastic problem for a thin disc of plastically compressible material subjected to thermal loading. *Doklady Physics*, 2012, vol. 57, no. 3, pp. 136-139. DOI
27. Aleksandrov S.E., Lyamina E.A., Novozhilova O.V. The influence of the relationship between yield strength and temperature on the stress state in a thin hollow disk. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2013, vol. 42, no. 3, pp. 214-218. DOI
28. Burenin A.A., Dats E.P., Murashkin E.V. Formation of the residual stress field under local thermal actions. *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, no. 2, pp. 218-224. DOI
29. Pozdeev A.A., Nyashin Yu.I., Trusov P.V. *Ostatochnye napryazheniya: teoriya i prilozheniya* [Residual stress: theory and applications]. Moscow: Nauka, 1982. 112 p.
30. Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit. *Acta Mechanica*, 1994, vol. 103, no. 1, pp. 243-257. DOI
31. Kovács Á. Residual stresses in thermally loaded shrink fits. *Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng.*, 1996, vol. 40, no. 2, pp. 103-112.
32. Dats E.P., Tkacheva A.V., Shport R.V. The assemblage of “ring in ring” constructions with shrink fit method. *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*, 2014, no. 4(22), pp. 225-235.
33. Burenin A.A., Dats E.P., Tkacheva A.V. On the modeling of the shrink fit technology. *J. Appl. Ind. Math.*, 2014, vol. 8, no. 4, pp. 493-499. DOI
34. Bykovtsev G.I., Ivlev D.D. *Teoriya plastichnosti* [Theory of plasticity]. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p.
35. Loginov Yu.N. *Med' i deformiruemye mednye splavy* [Copper and deformable copper alloys: a tutorial]. Ekaterinburg: Ural State Polytechnical University, 2006. 136 p.
36. *Database of steels and alloys*, ed. by A.S. Zubchenko. Moscow: Mashinostroenie, 2003. 784 p.

Поступила в редакцию 24.06.2016; опубликована в электронном виде 04.10.2017

Сведения об авторах

Буренин Анатолий Александрович, дфмн, проф., директор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН (ИМиМ ДВО РАН), 681005, Хабаровский край, Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, д. 1; e-mail: mail@imim.ru

Ткачева Анастасия Валерьевна, мнс, ИМиМ ДВО РАН; e-mail: mail@imim.ru

Щербатюк Галина Анатольевна, ст. преп., Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет (КнАГТУ), 681013, Хабаровский край, Комсомольск-на-Амуре, проспект Ленина, д. 27; office@knastu.ru