

DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.3.19

УДК 534.8: 534.2

ЧИСЛЕННО УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ И ЗАПРЕЩЕННЫХ ЗОН В СЛОИСТЫХ ФОНОННЫХ КРИСТАЛЛАХ

С.И. Фоменко, М.В. Голуб, А.А. Александров

Институт математики, механики и информатики, Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация

Исследуются высокочастотные упругие колебания слоистых волноводов, состоящих из повторяющихся ячеек, каждая из которых представляет собой пакет из упругих слоев. Колебания в подобных структурах (фононных кристаллах) характеризуются тем, что в определенных частотных диапазонах, называемых запрещенными зонами или полосами запирающего волновода, наблюдается эффект полного отражения плоских гармонических волн, падающих из внешнего полупространства на фононный кристалл. Для описания упругих колебаний в слоистых фононных кристаллах, расположенных между двумя полупространствами, на основе метода матриц переноса разработаны математическая модель и численно устойчивый алгоритм вычисления проходящего через ячейку структуру волнового поля. При этом амплитудные коэффициенты перед собственными формами продольных и поперечных волн в полупространствах (коэффициенты прохождения и отражения) находятся в форме разложения по собственным значениям матрицы переноса ячейки. Предложена классификация запрещенных и разрешенных зон в слоистых анизотропных фононных кристаллах, основанная на анализе волновых чисел Блоха, соответствующих собственным значениям матрицы переноса ячейки, и асимптотики полученных полуаналитических соотношений. В запрещенных зонах первого типа все волны Блоха являются затухающими, в то время как в зонах второго типа незатухающие волны Блоха не возбуждаются. Происходит это за счет особенностей их поляризации и граничных условий на интерфейсе периодической структуры и внешнего полупространства. При изменении параметров падающего поля, например, направления распространения плоской волны, зоны второго типа непрерывно трансформируются в разрешенные зоны, в которых амплитудные и энергетические коэффициенты прохождения оказываются достаточно малыми. Поэтому с инженерной точки зрения зоны с малым коэффициентом прохождения подобны классическим запрещенным зонам. Приведены результаты численного исследования коэффициентов прохождения и волновых чисел распространяющихся волн, демонстрирующие особенности формирования запрещенных и разрешенных зон в анизотропных слоистых фононных кристаллах.

Ключевые слова: запрещенные зоны, моделирование, метод матриц переноса, фононный кристалл, упругие волны, численный метод

NUMERICALLY STABLE METHOD FOR WAVE-FIELD CALCULATION AND BAND-GAP ESTIMATION IN LAYERED PHONONIC CRYSTALS

S.I. Fomenko, M.V. Golub and A.A. Alexandrov

Institute for Mathematics, Mechanics and Informatics, Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation

High-frequency wave propagation in layered waveguides composed of periodic unit-cells is studied. Each unit-cell consists of a certain number of various elastic layers. Wave motion in the considered elastic structures (phononic crystals) is characterized by frequency bands, known as forbidden zones or band-gaps, where the full reflection of time-harmonic plane waves incident from an external half-space is observed. Using the transfer matrix method, the mathematical model of elastic wave propagation in anisotropic layered phononic crystals between two half-spaces is developed. A stable numerical algorithm for calculation of wave fields in the cells of phononic crystals is proposed. The amplitude coefficients of transmitted longitudinal and shear body waves are expressed in terms of transfer-matrix eigenvalues. A classification of band-gaps and pass-bands in layered anisotropic phononic crystals is proposed. It is based on the analysis of Bloch wavenumbers (expressed via the eigenvalues of the unit-cell transfer matrix) and the derived semi-analytical asymptotic expression of the transmission coefficients. Each Bloch wave has attenuation within the band-gaps of first kind. Waves propagating without attenuation are not excited within the band-gaps of second kind due to their specific polarization and boundary conditions at the interface between the multi-layered structure and the external half-space. By changing the parameters of the incident field, for instance, angles of incidence, band-gaps are converted into low transmission pass-bands where transmission coefficients are rather small. Therefore, a low transmission pass-band is similar to the traditional band-gap from an engineering point of view. The numerical results for energy transmission coefficient and Bloch waves are given at different angles of incidence; they demonstrate the formation of band-gaps in anisotropic phononic crystals.

Key words: band-gap, simulation, transfer matrix method, phononic crystal, elastic wave, numerical method

1. Введение

Фононные кристаллы — это упругие композитные материалы с периодической организацией. Ячейка фононного кристалла состоит из нескольких компонент (слоев, включений), физико-механические свойства которых значительно отличаются друг от друга. В диапазонах частот гармонических колебаний фононных кристаллов наблюдаются зоны, в которых амплитуды волн, проходящих через периодическую структуру, экспоненциально убывают от ячейки к ячейке, — запрещенные зоны. В таких зонах падающая волна практически полностью отражается от фононного кристалла. Это может быть использовано для виброизоляции структур, упругой или акустической фокусировки, а также при разработке новых типов сенсоров упругих колебаний и механических резонаторов [1–3].

Теоретические и численные исследования волновых полей в упругих периодических структурах, как правило, осуществляются на основе теории Флоке–Ляпунова [4, 5], предполагающей определение волновых чисел и собственных форм колебаний ячейки кристалла. Количество направлений, в которых наблюдается периодическое изменение свойств, накладывает соответствующие ограничения на численные подходы к решению волновых задач. Для моделирования волновых полей в двумерных или трехмерных фоновых кристаллах, как правило, применяются такие прямые численные методы, как метод конечных элементов [6] и метод граничных элементов [7] с периодическими граничными условиями на границах ячеек. Одномерный фоновый кристалл по сути — это слоистая упругая структура, поэтому для его математического моделирования естественным является использование полуаналитических методов, например, метода матриц переноса [8–10]. По собственным значениям матрицы переноса единичной ячейки можно судить о распространении в периодической среде волн Блоха.

Исследования на основе теории Флоке–Ляпунова дают представление о волновых полях в фоновых кристаллах со счетным количеством ячеек. Между тем на практике встречаются только структуры с конечным количеством ячеек. В [12–14] было показано, что такие структуры обладают особенностями, в частности, в них существуют особые типы запрещенных зон, а также разрешенные зоны, в которых проходящая через слоистую структуру волна имеет настолько малую амплитуду, что с инженерной точки зрения такие зоны можно рассматривать как запрещенные. Кроме того, в [15–17] для упругих сред продемонстрировано формирование полос запирания–пропускания при увеличении количества препятствий и проанализирована связь между наблюдаемыми эффектами и распределением точек дискретного спектра в рассматриваемых задачах.

Целью данной работы является, во-первых, распространение на периодические структуры, состоящие из анизотропных упругих слоев, подхода, основанного на методе матриц переноса (Т-матриц) и хорошо зарекомендовавшего себя при применении к слоистым изотропным и функционально-градиентным фоновым кристаллам, а во-вторых, проведение на его основе численного параметрического исследования в этих структурах запрещенных зон.

2. Слоистый анизотропный фоновый кристалл

Рассматривается слоистый одномерный фоновый кристалл, состоящий из N одинаковых ячеек, располагающихся между двумя полупространствами A и B (Рис. 1). В общем случае каждая из ячеек состоит из M слоев и имеет толщину H . Упругие слои предполагаются анизотропными и неограниченными по осям Ox , Oy . Предметом исследования являются волновые поля, возбуждаемые плоской волной, падающей из полупространства A на слоистую структуру под углом θ , τ по отношению к осям Ox , Oy соответственно.

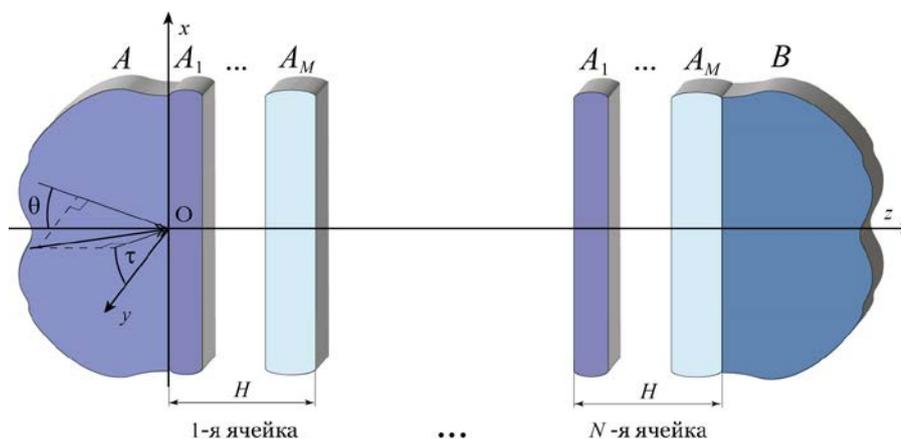


Рис. 1. Постановка задачи. Слоистый фоновый кристалл

В связи с тем, что перемещения $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ точек среды малы по сравнению с размерами изучаемого объекта, линейная теория упругости позволяет описывать волновые колебания фоновых кристаллов. Справедливы следующие уравнения движения и обобщенный закон Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho \ddot{u}_i, \\ \sigma_{ij} &= C_{ijmn} \varepsilon_{mn}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\sigma_{i,j}$ — тензор напряжений, ρ — плотность материала слоев, C_{ijmn} — тензор упругих констант, $\varepsilon_{mn} = (u_{m,n} + u_{n,m})/2$ — тензор деформаций.

На общих границах слоев задается условие непрерывности вектора перемещений, а также нормальных и касательных к границам компонент напряжений. Поэтому при введении вектора состояния $\mathbf{v}(x, y, z) = \{u_x, u_y, u_z, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}\}$ условия на внутренних границах $z = z_i$ преобразуются в условия непрерывности этого вектора:

$$\mathbf{v}(x, y, z_i - 0) = \mathbf{v}(x, y, z_i + 0). \quad (2)$$

Во внешних полупространствах выполняются условия излучения Зоммерфельда.

Волновой вектор $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$, согласно принятым предположениям о падающей плоской волне, можно представить в виде:

$$\mathbf{k} = \{k_0 \sin(\theta), \quad -k_0 \sin(\tau) \cos(\theta), \quad k_0 \cos(\theta)\},$$

в котором k_0 — волновое число P или S волны, падающей из изотропного полупространства A . В силу линейности постановки задачи вектор состояния принимает вид:

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \text{Re } \mathbf{V}(z) \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t),$$

где $\mathbf{V} = \{U_1, U_2, U_3, \Sigma_{13}, \Sigma_{23}, \Sigma_{33}\}$ — вектор комплексных амплитуд смещений и напряжений, ω — круговая частота гармонических колебаний.

3. Матрица переноса для анизотропного слоя

Уравнения движения (1), записанные в комплексных амплитудах перемещений $\mathbf{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$, выглядят следующим образом:

$$\mathbf{B}_2 \frac{d^2}{dz^2} \mathbf{U} = \mathbf{B}_1 \frac{d}{dz} \mathbf{U} + \mathbf{B}_0 \mathbf{U}, \quad (3)$$

при этом матрицы \mathbf{B}_i имеют явный вид, а их элементы выражаются через свойства материала C_{ijmn} , ρ , ω и компоненты волнового вектора \mathbf{k} . Система уравнений (3) сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка относительно вектора $\mathbf{Y} = \left\{ U_1, U_2, U_3, \frac{d}{dz} U_1, \frac{d}{dz} U_2, \frac{d}{dz} U_3 \right\}$:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dz} = \mathbf{P} \mathbf{Y}. \quad (4)$$

Матрица системы \mathbf{P} находится по формуле

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{B}_1 \end{pmatrix},$$

где в произведении участвуют матрицы с блочной структурой, в которой \mathbf{I}_3 и $\mathbf{0}_3$ обозначают единичные и нулевые блоки размерностью 3×3 соответственно.

Решив систему дифференциальных уравнений (4), можно представить искомое решение в виде:

$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{M} \mathbf{E}(z) \mathbf{c}. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{E}(z) = \exp(\Lambda z)$, $\mathbf{M} = \mathbf{K} \mathbf{L}$, где Λ и \mathbf{L} — диагональная матрица собственных значений и матрица собственных векторов оператора \mathbf{P} соответственно, а \mathbf{K} — матрица линейного преобразования $\mathbf{V} = \mathbf{K} \mathbf{Y}$.

Используя значение \mathbf{V} на границе слоя $z = z_0$ и тем самым исключая из (5) неизвестный вектор \mathbf{c} , можно получить соотношение

$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{T}(z - z_0) \mathbf{V}(z_0),$$

связывающее значения волновых полей в произвольной точке слоя со значениями на его границе. Матрица

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{M}\mathbf{E}(z)\mathbf{M}^{-1}$$

является матрицей переноса или Т-матрицей анизотропного слоя.

4. Волновое поле в периодической структуре

Условия непрерывности (2) на внутренних границах позволяют представить Т-матрицу пакета слоев как произведение матриц переноса всех слоев структуры. Так, матрица переноса \mathbf{T}_{cell} одной ячейки фоновонного кристалла, включающая M различных слоев, вычисляется по формуле:

$$\mathbf{T}_{cell}(z) = \prod_{i=M}^1 \mathbf{T}_i(h_i),$$

где \mathbf{T}_i — матрица переноса и h_i — толщина, характеризующие слой с номером i . Тогда Т-матрица всего фоновонного кристалла, образуемого N ячейками, определится путем возведения в степень Т-матрицы одной ячейки \mathbf{T}_{cell} :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{cell}^N = \mathbf{G}^{-1}(\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}))^N \mathbf{G}. \quad (6)$$

Здесь $\text{diag}(\boldsymbol{\lambda})$ — диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6\}$ матрицы \mathbf{T}_{cell} , а \mathbf{G} — матрица перехода к базису из собственных векторов \mathbf{g}_i :

$$|\mathbf{T}_{cell} - \lambda_i \mathbf{E}| = 0, \quad (\mathbf{T}_{cell} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{g}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (7)$$

Векторы состояния во внешних полупространствах ($s = A, B$)

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{M}_s \mathbf{E}_s(z - z_s) \mathbf{c}_s$$

находятся в форме (5), где $z_A = 0$, $z_B = HN$; векторы амплитудных коэффициентов $\mathbf{c}_B = \{\mathbf{t}, 0, 0, 0\}$ и $\mathbf{c}_A = \{\mathbf{d}^o, \mathbf{r}\}$ составлены из компонент векторов $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3\}$ и $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3\}$, задающих неизвестные амплитудные коэффициенты прохождения и отражения, а также известного вектора $\mathbf{d}^o = \{d_1, d_2, d_3\}$, описывающего падающую волну в нижнем полупространстве ($z < 0$). С учетом определения матрицы переноса фоновонного кристалла (6) имеет место уравнение $\mathbf{V}_B(HN) = \mathbf{T}\mathbf{V}_A(0)$, из которого затем отдельно находятся векторы коэффициентов прохождения

$$\mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{d}^o, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{I}_3 \mathbf{0}_3) \mathbf{D} (\mathbf{I}_3 \mathbf{0}_3)^T \quad (8)$$

и отражения

$$\mathbf{r} = \mathbf{B}\mathbf{t}, \quad \mathbf{B} = (\mathbf{0}_3 \mathbf{I}_3) \mathbf{D} (\mathbf{I}_3 \mathbf{0}_3)^T.$$

Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} являются по построению левыми верхним и нижним блоками матрицы $\mathbf{D} = \mathbf{M}_A^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{M}_B$ и имеют размер 3×3 . Здесь и далее символ \mathbf{T} обозначает операцию транспонирования.

В связи с тем, что в общем случае допускается наличие большого количества ячеек N , а также вследствие экспоненциальной зависимости от толщины слоя некоторых элементов матрицы \mathbf{T} обращение матрицы \mathbf{A} в (8) может быть численно неустойчивым, если одно из собственных значений λ_i превысит по модулю единицу. Однако, решая (8) методом Крамера, экспоненциальные составляющие можно выделить в явном виде.

Действительно, если предположить, что собственные значения λ_i отсортированы по убыванию их абсолютных значений:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq 1 \quad \text{и} \quad \lambda_4 = 1/\lambda_3, \quad \lambda_5 = 1/\lambda_2, \quad \lambda_6 = 1/\lambda_1,$$

то с использованием (6) матрица системы (8) может быть записана как функция вектора $\boldsymbol{\lambda}$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{G}_1 (\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}))^{-N} \mathbf{G}_2,$$

где $\mathbf{G}_1 = (\mathbf{I}_3 \mathbf{0}_3) \mathbf{M}_A^{-1} \mathbf{G}^{-1}$, $\mathbf{G}_2 = \mathbf{G} \mathbf{M}_B (\mathbf{I}_3 \mathbf{0}_3)^T$ — прямоугольные матрицы 3×6 и 6×3 соответственно. Тогда определитель матрицы системы представляется как линейная комбинация всевозможных произведений трех различных значений λ_i^N :

$$|\mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda})| = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^5 \sum_{k=j+1}^6 \alpha_{ijk} (\lambda_i \lambda_j \lambda_k)^N, \quad (9)$$

где α_{ijk} находятся согласно методу неопределенных коэффициентов:

$$\alpha_{ijk} = |A(\boldsymbol{\eta}_{ijk})|.$$

Здесь векторы $\boldsymbol{\eta}_{ijk}$ таковы, что только три компоненты с индексами i , j и k равняются единице, а остальные нулевые:

$$\boldsymbol{\eta}_{ijk} = \{\eta_{6,ijk}, \eta_{5,ijk}, \dots, \eta_{1,ijk}\}, \quad \eta_{m,ijk} = \max(\delta_{mi}, \delta_{mj}, \delta_{mk}) \quad (m = 1, 2, \dots, 6).$$

В последней формуле δ_{mi} — символ Кронекера.

Пусть далее \mathbf{A}'_s — матрица, которая получается из \mathbf{A} заменой ее столбца с номером s на вектор-столбец \mathbf{d}^o . Для $|\mathbf{A}'_s|$ справедливо разложение, аналогичное (9), но составленное из произведений только двух собственных значений:

$$|\mathbf{A}'_s(\boldsymbol{\lambda})| = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^6 \beta_{sij} (\lambda_i \lambda_j)^N \quad (s = 1, 2, \dots, 6),$$

$$\beta_{sij} = |A'_s(\boldsymbol{\eta}_{ij})|, \quad \boldsymbol{\eta}_{ij} = \{\eta_{6,ij}, \eta_{5,ij}, \dots, \eta_{1,ij}\}, \quad \eta_{m,ij} = \max(\delta_{mi}, \delta_{mj}) \quad (m = 1, 2 \dots 6).$$

В определителе (9) из всех слагаемых наибольшим является $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^N$, которое по этой причине используется для нормирования. Тогда для коэффициентов прохождения справедливы представления:

$$t_s = \frac{\Delta_s}{\Delta}, \quad \Delta_s = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^6 \beta_{sij} \left(\frac{\lambda_i \lambda_j}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \right)^N \quad (s = 1, 2, 3);$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^5 \sum_{k=j+1}^6 \alpha_{ijk} \left(\frac{\lambda_i \lambda_j \lambda_k}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \right)^N. \quad (10)$$

Эти выражения не содержат слагаемых, растущих экспоненциально при увеличении числа ячеек N . При этом для знаменателя выполняется оценка $\Delta = O(1)$, а числитель при $N \rightarrow \infty$ содержит только экспоненциально убывающие или осциллирующие слагаемые.

5. Анализ разрешенных и запрещенных зон

В фоновом кристалле с бесконечным количеством ячеек ($N \rightarrow \infty$), согласно теории Флоке–Ляпунова, распространяются волны, для которых справедливы соотношения [1]:

$$\mathbf{V}_n = \mathbf{V}_{n-1} \exp(i\zeta H).$$

Здесь \mathbf{V}_n , \mathbf{V}_{n-1} — значения волнового поля на левых границах соседних ячеек, а ζ — волновое число Блоха, которое находится из решения дисперсионного уравнения

$$|\mathbf{T}_{cell} - \exp(i\zeta H) \mathbf{E}| = 0. \quad (11)$$

Сравнение (7) и (11) дает выражение:

$$\zeta_j = \frac{i}{H} \ln \lambda_j \quad (j=1, 2, \dots, 6). \quad (12)$$

Знак в формуле (12) изменен для удобства дальнейшего изложения, что не нарушает общности, так как в наборе из 6-ти собственных значений каждому λ_j найдется обратное значение λ_j^{-1} .

Наиболее интересным феноменом, наблюдаемым в фоновых кристаллах, является формирование запрещенных зон, в которых проходящие через периодическую структуру волны экспоненциально затухают. Коэффициент затухания волны Блоха определяется мнимой частью волнового числа: $\gamma_j = \text{Im} \zeta_j = \ln |\lambda_j| / H$. Очевидно, что в структуре с бесконечным числом ячеек могут распространяться только волны, для которых справедливо неравенство $\gamma_j \geq 0$. Если все волны Блоха затухающие, то зона является запрещенной. При этом коэффициент локализации, обуславливающий затухание всего волнового поля, равняется $\gamma = \min_j \gamma_j$ ($j=1, 2, 3$).

В фоновом кристалле с ограниченным числом ячеек, расположенном между двумя полупространствами, анализ запрещенных зон отличается от ранее рассмотренного случая. Используя соотношения для амплитудных коэффициентов прохождения (10), можно получить асимптотику при $N \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{t} \sim \sum_{j=1}^3 \tilde{\mathbf{t}}_j \lambda_j^{-N}. \quad (13)$$

Если в (13) все $|\lambda_j| > 1$ ($j=1, 2, 3$), то, аналогично случаю бесконечного кристалла, имеет место классическая запрещенная зона (зона первого типа или BG-I). Причем компоненты векторов $\tilde{\mathbf{t}}_j = \{t_{1j}, t_{2j}, t_{3j}\}$ находятся следующим образом:

$$t_{s1} = \beta_{s23} / \alpha_{123}, \quad t_{s2} = \beta_{s13} / \alpha_{123}, \quad t_{s3} = \beta_{s12} / \alpha_{123} \quad (s=1, 2, 3).$$

Тогда коэффициент локализации γ определяется исходя из главного члена асимптотики (13):

$$\gamma = \min_{k \in Y'} \gamma_k, \quad (14)$$

где Y' — это подмножество таких индексов k , для которых $|\tilde{\mathbf{t}}_k| > 0$.

Соотношение (13) позволяет говорить о существовании частотных диапазонов, отличных от классических запрещенных зон, когда наблюдается экспоненциальное убывание коэффициентов прохождения \mathbf{t} . В этих случаях одновременно выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \exists Y' \subset Y: \quad & Y' \neq \emptyset, \quad Y' \neq Y; \\ \forall k \in Y' \quad & \gamma_k > 0, \quad |\tilde{\mathbf{t}}_k| > 0; \\ \forall j \in Y \setminus Y' \quad & |\tilde{\mathbf{t}}_j| = 0, \quad \exists i \in Y \setminus Y': \quad \gamma_i = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $Y = \{1, 2, 3\}$ — множество индексов, а Y' — его подмножество. Условия (15) требуют, чтобы коэффициенты при всех неубывающих степенях собственных значений были равны нулю. Частотные диапазоны, в которых выполняются эти условия, относятся к запрещенным зонам второго типа (BG-II). Коэффициент локализации γ в запрещенной зоне второго типа находится по формуле (14) как наименьший среди всех коэффициентов γ_j затухающих волн Блоха.

Запрещенные зоны BG-II достаточно часто встречаются в частотных диапазонах колебаний фоновых кристаллов. Непосредственные численные эксперименты, как для слоистых изотропных [12, 13] и пьезоэлектрических [14], так и для рассматриваемых в настоящей работе анизотропных фоновых кристаллов, показывают, что о запрещенных зонах второго типа имеет смысл говорить, если структура образуется конечным количеством ячеек. Зоны BG-II наблюдаются, как правило, при нулевых углах падения плоской волны (θ, τ) и зависят от типа поляризации падающей волны. При изменении угла падения условия $|\tilde{\mathbf{t}}_j| = 0$ в (15) нарушаются, а зоны BG-II непрерывно перерождаются в разрешенные зоны с малым коэффициентом прохождения (ЛТРВ), в которых амплитуды проходящих волн не убывают экспоненциально с ростом N , но достаточно малы по сравнению с амплитудой падающей волны, при этом $\gamma = 0$. Необходимые условия формирования зон ЛТРВ формулируются в аналогичном (15) виде:

$$\begin{aligned} \exists Y' \subset Y: \quad Y' \neq \emptyset, \quad Y' \neq Y; \\ \forall k \in Y' \quad \gamma_k > 0; \\ \forall j \in Y \setminus Y' \quad 0 \leq |\tilde{\tau}_j| < \varepsilon < 1, \quad \exists i \in Y \setminus Y': \quad \gamma_i = 0, \quad |\tilde{\tau}_i| > 0. \end{aligned}$$

Здесь ε — наперед заданная малая положительная величина.

Возникновение зон ВГ-II и ЛТРВ зависит от свойств внешней среды и типа поляризации падающей волны, в то время как запрещенные зоны первого типа определяются только внутренними параметрами периодической структуры (фононного кристалла).

Сложность картины распределения запрещенных зон демонстрируется на рисунке 2. Здесь и далее рассматривается фононный кристалл, ячейка которого содержит два слоя: алюминиевый ($\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$, $C_{11} = C_{22} = C_{33} = 103,7 \text{ ГПа}$, $C_{12} = C_{13} = C_{23} = 51,1 \text{ ГПа}$, $C_{44} = C_{55} = C_{66} = 26,3 \text{ ГПа}$) и композитный, содержащий эпоксидную смолу (35%) и графит (65%) [16] ($\rho = 1600 \text{ кг/м}^3$, $C_{11} = 155,43 \text{ ГПа}$, $C_{12} = C_{13} = 3,72 \text{ ГПа}$, $C_{22} = C_{33} = 16,34 \text{ ГПа}$, $C_{23} = 4,96 \text{ ГПа}$, $C_{44} = 3,37 \text{ ГПа}$, $C_{55} = C_{66} = 7,48 \text{ ГПа}$). Предполагается, что толщины обоих слоев в ячейке равны ($h_1 = h_2$), количество ячеек $N = 16$, а внешние полупространства заполнены алюминием.

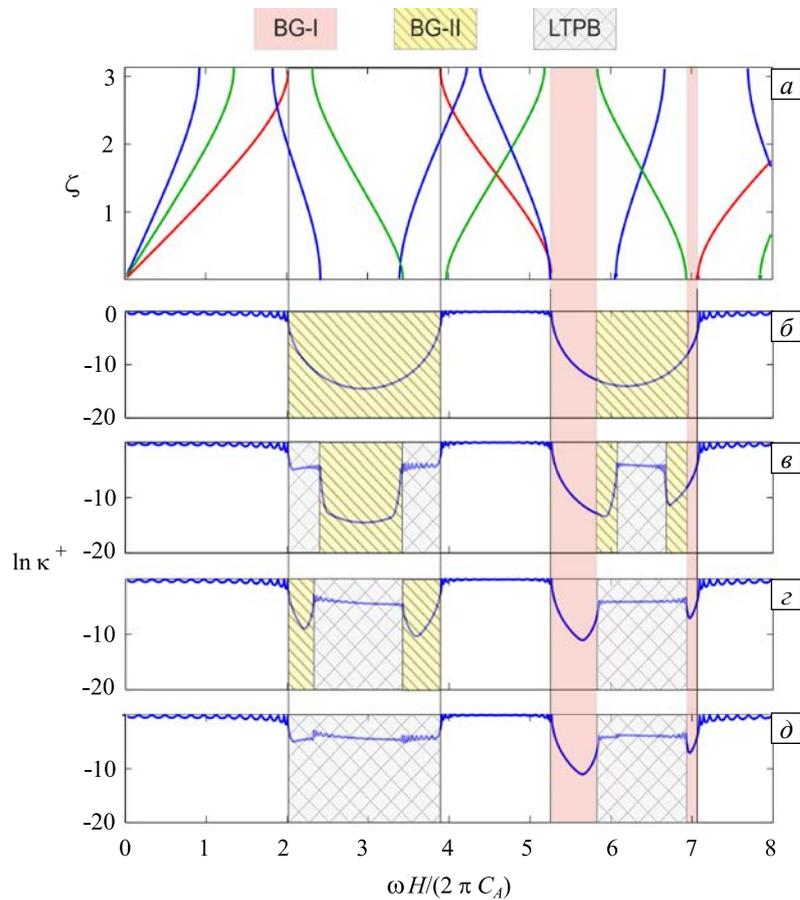


Рис. 2. Запрещенные зоны первого типа (BG-I) и трансформация запрещенных зон второго типа (BG-II) в зоны низкого прохождения (ЛТРВ) в зависимости от величины углов падения волны: $\theta = 0^\circ$, $\tau = 0^\circ$ (б); $\theta = 0^\circ$, $\tau = 1^\circ$ (в); $\theta = 1^\circ$, $\tau = 0^\circ$ (г); $\theta = 1^\circ$, $\tau = 1^\circ$ (д)

В фононном кристалле со счетным набором ячеек одновременно может возбуждаться до трех незатухающих волн Блоха, если имеет место разрешенная зона. Поведение волновых чисел волн Блоха в зависимости от безразмерной частоты $\omega H / (2\pi C_A)$, где C_A — фазовая скорость S -волны в полупространстве, при $\theta = \tau = 0^\circ$ иллюстрирует рисунок 2а. При небольшом увеличении углов θ и τ (Рис. 2в–д) волновые числа почти не изменяются. Запрещенные зоны ВГ-I, в которых распространяются только затухающие волны, обозначены на рисунке 2 закрашенными прямоугольными областями. Эти зоны остаются запрещенными и для фононного кристалла с конечным числом ячеек, как это видно на рисунке 2б–д, где в логарифмическом масштабе приведены графики

энергетических коэффициентов прохождения κ^+ плоской P -волны, падающей из нижнего полупространства. Коэффициент прохождения κ^+ определяется как отношение волновой энергии, прошедшей через фоновый кристалл, к энергии, переносимой падающей волной [19]. Для нормального угла падения волны ($\theta = \tau = 0^\circ$) помимо зон ВГ-I можно наблюдать зоны второго типа — ВГ-II (заштрихованные области на Рис. 2б). Даже при незначительном увеличении одного из углов (в рассматриваемом случае на 1°) в некоторых диапазонах, соответствовавших ВГ-II при 0° , нарушаются условия (15), так как оказывается, что $t_{sj} \neq 0$. Проявление этого эффекта можно видеть на рисунке 2б–д: в некоторых зонах происходит резкий рост коэффициента прохождения κ^+ . Данные диапазоны, обозначенные двойной штриховкой, соответствуют разрешенным зонам с малым коэффициентом прохождения (ЛТРВ), в них $\kappa^+ \sim 10^{-5}$ (Рис. 2в, з). При одновременном увеличении углов θ , τ зоны ЛТРВ поглощают зоны ВГ-II (Рис. 2д).

Запрещенные зоны второго типа наблюдаются и при других углах падения P -волны, если хотя бы один из них равен нулю (Рис. 3а, б). При отклонении направления падения от строго вертикального происходит перерождение зон ВГ-II в зоны ЛТРВ; коэффициент прохождения в последних достаточно мал и при больших углах θ и τ (Рис. 3в, з).

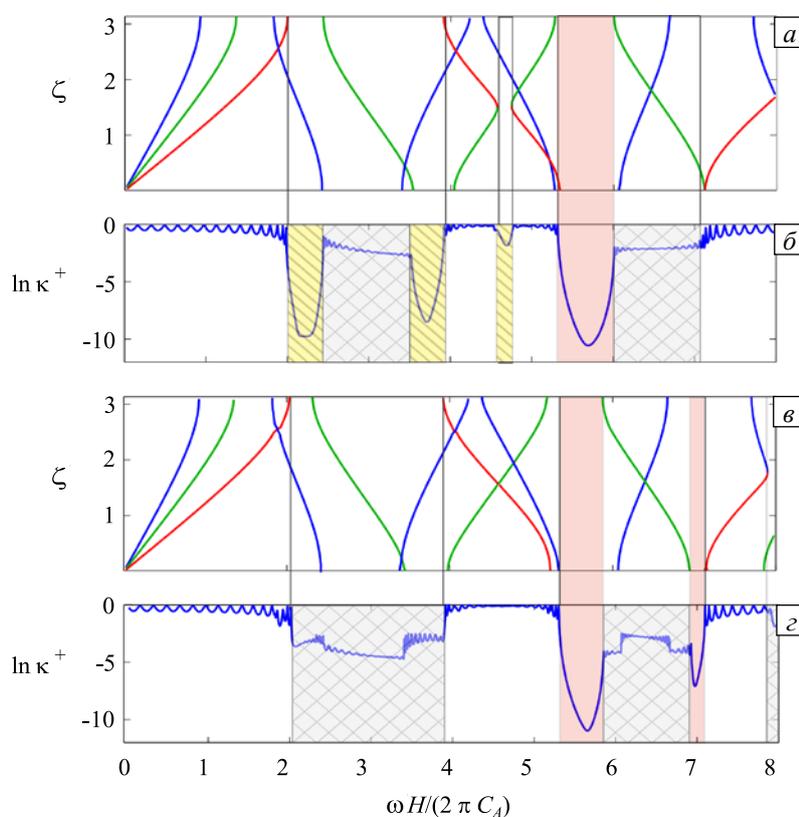


Рис. 3. Волновые числа (а, в) и коэффициенты прохождения (б, з) при падении плоской P -волны при различных значениях углов: $\theta = 10^\circ$, $\tau = 0^\circ$ (а, б); $\theta = 1^\circ$, $\tau = 5^\circ$ (в, з)

6. Заключение

Приведенный метод построения волновых полей обладает численной устойчивостью и позволяет рассчитывать волновые поля в слоистых периодических структурах, а также выполнять параметрические исследования запрещенных зон. Полученные полуаналитические зависимости для описания волновых полей дают возможность производить асимптотическую оценку коэффициента прохождения волн через структуру при неограниченном увеличении числа составляющих ее ячеек. На основе асимптотических представлений получена классификация запрещенных зон в анизотропных слоистых периодических структурах. Разработанный подход естественным образом обобщается на случай фоновых кристаллов, составленных из слоев со связанными физико-механическими полями, например, кристаллов, изготовленных из электромагнитоупругих и термоупругих материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-51-53043-а), а также РФФИ совместно с Администрацией Краснодарского края (проект № 16-41-230352-р_юг_а).

Литература

1. Gazalet J., Dupont S., Kastelik J.C., Rolland Q., Djafari-Rouhani B. A tutorial survey on waves propagating in periodic media: Electronic, photonic and phononic crystals. Perception of the Bloch theorem in both real and Fourier domains // *Wave Motion*. – 2013. – Vol. 50, no. 3. – P. 619-654. DOI
2. Breuer-Weil A., Almasoud N.N., Abbasi B., Yetisen A.K., Yun S.-H., Butt H. Parametric simulations of slanted 1D photonic crystal sensors // *Nanoscale Research Letters*. – 2016. – Vol. 11. – P. 157. DOI
3. Shi Z.F., Cheng Z.B., Xiong C. A new seismic isolation method by using a periodic foundation // *Proceedings of the 12th International Conference on Engineering, Science, Construction, and Operations in Challenging Environments – Earth and Space*. – 2010. – P. 2586-2594. DOI
4. Дьяконов М.В., Устинов Ю. Дифракция сдвиговых волн на бесконечной и конечной периодических системах разрезов в упругом слое // *Акустический журнал*. – 1997. – Т. 43, № 2. – С. 176-181.
5. Филипенко Г.В. Изгибные волны в балке с периодически расположенными точечными массами // *Вычисл. мех. сплош. сред*. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 153-163. DOI
6. Ballandras S., Lardat R., Wilm M., Pastureaud Th., Reinhardt A., Champavert N., Steichen W., Daniau W., Laude V., Armati R., Martin G. A mixed finite element/boundary element approach to simulate complex guided elastic wave periodic transducers // *J. Appl. Phys.* – 2009. – Vol. 105. – 014911. DOI
7. Li F.L., Wang Y.S., Zhang C.Z. Boundary element method for calculation of elastic wave transmission in two-dimensional phononic crystals // *Sci. China Phys. Mech. Astron.* – 2016. – Vol. 59. – 664602. DOI
8. Aki K., Richards P.G. *Quantitative Seismology*. – New York: University Science Books, 2002.
9. Chen A.-L., Wang Y.-S. Study on band gaps of elastic waves propagating in one-dimensional disordered phononic crystals // *Physica B: Condensed Matter*. – 2007. – Vol. 392, no. 1-2. – P. 369-378. DOI
10. Li Y., Wei P., Zhou Y. Band gaps of elastic waves in 1-D phononic crystal with dipolar gradient elasticity // *Acta Mech.* – 2016. – Vol. 227, no. 4. – P. 1005-1023. DOI
11. Golub M.V., Fomenko S.I., Bui T.Q., Zhang Ch., Wang Y.-S. Transmission and band gaps of elastic SH waves in functionally graded periodic laminates // *Int. J. Solids Struct.* – 2012. – Vol. 49, no. 2. – P. 344-354. DOI
12. Fomenko S.I., Golub M.V., Zhang Ch., Bui T.Q., Wang Y.-S. In-plane elastic wave propagation and band-gaps in layered functionally graded phononic crystals // *Int. J. Solids Struct.* – 2014. – Vol. 51, no. 13. – P. 2491-2503. DOI
13. Фоменко С.И. Волновые поля и запрещенные зоны в квазипериодических слоистых композитах // *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. – 2013. – № 4-1. – С. 120-126.
14. Фоменко С.И., Александров А.А. Волновые поля и запрещенные зоны в слоистых пьезоэлектрических фоновых кристаллах // *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. – 2016. – № 4. – С. 92-99.
15. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Вауэр Й. Формирование частотных полос пропускания и запираения в упругом волноводе с системой препятствий // *Акустический журнал*. – 2011. – Т. 57, № 3. – С. 291-302. (English version DOI)
16. Glushkov E., Glushkova N., Golub M., Eremin A. Resonance blocking and passing effects in two-dimensional elastic waveguides with obstacles // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2011. – Vol. 130. – P. 113-121. DOI
17. Голуб М.В. Моделирование дифракции упругих волн на множественных полосовых трещинах в слоистом периодическом композите // *Вычисл. мех. сплош. сред*. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 136-143. DOI
18. Nayfeh A.H., Achenbach J.D., Budiansky B., Lauwrier H.A., Saffman P.G., Van Wijngaarden L., Willis J.R. *Wave propagation in layered anisotropic media with application to composites*. – Amsterdam: Elsevier, 1995. – 331 p.
19. Glushkov E., Glushkova N. Blocking property of energy vortices in elastic waveguides // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1997. – Vol. 102. – P. 1356-1360. DOI

References

1. Gazalet J., Dupont S., Kastelik J.C., Rolland Q., Djafari-Rouhani B. A tutorial survey on waves propagating in periodic media: Electronic, photonic and phononic crystals. Perception of the Bloch theorem in both real and Fourier domains. *Wave Motion*, 2013, vol. 50, no. 3, pp. 619-654. DOI
2. Breuer-Weil A., Almasoud N.N., Abbasi B., Yetisen A.K., Yun S.-H., Butt H. Parametric simulations of slanted 1D photonic crystal sensors. *Nanoscale Research Letters*, 2016, vol. 11, pp. 157. DOI
3. Shi Z.F., Cheng Z.B., Xiong C. A new seismic isolation method by using a periodic foundation. *Proceedings of the 12th International Conference on Engineering, Science, Construction, and Operations in Challenging Environments – Earth and Space*, 2010, pp. 2586-2594. DOI
4. D'yakonov M.V., Ustinov Yu.A. Difraktsiya sdvigovykh voln na beskonechnoy i konechnoy periodicheskikh sistemakh razrezov v uprugom sloe [Diffraction of shear waves at infinite and finite periodic systems of slots in an elastic layer]. *Acoust. Phys.*, 1997, vol. 43, no. 2, pp. 176-181.
5. Filipenko G.V. The banding waves in the beam with periodically located point masses. *Vyichisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2015, vol. 8, no. 2, pp. 153-163. DOI
6. Ballandras S., Lardat R., Wilm M., Pastureaud Th., Reinhardt A., Champavert N., Steichen W., Daniau W., Laude V., Armati R., Martin G. A mixed finite element/boundary element approach to simulate complex guided elastic wave periodic transducers. *J. Appl. Phys.*, 2009, vol. 105, 014911. DOI
7. Li F.L., Wang Y.S., Zhang C.Z. Boundary element method for calculation of elastic wave transmission in two-dimensional phononic crystals. *Sci. China Phys. Mech. Astron.*, 2016, vol. 59, 664602. DOI
8. Aki K., Richards P.G. *Quantitative seismology*. New York: University Science Books, 2002.
9. Chen A.-L., Wang Y.-S. Study on band gaps of elastic waves propagating in one-dimensional disordered phononic crystals. *Physica B: Condensed Matter*, 2007, vol. 392, no. 1-2, pp. 369-378. DOI
10. Li Y., Wei P., Zhou Y. Band gaps of elastic waves in 1-D phononic crystal with dipolar gradient elasticity. *Acta Mech.*, 2016, vol. 227, no. 4, pp. 1005-1023. DOI

11. Golub M.V., Fomenko S.I., Bui T.Q., Zhang Ch., Wang Y.-S. Transmission and band gaps of elastic SH waves in functionally graded periodic laminates. *Int. J. Solids Struct.*, 2012, vol. 49, no. 2, pp. 344-354. DOI
12. Fomenko S.I., Golub M.V., Zhang Ch., Bui T.Q., Wang Y.-S. In-plane elastic wave propagation and band-gaps in layered functionally graded phononic crystals. *Int. J. Solids Struct.*, 2014, vol. 51, no. 13, pp. 2491-2503. DOI
13. Fomenko S.I. Volnovye polya i zapreshchennye zony v kvaziperiodicheskikh sloistykh kompozitakh [Wave fields and band gaps in the quasi-layered composites]. *Ecological Bulletin of Researches Centers BSEC*, 2013, no. 4-1, pp. 120-126.
14. Fomenko S.I., Aleksandrov A.A. Volnovye polya i zapreshchennye zony v sloistykh p'ezoelektricheskikh fononnykh kristallakh [Wave fields and band gaps in layered piezoelectric phononic crystals]. *Ecological Bulletin of Researches Centers BSEC*, 2016, no. 4, pp. 92-99.
15. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Wauer J. Formation of frequency pass and gap bands in an elastic waveguide with a system of obstacles. *Acoust. Phys.*, 2011, vol. 57, no. 3, pp. 281-291. DOI
16. Glushkov E., Glushkova N., Golub M., Eremin A. Resonance blocking and passing effects in two-dimensional elastic waveguides with obstacles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, vol. 130, pp. 113-121. DOI
17. Golub M.V. Simulation of elastic wave diffraction by multiple strip-like cracks in layered periodic composite. *Vyichisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2015, vol. 8, no. 2, pp. 136-143. DOI
18. Nayfeh A.H., Achenbach J.D., Budiansky B., Lauwrier H.A., Saffman P.G., Van Wijngaarden L., Willis J.R. *Wave propagation in layered anisotropic media with application to composites*. Amsterdam: Elsevier, 1995. 331 p.
19. Glushkov E.V., Glushkova N.V. Blocking property of energy vortices in elastic waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1997, vol. 102, pp. 1356-1360. DOI

Поступила в редакцию 13.03.2017; опубликована в электронном виде 04.10.2017

Сведения об авторах

Фоменко Сергей Иванович, снс, Институт математики, механики и информатики, Кубанский государственный университет (ИММИ КубГУ), 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, д. 149; e-mail: sfom@yandex.ru

Голуб Михаил Владимирович, внс, ИММИ КубГУ; e-mail: m_golub@inbox.ru

Александров Андрей Анатольевич, асп., ИММИ КубГУ; e-mail: alexandrovscience@gmail.ru