

DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.18  
УДК 532.546:533.1:519.622

## АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБРАЗОВАНИЯ ГИДРАТА В СНЕЖНОМ МАССИВЕ

А.С. Чиглинцева

*Бирский филиал «Башкирский государственный университет», Бирск, Российская Федерация  
Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, Казань, Российская Федерация*

На обсуждение выносится математическая модель процесса нагнетания гидратообразующего газа (метана) в снежный массив, в исходном состоянии наполненный тем же газом. Полагалось, что начальная температура системы «снег+газ» ниже температуры плавления льда, а давление – меньше равновесного давления фазовых переходов системы «снег+газ+гидрат». Температура закачиваемого газа превышает равновесную температуру фазовых переходов для системы «снег+газ+гидрат». Показано, что в зависимости от исходного состояния системы «снег+газ» и интенсивности накачивания газа в области фильтрации можно выделить три характерных зоны, а именно: ближнюю, содержащую снег и газ; промежуточную, в которой газ, снег и гидрат находятся в фазовом равновесии; и дальнюю, заполненную газом и снегом. Соответственно вводятся две фронтальные границы: между дальней и промежуточной зонами, где начинается переход снега в состав гидрата, и между ближней и промежуточной зонами, на которой заканчивается процесс формирования гидрата. Построены автомодельные решения, описывающие поля температур и давлений, а также распределения насыщенностей снега, гидрата и газа в массиве. Для ближней и дальней областей найдены аналитические решения. Для промежуточной области получена система из трех обыкновенных дифференциальных уравнений в автомодельных координатах. Численная реализация задачи проводилась с использованием метода Рунге–Кутты четвертого порядка и метода стрельбы. В процессе численного эксперимента установлено, что с ростом температуры газа, подаваемого в содержащую гидрат зону, её объем уменьшается. Также обнаружено, что при увеличении проницаемости массива промежуточная область расширяется, при этом значение гидратонасыщенности на ближней границе снижается. Выявлено, что по мере заполнения массив снегом нагретая зона сужается, и наибольшая протяженность объемной области образования гидрата наблюдается в снежных массивах с низкой температурой.

*Ключевые слова:* газовые гидраты, нагнетание, холодный газ, снежный массив, автомодельная координата, метод стрельбы

## SELF-SIMILAR SOLUTION OF THE PROBLEM OF HYDRATE FORMATION IN SNOW MASSIFS

A.S. Chiglintseva

*Birsk Branch of Bashkir State University, Birsk, Russian Federation  
Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center RAS, Kazan, Russian Federation*

A mathematical model of the process of injection of hydrate forming gas (methane) into the snow massif saturated with the same gas is constructed. It is assumed that the initial temperature of the “snow+gas” system is lower than the melting point of ice, and pressure is less than the equilibrium pressure of phase transitions of the “snow+gas+hydrate” system. The value of temperature of the injected gas lies above the equilibrium temperature of phase transitions for the “snow+gas+hydrate” system. It is shown that, depending on the initial condition of the «snow+gas» system and the gas injection intensity, it is possible to distinguish three zones in the filtration field, namely the near-field area saturated with snow and gas, the intermediate area, in which gas, snow and hydrate are in the state of phase equilibrium, and the distant area filled with gas and snow. Accordingly, two front boundaries are introduced: the boundary between the distant and intermediate zones, where the transition of snow into the structure of hydrate begins, and the boundary between the near-field and intermediate zones, on which the hydrate formation process ceases. Self-similar solutions describing the temperature and pressure of fields and the distribution of saturations of snow, hydrate and gas saturation in the massif are constructed. Analytical solutions are obtained for the near-field and distant regions. For the intermediate zone, the system consisting of three ordinary differential equations in self-similarity coordinates is obtained. The numerical realization of the problem was carried out using the Runge–Kutta fourth order method and the shooting method. In the numerical experiment, it has been established that the volume formation zone of the hydrate decreases with increasing temperature of the injected gas. It is also shown that as the permeability of the massif increases the intermediate zone becomes wider, and at the same time the value of saturation of hydrates on the nearest boundary decreases. It has been found that with the growth of initial snow accumulation in the massif the heated zone is narrowed, and the greatest extent of the volume hydrate formation region is observed in the snow massifs having low temperature.

*Key words:* gas hydrate, injection, cold gas, snow massif, self-similar coordinate, shooting method

### 1. Введение

Как известно, газогидраты представляют собой не только природное сырьё для получения энергии, но и являются удобным и выгодным для консервации и хранения углеводородных газов состоянием. Например, в естественных условиях подземных залежей можно создавать резервуары, в которых будет заключен объем газа гораздо больший, чем объем «чистого» газа». К тому же известен эффект самоконсервации газогидратов, который связан с их достаточно низкой скоростью разрушения в области нестабильного существования, открывающий принципиальную возможность хранения газа при отрицательных температурах и небольших значениях давлений (от одной до нескольких атмосфер) в гидратном состоянии [1–3].

В природных условиях газогидраты могут образовываться как в донных отложениях морей и океанов, так и в поровом пространстве пород при положительных и отрицательных температурах [4, 5]. В частности

в работе [5] экспериментально изучался процесс образования гидрата углекислого газа. Дана оценка влияния температуры, состава пород и влажности на кинетику перехода поровой влаги в гидрат углекислого газа. Установлено, что увеличение скорости охлаждения повышает роль процессов замерзания в гидратонакоплении. Данное явление с разных сторон исследовалось в [6–10]. Были построены математические модели процесса образования газогидрата в пористом пласте, изначально насыщенном газом и льдом (или водой). Так, в частности:

- в [6] выявлено, что накопление газогидрата в поровом пространстве активно протекает не только во влажных пористых средах, но и в породах с частично заполненными льдом пустотами;
- в [7] предложена математическая модель, которая описывает процесс при инъекции в среду холодного газа; рассмотрены случаи, когда образование гидрата лимитируется кинетикой впрыскивания, а также тепломассопереносом в пористой среде; найдены критические условия, разделяющие режимы образования гидрата на фронтальной поверхности и в объёмной области;
- в [8] задача решена при накачивании газа в пористый пласт, наполненный газом и водой; определены критические условия подачи газа, когда гидрат получается или в чисто фронтальном режиме, или в объёмном режиме;
- в [9] проанализированы особенности процесса при инъекции газа в пористый пласт, в исходном состоянии насыщенный газом и льдом; построены решения и выявлены условия образования гидрата как на фронтальной поверхности, так и в протяжённой области;
- в работе [10] рассмотрено нагнетание холодного газа в пласт, изначально состоящий из снега и газа; гидратообразование происходит в равновесном режиме; найдены автомодельные решения, характеризующие распределения основных параметров в пласте.

Математическая модель образования гидрата двуокиси углерода при его инъекции в газообразной фазе в истощенное месторождение природного газа, содержащее метан и воду в свободном состоянии, предложена в работе [11]. Показано, что формируется фронт вытеснения метана, на котором возникает гидрат углекислого газа. Представлены критические диаграммы режимов закачки двуокиси углерода, по которым можно проследить условия полного или частичного образования гидрата.

Таким образом, анализ известных работ подтвердил, что большой практический интерес в настоящее время представляют исследования, касающиеся как понимания и описания механизмов, вызывающих переход газа в гидрат при положительных и отрицательных температурах, так и создания на основе этого явления различных технологий, которые позволят запасать и хранить газ в больших объёмах.

В настоящей работе строится автомодельное решение задачи нагнетания гидратообразующего газа в снежный массив, насыщенный тем же газом.

## 2. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть полубесконечная область ( $x \geq 0$ ) (Рис. 1а) заполнена снегом, насыщенным газом (метаном) при давлении  $p_0$  и температуре  $T_0$ , отвечающим термодинамическим условиям существования их в свободном состоянии. Исходные снего- и газонасыщенности системы «снег+газ» равны  $S_{i0}$  и  $S_{g0}$ . При этом полагаем, что начальная температура  $T_0$  системы находится ниже точки плавления льда ( $T_0 < T^{(0)}$ ,  $T^{(0)} = 0^\circ\text{C}$ ) и давление  $p_0$  меньше равновесного давления фазовых переходов  $p_s(T_0)$  системы «снег+газ+гидрат» (здесь и далее индексы  $h$ ,  $i$  и  $g$  относятся, соответственно, к гидрату, снегу и газу):

$$T = T_0, \quad p = p_0, \quad p_0 < p_s(T_0), \quad S_i = S_{i0}, \quad S_g = S_{g0}, \quad S_h = 0 \quad (t = 0, \quad 0 < x < \infty).$$

Рассмотрим модельную задачу инъекции холодного газа ( $T_{ge} \leq 0^\circ\text{C}$ ) через границу  $x = 0$  под давлением  $p_e$  при температуре закачиваемого газа, большей равновесной температуры фазовых переходов  $T_s(p_e)$  для системы «снег+газ+гидрат»:

$$T = T_e, \quad p = p_e, \quad T_e > T_s(p_e), \quad p_e > p_0, \quad t > 0, \quad x = 0.$$

Конденсированные фазы (снег и гидрат) будем считать неподвижными.

В зависимости от первоначального термобарического состояния системы «снег+газ», а также интенсивности нагнетания газа, определяемой значением давления  $p_e$ , будем полагать, что могут возникать три характерных зоны в области фильтрации ( $x > 0$ ): ближняя, содержащая только газ и снег; промежуточная, в которой газ, снег и гидрат пребывают в равновесии; дальняя, которая заполнена газом и снегом. В промежуточной зоне происходит образование гидрата. Зоны разделяются фронтальными границами: первая располагается между дальней и промежуточной зонами, здесь начинается переход снега в состояние гидрата; вторая — между ближней и промежуточной зонами, на ней процесс гидратообразования завершается.

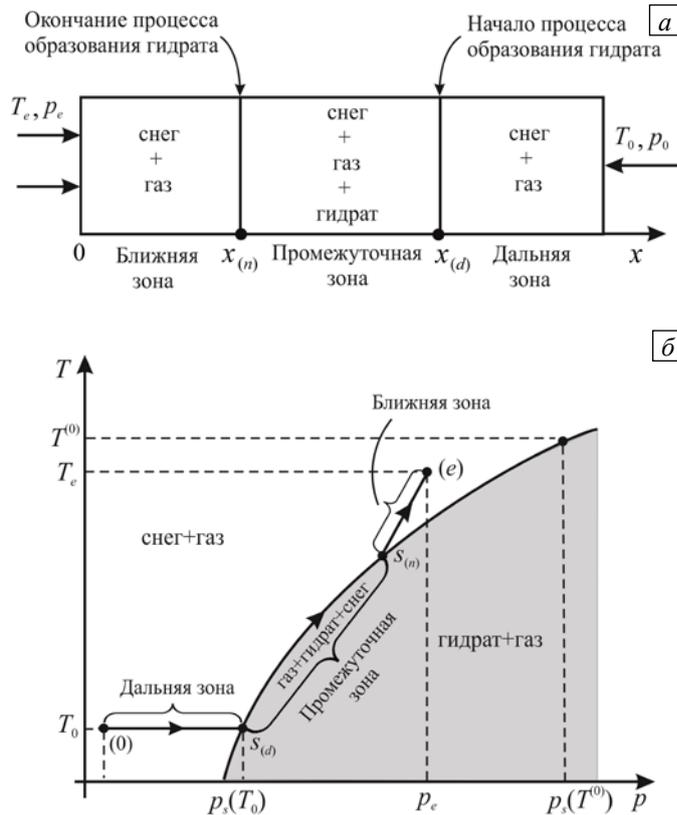


Рис. 1. Область фильтрации (а) и кривая фазового равновесия (б) для режима нагнетания газа в снежный массив

На рисунке 1б режим накачивания газа в снежный массив изображён на фазовой плоскости давление–температура ( $p, T$ ). Граничные условия при  $x=0$  отмечены точкой (e). Точки  $s_{(n)}$  и  $s_{(d)}$  на линии фазового равновесия системы «газ+снег+гидрат» соответствуют ближней и дальней границам промежуточной зоны в области фильтрации. Участок на кривой фазового равновесия между этими точками соотносится с промежуточной зоной, а участки между (e) и  $s_{(n)}$  и  $s_{(d)}$  и (0) — с ближней и дальней зонами. Стрелками на кривой показано поэтапное появление зон в области фильтрации газа.

В исходном состоянии массив насыщен газом и снегом, данное состояние отмечено на фазовой диаграмме точкой (0). Затем, при достижении в массиве некоторого значения давления —  $p_s(T_0)$ , отвечающего условию зарождения гидрата при данной температуре  $T_0$ , вследствие инъекции газа происходит переход снега и газа в гидратное состояние, при этом в области фильтрации начинает формироваться

промежуточная зона, а в граничной точке  $s_{(d)}$  стартует процесс гидратообразования. Поскольку нагнетание газа осуществляется при значениях температуры и давления из области, находящейся выше кривой фазового равновесия системы «газ+снег+гидрат» (точка e), то есть из области, где гидрат не существует, возникает зона, где имеет место только фильтрация газа через слой снега, без образования гидрата. Эту зону будем называть ближней. На кривой фазового равновесия её начало отмечено точкой  $s_{(n)}$ . На этой границе процесс гидратообразования завершается.

Система основных уравнений, описывающая процессы фильтрации и теплопереноса, сопровождающиеся образованием газогидрата в пласте, и представляющая собой законы сохранения масс газа, снега и притока тепла, закон Дарси, в одномерном случае имеет вид [12, 14]:

$$\frac{\partial(S_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial(S_g \rho_g v_g)}{\partial x} = -\rho_h G \frac{\partial S_h}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\rho_i \frac{\partial S_i}{\partial t} = -\rho_h (1-G) \frac{\partial S_h}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} + \rho_g S_g c_g v_g \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \rho_h l_h \frac{\partial S_h}{\partial t}, \tag{3}$$

$$S_g v_g = -\frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{4}$$

$$(\rho c = \rho_g S_g c_g + \rho_h S_h c_h + \rho_i S_i c_i, \quad \lambda = \lambda_g S_g + \lambda_h S_h + \lambda_i S_i).$$

Здесь:  $\rho_j$  и  $S_j$  ( $j=h, i, g$ ) — истинные плотности и насыщенности  $j$ -й фазы;  $G$  — массовая концентрация газа в гидрате;  $v_g$ ,  $k_g$ ,  $c_g$  и  $\mu_g$  — скорость, проницаемость, удельная теплоёмкость при постоянном объёме и динамическая вязкость газовой фазы;  $p$  — давление;  $T$  — температура;  $l_h$  — удельная теплота образования гидрата, отнесённая к единице его массы;  $\rho c$  и  $\lambda$  — удельная теплоёмкость

в единице объёма и коэффициент теплопроводности системы «снег+газ+гидрат». Фазовые насыщенности удовлетворяют условию [14]

$$S_g + S_i + S_h = 1. \quad (2)$$

Снег и гидрат будем считать несжимаемыми, а газ — калорически совершенным:

$$\rho_i, \rho_h = \text{const}, \quad p = \rho_g R_g T. \quad (3)$$

В зоне, где одновременно находятся снег, газ и гидрат, должно выполняться условие фазового равновесия, то есть температура и текущее значение давления связаны формулой [12]:

$$T_s(p) = T_{(s0)} + T_* \ln(p/p_{(s0)}). \quad (4)$$

где  $T_{(s0)}$ ,  $T_*$ ,  $p_{(s0)}$  — эмпирические параметры, зависящие от вида газогидрата и рассматриваемых диапазонов температур и давлений ( $T_{(s0)}$  — равновесная температура при  $p = p_{(s0)}$ ) [3].

Как было отмечено выше, при нагнетании газа в пласт, сопровождаемом гидратообразованием, могут возникнуть три характерных зоны. На границах раздела между этими зонами терпят скачки насыщенности фаз, а также потоки массы и тепла, поэтому должны выполняться соотношения, следующие из условий баланса массы и тепла [12, 14]:

$$\begin{aligned} [(S_h \rho_h (1-G) + S_i \rho_i) \dot{x}_{(s)}] &= 0, & 1 \\ [\rho_g S_g (v_g - \dot{x}_{(s)}) - \rho_h S_h G \dot{x}_{(s)}] &= 0, & 2 \\ \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right] &= [\rho_h L_h S_h \dot{x}_{(s)}]. & 3 \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь:  $[\psi]$  — скачок параметра  $\psi$  на границе между зонами  $x = x_{(s)}$  ( $s = n, d$ );  $\dot{x}_{(s)}$  — скорость движения соответствующей границы. Температуру и давление на этих границах будем полагать непрерывными.

### 3. Решения в ближней и дальней областях

Уравнение пьезопроводности для ближней зоны ( $0 < x < x_{(n)}$ ) получим из уравнения (1<sub>1</sub>) системы (1) с учётом закона Дарси (уравнения (1<sub>4</sub>)), уравнения состояния (3) и равенства насыщенности газа и снега исходным значениям ( $S_g = S_{g0}$ ,  $S_i = S_{i0}$ ) поскольку в этой зоне гидрат не образуется:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_g}{\mu_g S_{g0}} \frac{p}{T} \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Из уравнения (1<sub>3</sub>) и закона Дарси следует уравнение температуропроводности для ближней зоны:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_g c_g \frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (0 < x < x_{(n)}). \quad (7)$$

В дальней зоне ( $x_{(d)} < x < \infty$ ) происходит фильтрация калорически совершенного газа без образования гидрата, поэтому изменение температуры незначительно. Значит, здесь можно полагать, что процесс носит изотермический характер ( $T = T_0$ ). Тогда из уравнения неразрывности для газа (1<sub>1</sub>) с учётом закона Дарси при условиях  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial S_h}{\partial t} = 0$ , уравнения состояния (3) в предположении, что  $S_g = S_{g0}$ , получим нелинейное уравнение фильтрации в следующем виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k_g}{\mu_g S_{g0}} \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (8)$$

#### 4. Уравнение пьезопроводности в промежуточной области

Уравнение (1<sub>2</sub>) с учётом (2) можно привести к виду:

$$\frac{\partial S_g}{\partial t} = \left( \frac{\rho_h(1-G)}{\rho_i} - 1 \right) \frac{\partial S_h}{\partial t}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в уравнение (1<sub>1</sub>), используя закон Дарси (1<sub>4</sub>) и уравнение состояния для газа (3), придём к следующему уравнению для изменения гидратонасыщенности:

$$\frac{\partial S_h}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_g}{\mu_g} \frac{p}{R_g T_s(p)} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{S_g}{R_g} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{T_s(p)} \right) \right) / \rho, \quad (10)$$

$$\text{где } \rho = \frac{p}{R_g T_s(p)} \left( \frac{\rho_h(1-G)}{\rho_i} - 1 \right) + \rho_h G.$$

Из (1<sub>3</sub>) с учётом (10) и условия фазового равновесия (4), связывающего распределение температуры  $T$  с давлением  $p$  в промежуточной зоне, получим

$$\begin{aligned} \rho c \frac{T_*}{p} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{c_g k_g T_*}{R_g T_s(p) \mu_g} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 - \frac{\rho \lambda T_*}{p^2} \left( p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right) = \\ = \frac{\rho_h l_h}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{R_g T_s(p)} \frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{S_g}{R_g} \frac{(T_s(p) - T_*)}{T_s^2(p)} \frac{\partial p}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Интегрируя (9) и принимая во внимание, что в момент времени  $t=0$  гидрато- и газонасыщенность, соответственно, равны  $S_h=0$ ,  $S_g=S_{g0}$ , найдём выражение для вычисления текущего значения газонасыщенности в промежуточной зоне:

$$S_g = S_{g0} - \left( 1 - \frac{\rho_h(1-G)}{\rho_i} \right) S_h.$$

#### 5. Граничные условия между зонами

Совместное преобразование условий сохранения на границах между зонами (5), закона Дарси и уравнения состояния (3) для ближней границы ( $x=x_{(n)}$ ) даёт выражение:

$$-\frac{k_g}{\mu_g} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{(n)}^- + \frac{k_g}{\mu_g} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{(n)}^+ = \left( S_{g(n)}^- - S_{g(n)}^+ - \frac{\rho_h G}{\rho_{g(n)}} S_{h(n)}^+ \right) \dot{x}_{(n)}. \quad (12)$$

Условие баланса тепла (5<sub>3</sub>) теперь запишется как

$$\left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{(n)}^- - \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{(n)}^+ = -\rho_h l_h S_{h(n)}^+ \dot{x}_{(n)}. \quad (13)$$

Насыщенности фаз при этом связаны следующими соотношениями:

$$S_{g(n)}^- = S_{g0}, \quad S_{g(n)}^+ = 1 - S_{i0} - \left( 1 - \frac{\rho_h(1-G)}{\rho_i} \right) S_{h(n)}^+.$$

Здесь индексы (–) и (+) говорят о разрыве параметра при переходе из зоны в зону и соответствуют его значению перед границей и после неё.

На дальней границе ( $x = x_{(d)}$ ) полагаем, что гидратонасыщенность не претерпевает разрыв ( $S_{h(d)}^- = S_{h(d)}^+ = 0$ ), тогда из условий (5) при  $x = x_{(d)}$  получим:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{(d)}^- + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{(d)}^+ = 0. \quad (14)$$

В промежуточной области ( $x_{(n)} < x < x_{(d)}$ ) температура и давление, как отмечено выше, связаны условием фазового равновесия (4), поэтому их производные на границах  $x = x_{(n)}$  и  $x = x_{(d)}$  должны удовлетворять соотношениям вида:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(n)}^+ &= \frac{T_*}{p_{(n)}} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{(n)}^+, & 1 \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(d)}^- &= \frac{T_*}{p_{(d)}} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{(d)}^-. & 2 \end{aligned} \quad (15)$$

### 6. Автомодельные решения

Задача (6)–(8), (10), (11) имеет автомодельное решение. Введем автомодельную переменную

$$\xi = x / \left(2\sqrt{\chi_0^{(p)} t}\right),$$

где  $\chi_0^{(p)} = k_g p_0 / (S_{g0} \mu_g)$  — коэффициент пьезопроводности.

Пренебрегая непостоянством температуры в ближней зоне (так как в этой зоне для температуры по шкале Кельвина выполняется условие  $\Delta T/T \ll 1$ ) и применяя линеаризацию Лейбенсона [15] в уравнениях неразрывности (6) и (8), приведём систему в автомодельных переменных (6)–(8) к виду:

$$\begin{aligned} -\xi \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} &= \frac{1}{2} \frac{d^2 p_{(1)}^2}{d\xi^2}, \\ -\xi \frac{dT_{(1)}}{d\xi} &= \frac{\text{Pe}_{(1)} \Phi_{(1)}}{4 p_0} \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} \frac{dT_{(1)}}{d\xi} + \frac{\Phi_{(1)}}{2} \frac{d^2 T_{(1)}}{d\xi^2} \quad (0 < \xi < \xi_{(n)}), \\ -\xi \frac{dp_{(3)}^2}{d\xi} &= \frac{1}{2} \frac{d^2 p_{(3)}^2}{d\xi^2}, \quad (\xi_{(d)} < \xi < \infty), \end{aligned}$$

где  $\Phi_{(1)} = \chi^{(T)} / \chi_0^{(p)}$ ,  $\text{Pe}_{(1)} = \rho_{g0} c_g k_g p_0 / (\lambda_{(1)} \mu_g)$  — число Пекле,  $\chi^{(T)} = \lambda_{(1)} / (\rho c)$  — коэффициент температуропроводности. Здесь и в дальнейшем нижние индексы 1, 2 и 3 относятся к ближней, промежуточной и дальней зонам соответственно.

Для распределений давления и температуры в ближней зоне ( $0 < \xi < \xi_{(n)}$ ) имеем решение:

$$\begin{aligned} p_{(1)}^2 &= p_{(n)}^2 + (p_e^2 - p_{(n)}^2) \int_{\xi}^{\xi_{(n)}} \exp(-\xi^2) d\xi / \left( \int_0^{\xi_{(n)}} \exp(-\xi^2) d\xi \right), \\ T_{(1)} &= T_{(n)} + (T_e - T_{(n)}) \int_{\xi}^{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\Phi_{(1)}} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2 p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi / \left( \int_0^{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\Phi_{(1)}} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2 p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Для дальней зоны ( $\xi_{(d)} < \xi < \infty$ ) можем записать:

$$p_{(3)}^2 = p_0^2 + (p_{(d)}^2 - p_0^2) \int_{\xi}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi / \left( \int_{\xi_{(d)}}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi \right). \quad (17)$$

Относительно промежуточной зоны уравнения (10) и (11) преобразуются к следующему автомодельному виду:

$$\frac{d^2 p_{(2)}}{d\xi^2} = \left( -\xi A \frac{dp_{(2)}}{d\xi} - \left[ B - \frac{\rho \lambda_{(2)} T_*}{2\chi_0^{(p)} p_{(2)}^2} \right] \left( \frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right)^2 \right) / \left( C + \frac{\rho \lambda_{(2)} T_*}{2\chi_0^{(p)} p_{(2)}} \right), \quad (18)$$

$$\frac{dS_{h(2)}}{d\xi} = -\frac{1}{\rho R_g T_s(p_{(2)})} \left[ \frac{k_g}{2\xi \mu_g \chi_0^{(p)}} \left( p_{(2)} \frac{d^2 p_{(2)}}{d\xi^2} + \left( 1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) \left( \frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right)^2 \right) + S_g \left( 1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) \left( \frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right) \right], \quad (19)$$

$$A = \frac{S_g (T_s(p_{(2)}) - T_*) \rho_h l_h}{R_g T_s^2(p_{(2)})} + \frac{\rho(\rho c) T_*}{p_{(2)}}, \quad B = \frac{k_g (T_s(p_{(2)}) - T_*) \rho_h l_h}{2R_g \mu_g T_s^2(p_{(2)}) \chi_0^{(p)}} + \frac{\rho c_g k_g T_*}{2R_g \mu_g T_s(p_{(2)}) \chi_0^{(p)}}, \quad C = \frac{\rho_h l_h p_{(2)} k_g}{2R_g \mu_g T_s(p_{(2)}) \chi_0^{(p)}}.$$

Условия (12) и (13) для ближней границы  $\xi = \xi_{(n)}$  в автомодельных координатах будут выглядеть так:

$$-\left( \frac{dp}{d\xi} \right)_{(n)}^- + \left( \frac{dp}{d\xi} \right)_{(n)}^+ = \frac{2\chi_0^{(p)} \mu_g}{k_g \rho_{g(n)}} \left( \rho_{g(n)} (S_{g(n)}^- - S_{g(n)}^+) - \rho_h G S_{h(n)}^+ \right) \xi_{(n)}, \quad (20)$$

$$\left( \frac{dT}{d\xi} \right)_{(n)}^- - \tilde{\lambda} \left( \frac{dT}{d\xi} \right)_{(n)}^+ = -\frac{2\rho_h l_h \chi_0^{(p)}}{\lambda_{(n)}^-} S_{h(n)}^+ \xi_{(n)}, \quad (21)$$

где  $\tilde{\lambda} = \lambda_{(n)}^+ / \lambda_{(n)}^-$ . Соотношение (15<sub>1</sub>) в автомодельных координатах примет вид:

$$\left( \frac{dT}{d\xi} \right)_{(n)}^+ = \frac{T_*}{p_{(n)}} \left( \frac{dp}{d\xi} \right)_{(n)}^+. \quad (22)$$

Используя аналитические решения (16) и соотношение (22), условия (20) и (21) можно записать как

$$q_{(n)} + \frac{(p_e^2 - p_{(n)}^2)}{2p_{(n)}} \frac{\exp(-\xi_{(n)}^2)}{\int_0^{\xi_{(n)}} \exp(-\xi^2) d\xi} = \frac{2\chi_0^{(p)} \mu_g}{k_g} \xi_{(n)} \left( (S_{g(n)}^- - S_{g(n)}^+) - \frac{\rho_h G}{\rho_{g(n)}} S_{h(n)}^+ \right), \quad (23)$$

$$\frac{(T_{(n)} - T_e) \exp\left(-\frac{\xi_{(n)}^2}{\Phi_{(1)}} - \frac{\text{Pe}_{(1)} p_{(n)}^2}{2p_0^2}\right)}{\int_0^{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\Phi_{(1)}} - \frac{\text{Pe}_{(1)} p_{(1)}^2}{2p_0^2}\right) d\xi} - \tilde{\lambda} \frac{T_*}{p_{(n)}} q_{(n)} = -\frac{2\rho_h l_h \chi_0^{(p)}}{\lambda_{(n)}^-} S_{h(n)}^+ \xi_{(n)}, \quad (24)$$

где  $q_{(n)} = \left( \frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right)_{\xi_{(n)}}^-$ .

Выражая из условия фазового равновесия (4)  $T_{(n)}$  через  $p_{(n)}$  и подставляя его в (24), вместо (23) и (24) получим на границе  $\xi = \xi_{(n)}$  следующую связь для неизвестного параметра  $q_{(n)}$  с положением границы  $\xi_{(n)}$  и давлением  $p_{(n)}$ :

$$\Psi_1(\xi_{(n)}, p_{(n)}, q_{(n)}) = q_{(n)} + \frac{(p_e^2 - p_{(n)}^2)}{2p_{(n)}} \frac{\exp(-\xi_{(n)}^2)}{\int_0^{\xi_{(n)}} \exp(-\xi^2) d\xi} - \frac{2\chi_0^{(p)} \mu_g}{k_g} \xi_{(n)} \left( (S_{g(n)}^- - S_{g(n)}^+) - \frac{\rho_h G}{\rho_{g(n)}} S_{h(n)}^+ \right), \quad (25)$$

$$\Psi_2(\xi_{(n)}, p_{(n)}, q_{(n)}) = \frac{(T_s(p_{(n)}) - T_e) \exp\left(-\frac{\xi_{(n)}^2}{\Phi_{(1)}} - \frac{\text{Pe}_{(1)} p_{(n)}^2}{2p_0^2}\right)}{\int_0^{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\Phi_{(1)}} - \frac{\text{Pe}_{(1)} p_{(1)}^2}{2p_0^2}\right) d\xi} - \tilde{\lambda} \frac{T_*}{p_{(n)}} q_{(n)} + \frac{2\rho_h l_h \chi_0^{(p)} \xi_{(n)}}{\lambda_{(n)}^-} S_{h(n)}^+, \quad (26)$$

$$T_s(p_{(n)}) = T_{(s0)} + T_* \ln(p_{(n)}/p_{(s0)}).$$

На границе  $\xi = \xi_{(d)}$  условие (14) запишется в виде:

$$\left(\frac{dp}{d\xi}\right)_{(d)}^- = \left(\frac{dp}{d\xi}\right)_{(d)}^+.$$

### 7. Численная реализация

Для промежуточной области ( $\xi_{(n)} \leq \xi \leq \xi_{(d)}$ ) уравнения (18), (19) представляют собой систему трёх обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно представить так:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{(2)}}{d\xi} &= q, \\ \frac{dq}{d\xi} &= -\xi A \frac{dp_{(2)}}{d\xi} - \left[ B - \frac{\rho\lambda_{(2)}T_*}{2\chi_0^{(p)} p_{(2)}^2} \right] \left( \frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right)^2 / \left( C + \frac{\rho\lambda_{(2)}T_*}{2\chi_0^{(p)} p_{(2)}} \right), \\ \frac{dS_{h(2)}}{d\xi} &= \frac{-1}{\rho R_g T_s(p_{(2)})} \left[ \frac{k_g}{2\xi\mu_g\chi_0^{(p)}} \left( p_{(2)} \frac{dq}{d\xi} + \left( 1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) q^2 \right) + S_g \left( 1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) q \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Неизвестными здесь являются функции  $q_{(n)} = (dp_{(2)}/d\xi)_{\xi_{(n)}}$ , координаты границ  $\xi_{(n)}$  и  $\xi_{(d)}$ , а также давления на этих границах  $p_{(n)}$  и  $p_{(d)}$ . Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (27) начинается от правой границы  $\xi = \xi_{(d)}$ , положение которой выбирается произвольным образом, и осуществляется с отрицательным шагом в сторону левой границы  $\xi = \xi_{(n)}$ .

За начальные данные при решении задачи Коши (при  $\xi = \xi_{(d)}$ ) возьмём величины:

$$p_{(d)} = p_s(T_0), \quad q_{(d)} = \left(\frac{dp}{d\xi}\right)_{(d)}^-, \quad S_h = 0. \quad (28)$$

При этом значение  $q_{(d)}$ , исходя из равенства (28) и решения (17) для третьей зоны, определим по формуле

$$q_{(d)} = -(p_s^2(T_0) - p_0^2) \exp(-\xi_{(d)}^2) / \left( 2p_s(T_0) \int_{\xi_{(d)}}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi \right).$$

Численное решение задачи было реализовано методом стрельбы [16]. В процессе счёта вместо  $\xi_{(n)}$ ,  $p_{(n)}$  и  $q_{(n)}$  в (25) и (26) подставлялись текущие значения  $\xi$ ,  $p$  и  $q$ , полученные интегрированием системы (27). Каждый вариант вычислений прекращался при достижении параметром  $\psi_1$  нулевого значения ( $\psi_1(\xi_{(n)}, p_{(n)}, q_{(n)}) = 0$ ). «Пристрелка» по значению  $\xi_{(d)}$ , продолжалась до момента, когда с некоторой заданной точностью начинали выполняться условия  $\psi_2(\xi_{(n)}, p_{(n)}, q_{(n)}) = 0$ . Соответствующие значения  $\xi_{(d)}$ ,  $\xi_{(n)}$ ,  $p_{(d)}$  и  $p_{(n)}$  принимались за искомые величины.

### 8. Результаты расчётов

В вычислениях использовались следующие значения параметров, определяющих свойства системы:  $T_{(s0)} = 263 \text{ K}$ ;  $p_{(s0)} = 1,86 \text{ МПа}$ ;  $T_* = 30 \text{ K}$ ;  $\rho_i^0 = 900 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho_h^0 = 910 \text{ кг/м}^3$ ;  $c_g = 1650 \text{ Дж/(кг·K)}$ ;  $c_i = 2090 \text{ Дж/(кг·K)}$ ;  $c_h = 2200 \text{ Дж/(кг·K)}$ ;  $\lambda_g = 0,03 \text{ Вт/(м·K)}$ ;  $\lambda_i = 2 \text{ Вт/(м·K)}$ ;  $\lambda_h = 0,5 \text{ Вт/(м·K)}$ ;  $l_h = 1,45 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ ;  $G = 0,12$ ;  $\mu_g = 10^{-5} \text{ Па·с}$ ;  $k_g = 10^{-15} \text{ м}^2$ ;  $R_g = 520 \text{ Дж/(кг·K)}$ . Исходные значения температуры, давления в массиве и давления нагнетания газа равнялись:  $T_0 = 225 \text{ K}$  и  $T_e = 270 \text{ K}$ ;  $p_0 = 0,1 \text{ МПа}$  и  $p_e = 2 \text{ МПа}$ ; начальная снегонасыщенность составляла  $S_{i0} = 0,3$ .

На рисунке 2 приведены распределения насыщенностей гидрата и снега, температуры и давления в массиве. Здесь и далее справа изображены в увеличенном масштабе взятые в кружки фрагменты кривых слева. Из графика гидратонасыщенности следует, что в промежуточной зоне, где происходит образование гидрата, она не постоянна, а монотонно меняется вдоль координаты  $\xi$  (Рис. 2а). Её наибольшее значение, при указанных выше исходных параметрах пласта и нагнетаемого газа, наблюдается на границе, разделяющей ближнюю и промежуточную зоны, и составляет  $S_h \approx 0,16$ . При этом на ближней границе ( $\xi = \xi_{(n)}$ ) снег не полностью переходит в состав гидрата, гидратонасыщенность претерпевает скачок, и в ближней зоне гидрат отсутствует.

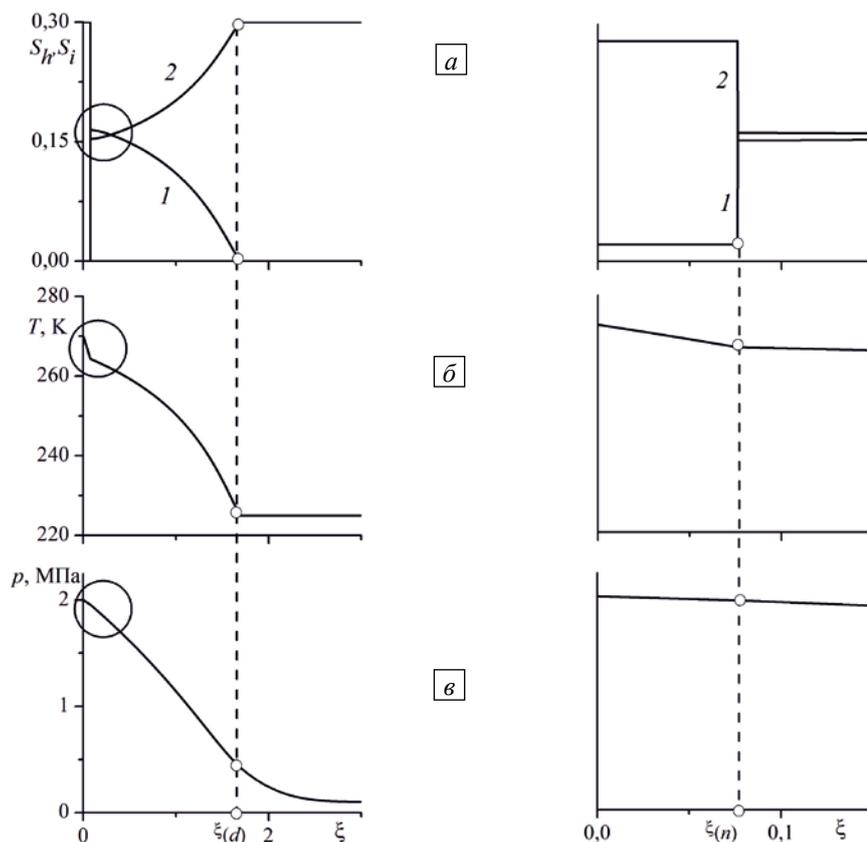


Рис. 2. Распределение насыщенностей гидрата (кривая 1) и снега (2) (а), температуры (б) и давления (в) в массиве

Аналогичные рисунку 2 зависимости, но при различных значениях температуры нагнетаемого газа  $T_e$ , представлены на рисунке 3. Видно, что с ростом  $T_e$  протяжённость зоны образования гидрата уменьшается, при этом ближняя зона, насыщенная газом и снегом, увеличивается в размерах (Рис. 3а). Следует отметить, что температура нагнетаемого газа в основном влияет на распределения насыщенностей фаз и температурных полей в массиве.

На рисунке 4 представлены картины тех же распределений при различных значениях проницаемости массива. Видно, что при её увеличении от  $10^{-16}$  до  $10^{-15}$  м<sup>2</sup> протяжённость зоны гидратообразования растёт, при этом значение гидратонасыщенности на ближней границе уменьшается (Рис. 4а). Это связано с тем, что большая проницаемость массива влечёт за собой интенсификацию теплообмена, поэтому промежуточная зона нагревается сильнее (Рис. 4б). Вследствие этого объём образования гидрата на соответствующей границе уменьшается, что сопровождается не столь интенсивным падением давления в промежуточной области (Рис. 4в).

На рисунке 5 показано, что с ростом снегонасыщенности по сравнению с первоначальной сужается нагретая зона за счёт гидратообразования (Рис. 5а). Это обусловлено тем, что с увеличением по отношению к начальной снегонасыщенности в массиве, при заданной интенсивности нагнетания газа растёт доля потребления газа, необходимая для образования гидрата, что, в свою очередь, приводит к более быстрому снижению давления (Рис. 5в) и, согласно формуле (6), температуры в массиве (Рис. 5б).

Аналогичные распределения демонстрируются на рисунке 6 при различных значениях начальной температуры массива. Из рисунка видно, что при увеличении температуры (Рис. 6б) уменьшаются как объём области образования гидрата (Рис. 6а), так и доля гидрата на ближней границе.

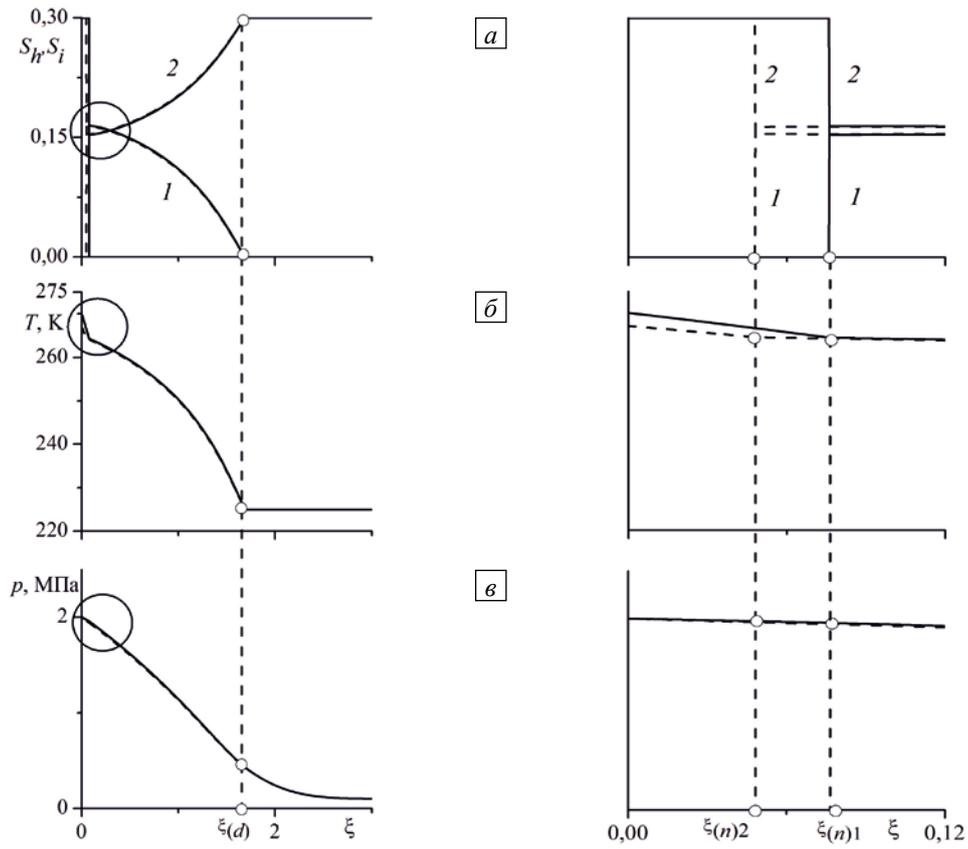


Рис. 3. Распределение насыщенностей гидрата (кривая 1) и снега (2) (а), температуры (б) и давления (в) в массиве при различных значениях температуры нагнетаемого газа  $T_g, K$ : 267 (штриховая линия); 270 (сплошная линия)

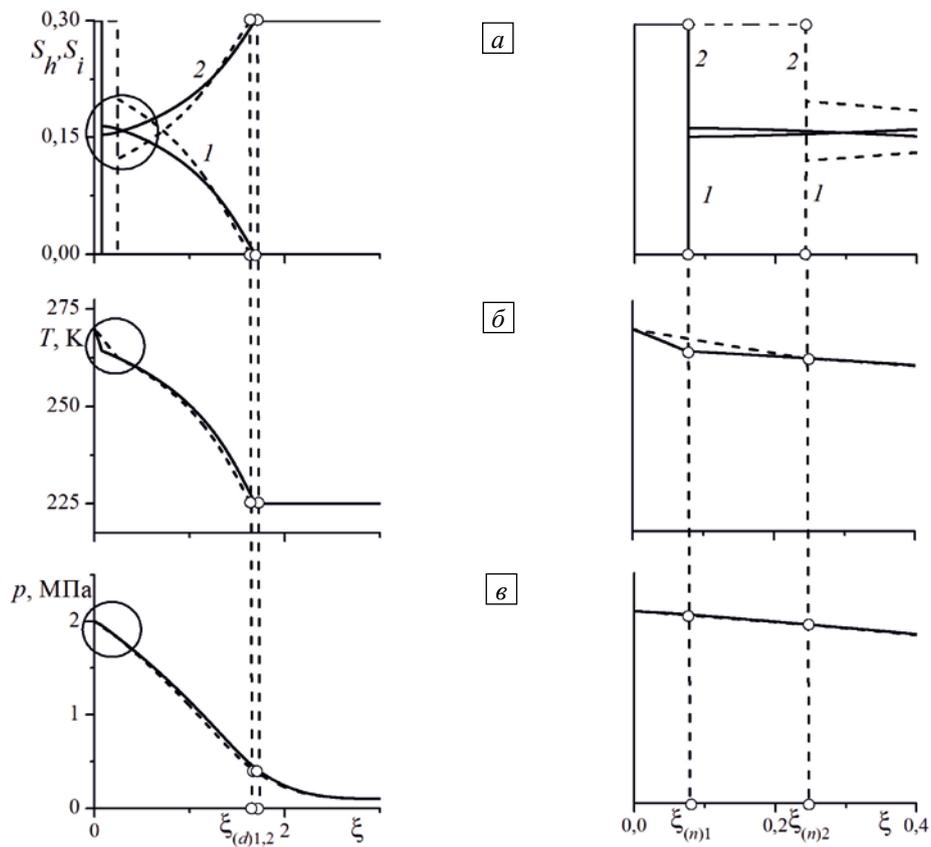


Рис. 4. Распределение насыщенностей гидрата (кривая 1) и снега (2) (а), температуры (б) и давления (в) в массиве при различных значениях проницаемости  $k, m^2$ :  $10^{-16}$  (штриховая линия),  $10^{-15}$  (сплошная линия)

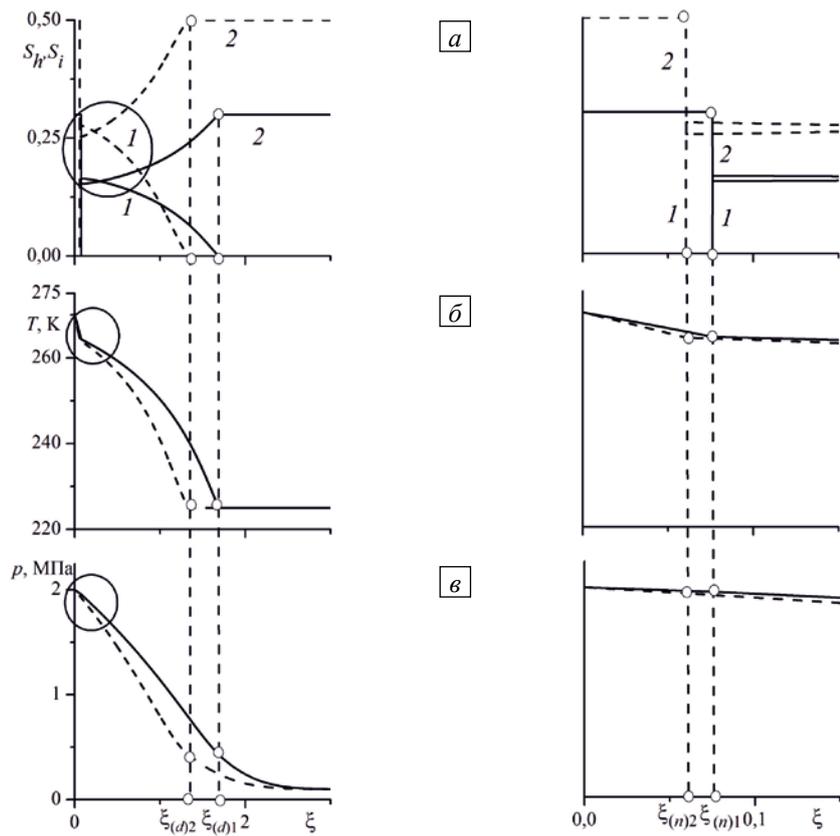


Рис. 5. Распределение насыщенностей гидрата (кривая 1) и снега (2) (а), температуры (б) и давления (е) в массиве при различных исходных значениях снегонасыщенности  $S_0$ : 0,5 (штриховая линия); 0,3 (сплошная линия)

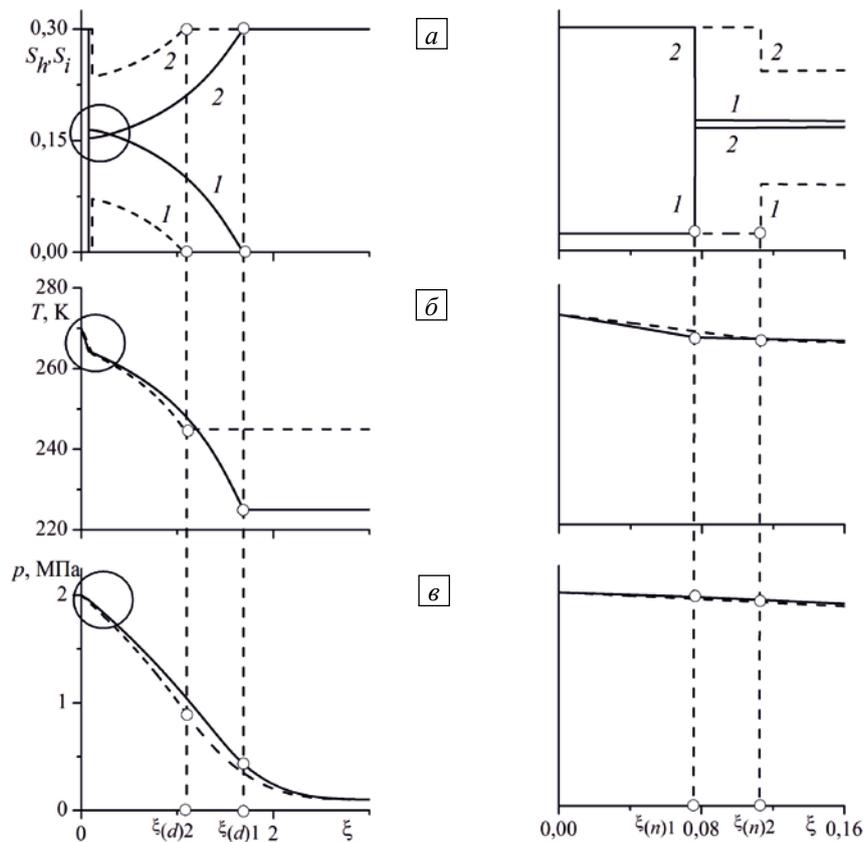


Рис. 6. Распределение насыщенностей гидрата (кривая 1) и снега (2) (а), температуры (б) и давления (е) в массиве при различной начальной температуре массива  $T_0, K$ : 245 (штриховая линия); 225 (сплошная линия)

## 9. Выводы

Построена теоретическая модель сопровождаемого гидратообразованием процесса нагнетания газа в насыщенный газом снежный массив. Получены автомодельные решения, описывающие распределения насыщенностей фаз и поля температур и давлений в массиве. Показано, что при образовании гидрата возможны три характерных зоны: ближняя, насыщенная газом и снегом; промежуточная, в которой газ, снег и гидрат находятся в состоянии фазового равновесия; дальняя, заполненная газом и снегом.

Установлено, что с ростом температуры нагнетаемого газа объем зоны образования гидрата уменьшается, при этом ближняя область, насыщенная газом и снегом, расширяется. Получено, что с увеличением объемной доли снега в массиве нагретая зона, вследствие гидратообразования, сужается. Выявлено, что с ростом проницаемости массива нагрев промежуточной области происходит более интенсивно, поэтому доля гидрата на ближней границе, разделяющей ближнюю и промежуточную зоны, падает. Обнаружено, что протяженность области образования гидрата и доля гидрата на ближней границе становятся меньше с ростом температуры массива.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 15-11-20022).

## Литература

1. Stern L.A., Circone S., Kirby S.H., Durham W.B. Anomalous preservation of pure methane hydrate at 1 atm // *J. Phys. Chem. B*. – 2001. – Vol. 105, no. 9. – P. 1756-1762. DOI
2. Мельников В.П., Поденко Л.С., Нестеров А.Н., Драчук А.О., Молокитина Н.С., Решетников А.М. Эффект самоконсервации гидратов метана, полученных в «сухой воде» // ДАН. – 2016. – Т. 466, № 5. – С. 554-558. (English version DOI).
3. Истомин В.А., Якушев В.С. Газовые гидраты в природных условиях. – М.: Недра, 1992. – 236 с.
4. Чувиллин Е.М., Козлова Е.В. Исследования формирования мерзлых гидратосодержащих пород // Криосфера Земли. – 2005. – № 1. – С. 73-80.
5. Чувиллин Е.М., Гурьева О.М. Экспериментальное изучение образования гидратов CO<sub>2</sub> в поровом пространстве промерзающих и мерзлых пород // Криосфера Земли. – 2009. – Т. 13, № 3. – С. 70-79.
6. Шагапов В.Ш., Хасанов М.К., Мусакаев Н.Г. Образование газогидрата в пористом резервуаре, частично насыщенном водой, при инъекции холодного газа // ПМТФ. – 2008. – Т. 49, № 3. – С. 462-472. (English version DOI).
7. Хасанов М.К., Гималтдинов И.К., Столповский М.В. Особенности образования газогидратов при нагнетании холодного газа в пористую среду, насыщенную газом и водой // ТОХТ. – 2010. – Т. 44, № 4. – С. 442-449. DOI
8. Нурисламов О.Р., Шагапов В.Ш. Нагнетание газа во влажную пористую среду с образованием газогидрата // ПММ. – 2009. – Т. 73, № 5. – С. 809-823. DOI
9. Хасанов М.К. Исследование режимов образования газогидратов в пористой среде, частично насыщенной льдом // Теплофизика и аэромеханика. – 2015. – Т. 22, № 2. – С. 255-266. (English version DOI).
10. Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Русинов А.А. Математическое моделирование процесса образования гидрата в пласте насыщенного снегом при нагнетании холодного газа // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2016. – Т. 9, № 2. – С. 173-181. DOI
11. Цыткин Г.Г. Образование гидрата углекислого газа при его инъекции в истощенное месторождение углеводородов // МЖГ. – 2014. – № 6. – С. 101-108. (English version DOI).
12. Шагапов В.Ш., Мусакаев Н.Г. Динамика образования и разложения гидратов в системах добычи, транспортировки и хранения газа. – М.: Наука, 2016. – 240 с.
13. Любимова Т.П., Циберкин К.Б. Моделирование диссоциации зерна гидрата метана в пористой матрице // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 119-124. DOI
14. Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. – М.: Наука, 1987. – Ч. 1. – 464 с., Ч. 2. – 360 с.
15. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. – М.: Недра, 1993. – 416 с.
16. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2001. – 382 с.

## References

1. Stern L.A., Circone S., Kirby S.H., Durham W.B. Anomalous preservation of pure methane hydrate at 1 atm *J. Phys. Chem. B*, 2001, vol. 105, no. 9, pp. 1756-1762. DOI
2. Mel'nikov V.P., Podenko L.S., Nesterov A.N., Drachuk A.O., Molokitina N.S., Reshetnikov A.M. Self-preservation of methane hydrates produced in "dry water". *Doklady Chemistry*, 2016, vol. 466, no. 2, pp. 53-56. DOI
3. Istomin V.A., Yakushev V.S. *Gazovye gidraty v prirodnykh usloviyakh* [Gas hydrates under natural conditions]. Moscow: Nedra, 1992. 236 p.
4. Chuvilin E.M., Kozlova E.V. Issledovaniya formirovaniya merzlykh gidratosoderzhashchikh porod [Research of formation of frozen gas hydrate-saturated sediment]. *Kriosfera Zemli – Earth's Cryosphere*, 2005, vol. IX, no. 1, pp. 73-80.
5. Chuvilin E.M., Guryeva O.M. Eksperimental'noe izuchenie obrazovaniya gidratov CO<sub>2</sub> v porovom prostranstve promerzayushchikh i merzlykh porod [Experimental investigation of CO<sub>2</sub> gas hydrate formation in porous media of frozen and freezing sediments]. *Kriosfera Zemli – Earth's Cryosphere*, 2009, vol. XIII, no. 3, pp. 70-79.
6. Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Musakaev N.G. Formation of a gas hydrate due to injection of a cold gas into a porous reservoir partly saturated by water. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 3, pp. 462-472. DOI

7. Khasanov M.K., Gimaltdinov I.K., Stolpovsky M.V. Specific features of the formation of gas hydrates during the injection of a cold gas into a porous medium saturated with a gas and water. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2010, vol. 44, no. 4, pp. 424-431. DOI
8. Nurislamov O.R., Shagapov V.Sh. Gas injection into a moist porous medium with the formation of a gas hydrate. *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol. 73, no. 5, pp. 581-591. DOI
9. Khasanov M.K. Investigation of regimes of gas hydrate formation in a porous medium, partially saturated with ice. *Thermophys. Aeromech.*, 2015, vol. 22, no. 2, pp. 245-255. DOI
10. Shagapov V.S.H., Chiglintseva A.S., Rusinov A.A. Mathematical modeling of hydrate formation in a reservoir saturated with snow by cold gas injection. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 2, pp. 173-181. DOI
11. Tsypkin G.G. Formation of carbon dioxide hydrate at the injection of carbon dioxide into a depleted hydrocarbon field. *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, no.6, pp. 789-795. DOI
12. Shagapov V.Sh., Musakaev N.G. *Dinamika obrazovaniya i razlozheniya gidratov v sistemax dobychi, transportirovki i khraneniya gaza* [Dynamics of education and decomposition of hydrates in systems of production, transportation and storage of gas]. Moscow: Nauka, 2016, 240 p.
13. Lyubimova T.P., Tsiberkin K.B. Simulation of methane hydrate grain dissociation within a porous matrix. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 119-124. DOI
14. Nigmatulin R.I. *Dynamics of multiphase media*. Hemisphere, N.Y., 1990. Vol. 1, 532 p., vol. 2, 388 p.
15. Basniev K.S., Kochina I.N., Maksimov V.M. *Podzemnaya gidromekhanika* [Underground hydromechanics]. Moscow: Nedra, 1993. 416 p.
16. Verzhbitsky V.M. *Chislennyye metody (matematicheskij analiz i obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya)* [Numerical methods (mathematical analysis and ordinary differential equations)]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001. 382 p.

Поступила в редакцию 17.02.2017; опубликована в электронном виде 30.06.2017