

DOI: [10.7242/1999-6691/2017.10.2.16](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.16)

УДК 539.3:534.1

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВОЛН С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГРУППОВОЙ СКОРОСТЬЮ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Г.В. Филиппенко

*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация  
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация*

В работе обсуждаются свободные колебания бесконечной тонкой цилиндрической оболочки типа оболочки Кирхгофа–Лява. Изучаются распространяющиеся волны и потоки энергии в ней. Рассмотрен стационарный случай. Особое внимание уделено волнам с отрицательной групповой скоростью в окрестности точки, соответствующей кратным корням дисперсионного уравнения. Асимптотически исследуется дисперсионное уравнение и анализируются условия образования отрицательной групповой скорости. Для этого используются асимптотики дисперсионных кривых в окрестности этой точки. Определяется тот диапазон изменения параметров системы (отношения длин окружных волн и длин волн вдоль её образующей к её относительной толщине), при котором у волн возможна отрицательная групповая скорость, а также очерчиваются диапазоны частот и волновых чисел, в которых этот эффект наблюдается. Качественно сопоставляются асимптотики для случая кратных корней и регулярного случая и устанавливается их различие. Возникающие эффекты представляются как в терминах кинематических и динамических переменных, так и в терминах потоков энергии. Называются преимущества и недостатки этих подходов. Сравниваются вклады в общий энергетический поток различных механизмов передачи энергии по оболочке. Показана особая роль вращательной компоненты в зарождении отрицательного интегрального потока энергии. Приводится зависимость отрицательного потока энергии, а также динамических и кинематических переменных и их компонент от относительной толщины оболочки, номера моды колебаний и других параметров. Проверяется пропорциональность потоков энергии и их компонент для различных мод. Обсуждаются возможные области применимости полученных эффектов.

*Ключевые слова:* распространение волн, цилиндрическая оболочка, колебания оболочек, локальные и интегральные потоки энергии

## ENERGY ANALYSIS OF WAVES WITH NEGATIVE GROUP VELOCITY IN CYLINDRICAL SHELL

G.V. Filippenko

*Institute of Mechanical Engineering RAS, Saint-Petersburg, Russian Federation  
Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation*

The problem of joint oscillations of a thin infinite cylindrical Kirchoff–Love shell is considered. The free vibrations of the system are found. The propagating waves and energy flux are analyzed. Much attention is given to the exploration of waves with negative group velocity in the neighborhood of the bifurcation point of dispersion curves. The asymptotics of dispersion curves are used in the neighborhood of the bifurcation point for this case. The interval of system parameters (the relation of lengths of circle waves and lengths of waves along cylinder to the relative thickness of the cylinder) is estimated when the negative group velocity arises. The range of frequencies and wavenumbers where this effect is observed is also estimated. The difference in the kinds of asymptotics for the regular case and the case of bifurcation is discussed. The analysis of arising effects is carried out in terms of kinematic and dynamic variables and in terms of energy flux. Relative advantages and disadvantages of these approaches are discussed. Comparison of the contributions of various mechanisms of energy transmission in the shell to the integral energy flux is performed. A special role of the rotational component in the occurrence of a subzero integrated energy flux is analyzed. The dependence of subzero energy flux and dynamic and kinematic variables on the relative thickness of the shell, the mode number and other parameters of the system is considered. The proportionality of the energy flux and its components for various modes is analyzed. The possible fields of application of the obtained effects are established.

*Key words:* wave propagation, cylindrical shell, shell vibrations, local and integral energy fluxes

### 1. Введение и постановка задачи

Цилиндрические оболочки привлекают к себе внимание в связи с богатыми приложениями в технике и строительстве. Они служат важнейшими элементами акустических волноводов, различных трубопроводов и опор гидротехнических сооружений [1–9]. Наличие жидкости внутри или снаружи оболочки значительно обогащает картину волновых процессов. Так, в работах [1, 3–7] исследовались волновые процессы в системе «оболочка, заполненная жидкостью», а в работах [8, 9] — в системе «оболочка, окруженная жидкостью». При определённом сочетании параметров системы, в которой жидкость находится внутри оболочки, уже на первых модах может появиться волна с отрицательной групповой скоростью, в отличие от случая расположения жидкости снаружи оболочки [9], где подобный эффект не наблюдался (в реальных материалах и жидкостях).

Факт, что у волны с отрицательной групповой скоростью направление распространения (фазовая скорость) и направление распространения энергии (групповая скорость) противоположны, помимо теоретического интереса, может иметь и практическое значение. Например, если параметры системы

таковы, что вклад данного типа волны при работе источника колебаний становится существенным, то это может уменьшать эффективность работы источника и, как следствие, приводить к увеличению амплитуды колебаний в его окрестности, что может быть существенным для прочностных характеристик конструкции.

Заметим, что в последнее время помимо исследования кинематических и динамических характеристик процессов в различных оболочках используется энергетический анализ, в том числе и анализ потоков энергии [1–3, 5, 8, 9, 13–15]. Начать более подробное изучение эффекта отрицательной групповой скорости (в том числе его энергетических аспектов) на более простой модели (сухой цилиндрической оболочке), где он также имеет место (хотя и для достаточно высоких мод колебаний) [9] является естественным. Это исследование продолжается в данной работе.

Рассмотрим стационарные колебания бесконечно протяжённой «сухой» цилиндрической оболочки. Введём цилиндрические координаты  $(r, \varphi, z)$ , где ось  $z$  совпадает с осью вращения оболочки, и локальные координаты  $(t, \mathbf{n}, \mathbf{k})$ , где  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ , соответственно, касательный и нормальный к поверхности оболочки единичные векторы, а вектор  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ . В качестве переменных для представления вибрационного поля выберем вектор смещений оболочки  $\mathbf{u}(\varphi, z)^T$  ( $T$  — знак операции транспонирования). Зависимость всех процессов от времени полагаем гармонической, а временной фактор  $e^{-i\omega t}$  условимся всюду опускать.

Баланс сил, действующих на цилиндр, описывается уравнением

$$\mathbf{L}_w \mathbf{u} = (0, 0, 0)^T. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{L}_w$  — линейный матричный дифференциальный оператор оболочки типа Кирхгофа–Лява [10], который можно записать как

$$\mathbf{L}_w \equiv [L_{ij}] = w^2 \mathbf{I} + \mathbf{L} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где  $w = \omega R/c_s$  — безразмерная частота колебаний оболочки,  $\mathbf{I}$  — единичный оператор, а  $\mathbf{L}$  — дифференциальный оператор вида:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \alpha_1 [\partial_\varphi^2 + v_- \tilde{\partial}_z^2] & v_+ \tilde{\partial}_z^2 \partial_\varphi & \partial_\varphi (1 + 2\alpha^2 [1 - \partial_\varphi^2 - \tilde{\partial}_z^2]) \\ L_{21} & v_- \partial_\varphi^2 + \tilde{\partial}_z^2 & v \tilde{\partial}_z^2 \\ L_{31} & L_{32} & \alpha^2 (2\partial_\varphi^2 - 2 + 2v \tilde{\partial}_z^2 - [\partial_\varphi^2 + \tilde{\partial}_z^2]^2) - 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь:  $L_{21} = L_{12}$ ,  $L_{31} = -L_{13}$ ,  $L_{32} = -L_{23}$ ,  $\tilde{\partial}_z = R \partial_z$ ;  $\alpha_1 = 1 + 4\alpha^2$ ;  $v_\pm = (1 \pm v)/2$  — коэффициент Пуассона;  $\alpha^2 = (1/12)(h/R)^2$  — безразмерный параметр, характеризующий относительную толщину оболочки. Введём также следующие обозначения:  $\omega$  — частота гармонических колебаний оболочки,  $c_s = \sqrt{E/((1-v^2)\rho_s)}$  — скорость распространения волн деформации срединной поверхности,  $E$  — модуль Юнга,  $\rho_s$  и  $\rho = \rho_s h$  — объёмная и поверхностная плотности материала оболочки,  $h$  и  $R$  — толщина и радиус оболочки. Граничные условия дополним условием на бесконечности. Рассмотрим однородные волны, бегущие вдоль оси  $z$  из  $-\infty$  в  $+\infty$ .

## 2. Определение общего представления о вибрационном поле

Процедура решения задачи аналогична применяемой в работах [8, 9]. Решение уравнения (1) будем искать в виде:

$$\begin{pmatrix} u_t \\ u_z \\ u_n \end{pmatrix} = A e^{i\lambda z} \begin{pmatrix} \zeta \sin(m\varphi) \\ \xi \cos(m\varphi) \\ \gamma \cos(m\varphi) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty, \quad (3)$$

и положим, что  $|\zeta|^2 + |\xi|^2 + |\gamma|^2 = 1$ . Здесь:  $m = 0, 1, 2, \dots$  — номер моды колебаний;  $A, \zeta, \xi, \gamma$  — произвольные константы;  $\lambda$  — искомое волновое число. Подставляя (3) в (1), получаем однородную алгебраическую систему вида:

$$\widehat{\mathbf{L}}_w \mathbf{x} \equiv (w^2 \mathbf{I} + \widehat{\mathbf{L}}) \mathbf{x} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{x} = (\zeta, \xi, \gamma)^T. \quad (4)$$

Матрицы  $\widehat{\mathbf{L}}_w$  и  $\widehat{\mathbf{L}}$  в (4) получены в результате действия операторов  $\mathbf{L}_w$  и  $\mathbf{L}$  на вектор (3). Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к дисперсионному уравнению:

$$\det \widehat{\mathbf{L}}_w = 0. \quad (5)$$

Далее будем рассматривать только однородные волны, бегущие в положительном направлении оси  $z$ , поэтому для заданной частоты найдём лишь вещественные положительные корни  $\lambda$  уравнения (5). После подстановки такого корня в систему (4) определим собственный вектор  $\mathbf{x}$  и, следовательно, вид вибративного поля в системе.

Дисперсионное уравнение (5) является кубическим относительно  $w^2$  с коэффициентами, представляющими собой полиномы от  $\lambda^2$  в степени не выше четвёртой (например  $a(\lambda^2) = \sum_{i=0}^2 a_i \lambda^{2i}$ ):

$$w^6 + a(\lambda^2)w^4 + b(\lambda^2)w^2 + c(\lambda^2) = 0$$

В соответствии с формулами Кордана (для параметров задачи, отвечающих модели оболочки Кирхгофа–Лява), уравнение имеет три, в общем случае несовпадающих, вещественных неотрицательных корня  $w_i^2(\lambda^2)$ , которым отвечают три дисперсионные кривые:  $w_i(\lambda) := \sqrt{w_i^2(\lambda^2)} \geq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  (см. графики на рисунке 1а). Их точки зарождения ( $\lambda = 0$ ) обозначим как  $w_i^0 = w_i(0)$ ,  $w_1^0 \leq w_2^0 < w_3^0$ , при этом  $w_2^0 = m\sqrt{v_-}$ ,

$$2w_i^0 = -\text{Tr } \mathbf{J} \pm \sqrt{(\text{Tr } \mathbf{J})^2 - 4 \det \mathbf{J}} \quad (i = 1, 3), \quad \text{где } \mathbf{J} = \left. \begin{pmatrix} \widehat{L}_{11} & \widehat{L}_{13} \\ \widehat{L}_{31} & \widehat{L}_{33} \end{pmatrix} \right|_{\lambda=0}.$$

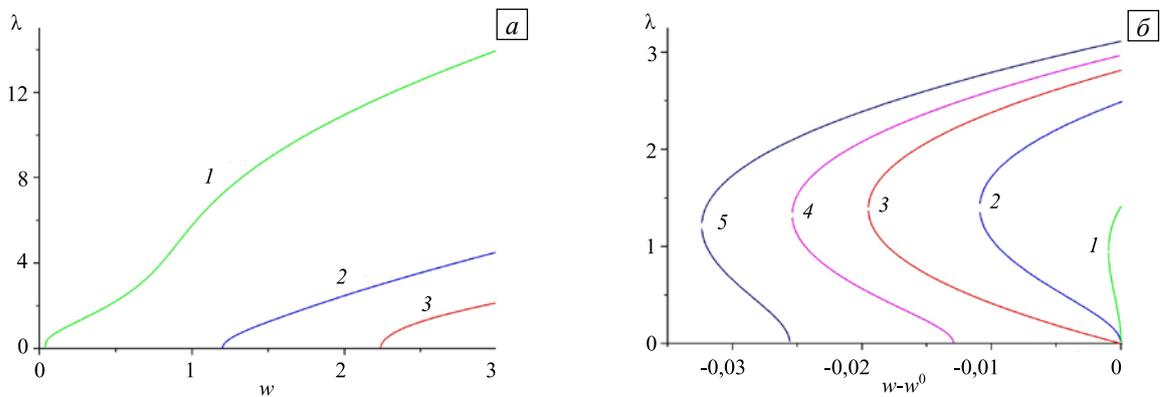


Рис. 1. Дисперсионные кривые при различных  $h/R$  для мод колебаний  $m = 2$  (а) и  $m = 42$  (б)

Заметим, что при определённом подборе параметров и достаточно больших  $m$  (заведомо больших единицы для оболочки типа оболочки Кирхгофа–Лява), возможна ситуация, когда точки  $w_1^0$  и  $w_2^0$  совпадут (в этом случае их абсцисса будет равняться  $w^0 \equiv m\sqrt{v_-}$ ) [9]. Эту точку назовем «точкой кратных корней». Её возникновение определяется условием  $S(\lambda^2)|_{\lambda=0} = 0$ , где

$$\begin{aligned} S(\lambda^2) &= Q^3(\lambda^2) - R^2(\lambda^2) = S_0 + S_1 \lambda^2 + O(\lambda^4); \\ Q(\lambda^2) &= (a^2(\lambda^2) - 3b(\lambda^2))/9 = Q_0 + Q_1 \lambda^2 + O(\lambda^4), \\ R(\lambda^2) &= (2a^3(\lambda^2) - 9a(\lambda^2)b(\lambda^2) + 27c(\lambda^2))/54 = R_0 + R_1 \lambda^2 + O(\lambda^4) \end{aligned}$$

(из соотношения  $0 < w_1^0 \leq w_2^0 < w_3^0$  вытекает, что  $S_0, S_1 \geq 0$ , а  $R_0, a_0 < 0$ ). Здесь  $S_0, S_1, Q_0, Q_1, R_0, R_1$  — коэффициенты разложения соответствующих функций в ряд Тейлора в окрестности точки  $\lambda = 0$ . Их явный вид не приводится ввиду громоздкости.

Рассмотрим поведение дисперсионных кривых  $w_1(\lambda)$  и  $w_2(\lambda)$  в окрестности точки кратных корней  $w^0$ . Для этого разложим отвечающие им решения Кордана в ряд Тейлора (ограничиваясь членами не выше второго порядка по  $\lambda$  и обозначая  $w_-(\lambda) \equiv w_1(\lambda)$ ,  $w_+(\lambda) \equiv w_2(\lambda)$ ). Тогда

$$w_{\pm}(\lambda) = w^0 \pm G\lambda + O(\lambda^2), \quad G = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{S_1}}{w^0 R_0^{2/3}}. \quad (6)$$

Отсюда непосредственно следует, что безразмерная групповая скорость волн  $dw/d\lambda$  (в дальнейшем просто групповая скорость) для этих двух дисперсионных кривых при  $\lambda \rightarrow 0$  по модулю равна  $G$  и противоположна по направлению.

Отметим, что асимптотика может быть линейной по  $\lambda$  не только для случая кратных корней, но и для регулярного случая, когда рассматривается первая дисперсионная ветка мод  $m = 0, 1$  оболочки [9] (при этом дисперсионная ветка стартует из точки  $w(0) = 0$  и  $(dw/d\lambda)|_{\lambda=0} > 0$ ).

Однако групповая скорость становится отрицательной для  $w_1(\lambda)$  и для точек зарождения дисперсионных кривых  $w_1^0$  и  $w_2^0$ , не совпадающих, но близких друг к другу. При этом параметр  $\varepsilon \equiv \sqrt{S_0}$  достаточно мал, что позволяет использовать приближённые асимптотические формулы. К тому же абсцисса одной из этих двух точек обязательно равна  $w^0$  (так как такой корень дисперсионного уравнения всегда существует). Поэтому возможны два случая. Если  $w_1^0 = w^0 < w_2^0$ , то

$$w_1(\lambda) = w^0 + \lambda^2(D - C^2/\varepsilon) + O(\lambda^4), \quad (7)$$

$$w_2(\lambda) = w^0 + B^2\varepsilon + \lambda^2(D + C^2/\varepsilon) + O(\lambda^4), \quad (8)$$

а если  $w_1^0 < w_2^0 = w^0$ , то

$$w_1(\lambda) = w^0 - B^2\varepsilon + \lambda^2(D - C^2/\varepsilon) + O(\lambda^4), \quad (9)$$

$$w_2(\lambda) = w^0 + \lambda^2(D + C^2/\varepsilon) + O(\lambda^4). \quad (10)$$

Здесь величины  $B$ ,  $C$ ,  $D$  от  $\varepsilon$  и  $\lambda$  не зависят:

$$B^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{w^0 R_0^{2/3}}, \quad C^2 = \frac{1}{6\sqrt{3}} \frac{S_1}{w^0 R_0^{2/3}},$$

$$D = \frac{S_1}{6w^0} \left( -\frac{1}{6w^0 |R_0|^{4/3}} - \frac{a_1}{S_1} - \frac{1}{3|R_0|^{5/3}} \left( 1 + \frac{3R_0 R_1}{S_1} \right) \right),$$

так что линейный по  $\lambda$  член отсутствует и, значит,  $(dw/d\lambda)|_{\lambda=0} = 0$ . Таким образом, поведение дисперсионных кривых  $w_1(\lambda)$ ,  $w_2(\lambda)$  определяется коэффициентом при  $\lambda^2$ . Причём его величина для  $w_1(\lambda)$ , в обоих случаях, при достаточно малых  $\varepsilon$ , становится отрицательной за счёт слагаемого, пропорционального величине  $1/\varepsilon$ , и соответствующая дисперсионная кривая получает участок с отрицательной групповой скоростью. При этом третья дисперсионная кривая не претерпевает качественных изменений в зависимости от  $\varepsilon$ , и её асимптотика имеет вид:

$$w_3(\lambda) = w_3^0 + \frac{\varepsilon^2}{6w_3^0 |R_0|^{5/3}} + K\lambda^2 + O(\lambda^4), \quad K = \frac{S_1 + 3R_0 R_1}{9|R_0|^{5/3}} - \frac{a_1}{6}.$$

Отсюда следует, что, как при близких по значению точках зарождения кривых  $w_1^0$  и  $w_2^0$ , так и при их совпадении, групповая скорость волн для третьей дисперсионной кривой при  $\lambda \rightarrow 0$  остаётся равной нулю:  $(dw_3/d\lambda)|_{\lambda=0} = 0$ .

Заметим, что дисперсионное уравнение (5) рассматриваемой модели оболочки исследовалось в [8, 9, 11, 12]. В данной работе проводится его более подробный анализ для случая кратных корней.

### 3. Энергетические потоки в оболочке

Рассмотрим усреднённый поток энергии в оболочке за период колебаний  $T = 2\pi/\omega$ . Тогда интегральный поток энергии  $\Pi$  по оболочке вдоль оси  $z$  (это единственная ненулевая компонента в случае вещественного  $\lambda$ ) может быть записан в виде [9]:

$$\Pi = \frac{\omega}{2} \int_0^{2\pi} \text{Im}(\mathbf{u}^4, \mathbf{f}^4)_{\mathbb{C}^4} R d\varphi = \Pi_t + \Pi_z + \Pi_n + \Pi_p; \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} \Pi_t \\ \Pi_z \\ \Pi_n \\ \Pi_p \end{Bmatrix} = \pi \rho c_s^2 \frac{\omega}{2} \text{Im} \begin{Bmatrix} (-\alpha_1 v_- \tilde{\partial}_z u_t - v_- \tilde{\partial}_\varphi u_z + 2\alpha^2 (1-v) \partial_\varphi \tilde{\partial}_z u_n) \bar{u}_t, \\ (-v \partial_\varphi u_t - \tilde{\partial}_z u_z - v u_n) \bar{u}_z, \\ \bar{u}_n \alpha^2 \left( -2 \partial_\varphi \tilde{\partial}_z u_t + \left( (2-v) \partial_\varphi^2 - v + \tilde{\partial}_z^2 \right) \tilde{\partial}_z u_n \right), \\ \alpha^2 \left( -2v \partial_\varphi u_t + v (\partial_\varphi^2 - 1) u_z + \tilde{\partial}_z^2 u_n \right) (-\tilde{\partial}_z \bar{u}_n) \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{f}^4 = (f_t, f_z, f_n, f_p)^T$ ,  $\mathbf{u}^4 = (u_t, u_z, u_n, u_p)^T$  — векторы обобщённых сил и смещений. Здесь  $u_p = -\tilde{\partial}_z u_n$ , а индексами  $t, z, n, p$  обозначены, соответственно, тангенциальная, продольная, нормальная компоненты и компонента, связанная с поворотом (моментом). В частном случае осесимметричных вращательных движений оболочки ( $m = 0$ ) интегральный поток энергии  $\Pi^0$  в ней состоит из одной компоненты  $\Pi_t^0$  и равен

$$\Pi^0 = \Pi_t^0 = 2\pi \rho c_s^2 \frac{\omega}{2} |A|^2 \beta, \quad \beta = w \sqrt{\alpha_1 v_-}. \quad (13)$$

### 4. Численные результаты

Формулы (11)–(13) используем для получения нормированного потока энергии и его компонент в оболочке:

$$S = \Pi/\Pi^0, \quad S_{t,z,n,m} = \Pi_{t,z,n,m}/\Pi^0. \quad (14)$$

Пронормируем и векторы обобщённых смещений  $\mathbf{u}^4$  и сил  $\mathbf{f}^4$ :  $\mathbf{u}^4 := \mathbf{u}^4 / \|\mathbf{u}^4\|_{\mathbb{C}^4}$ ,  $\mathbf{f}^4 := \mathbf{f}^4 / \|\mathbf{f}^4\|_{\mathbb{C}^4}$ . Расчётные кривые, которые демонстрируются далее, получены при следующих значениях параметров:  $m = 42$  (кроме Рис. 1а, 3а, б, где  $m = 2$ , и Рис. 7а, б); относительная толщина  $h/R = 0,04960$  (кроме Рис. 1б, 7а, б);  $v = 0,28$  на всех рисунках.

Рассмотрим, как влияет относительная толщина оболочки  $h/R$  на выраженность эффекта отрицательной групповой скорости волн. На рисунке 1б дисперсионные кривые 1–5 отвечают значениям  $h/R \approx 0,04955; 0,049575; 0,04960; 0,04965; 0,04977$  соответственно (по оси абсцисс отложена безразмерная частота  $w - w^0$ ). Видно, что наибольшая протяжённость участка дисперсионной кривой с отрицательной групповой скоростью достигается при  $h/R \equiv h^0 = 0,04960$ , как раз в случае кратных корней. При этом кривые при  $h/R \geq h^0$  выходят из точки  $w^0$ , а при  $h/R < h^0$  — из точек  $w < w^0$ . По мере уменьшения параметра  $h/R$  правая дисперсионная кривая как бы «вытесняет» из точки  $w^0$  левую (с участком с отрицательной групповой скоростью), и сама занимает её место (согласно формулам (7)–(10)).

На рисунке 2а представлена зависимость безразмерных волновых чисел  $\lambda := \lambda R$  от безразмерной частоты  $w$  для первой —  $w_1(\lambda)$ , и второй —  $w_2(\lambda)$ , дисперсионных кривых оболочки. Реализован случай кратных корней, когда обе дисперсионные кривые  $a$  и  $c$  выходят из одной точки  $w = 25,20$  (будем называть их левой и правой дисперсионными ветвями). При этом левая дисперсионная ветвь состоит из участков  $a$  и  $b$ , причём участок  $a$  отвечает отрицательной групповой скорости волн. Для этих участков дисперсионных кривых на рисунке 2б приведены интегральные потоки энергии (кривые  $S$ ) в оболочке и их компоненты  $S_t, S_z, S_n, S_p$  как функции частоты (кривые 1, 2, 3 и 4, соответственно).

Графики получены по формулам (14) при  $m = 42$ . Здесь и далее кривым, изображающим потоки энергии, обобщённых сил, смещений и их компонент (Рис. 2б), отвечают участки дисперсионных ветвей рисунка 2а (связь между кривыми устанавливают буквы «а», «б», «с»). Чтобы не загромождать рисунок, характеристики волновых процессов для левой дисперсионной ветви представлены только при частотах меньших частоты возникновения кратных корней.

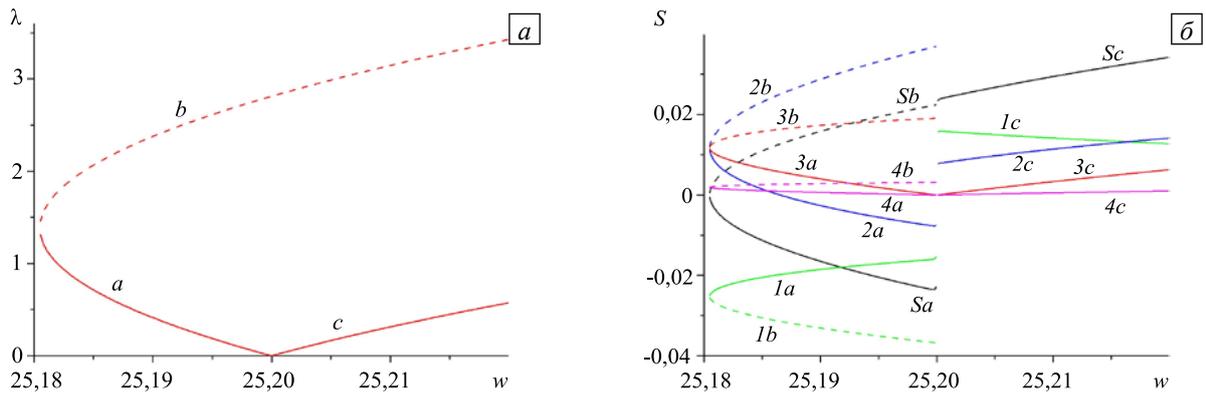


Рис. 2. Дисперсионные кривые (а) и кривые компонент потоков энергии (б) в точке кратных корней для моды  $m = 42$

Рисунок 2а иллюстрирует формулу (6): групповая скорость в окрестности точки кратных корней не равна нулю, одинакова по модулю для обеих дисперсионных ветвей, выходящих из этой точки, и противоположна по знаку. Это хорошо согласуется с тем (см. Рис. 2б), что интегральные потоки энергии в точке кратных корней ненулевые и имеют для левой и правой ветвей противоположный знак (более того, и знаки всех компонент потоков энергии для разных ветвей также противоположны). При этом в регулярном случае интегральные потоки энергии, все их компоненты и групповая скорость стремятся к нулю при  $\lambda \rightarrow 0$  (если только соответствующая кривая не выходит из точки  $(w, \lambda) = (0, 0)$  [9]).

Обращает на себя внимание тот факт, что отрицательность интегрального потока энергии обуславливается отрицательностью продольной и крутильной компонент потока энергии с доминированием последней. Для сравнения рассмотрим регулярный случай, рассчитанный для той же оболочки, но для второй моды ( $m = 2$ ) (рисунки 3а и 3б, на которых изображены компоненты потоков энергии волн из первой и второй дисперсионных кривых, соответственно). Видно, что отрицательные значения вращательной компоненты потока энергии (кривая 1, Рис. 3б) реализуются для волн из второй дисперсионной кривой (при  $w \approx 1,5$ ), а отрицательные значения продольной компоненты (кривая 2, Рис. 3а) — для волн из первой дисперсионной кривой (при  $w \approx 1,0$ ), правда, в значительно меньшей степени. Заметим, что интегральные потоки энергии (кривые  $S$ , Рис. 3а, б) положительны в обоих случаях. При этом для волн из третьей дисперсионной кривой отрицательных компонент потока энергии не наблюдается, а первоначальное доминирование крутильной компоненты потока энергии сменяется доминированием продольной компоненты (Рис. 4а) (такое же поведение компонент для волн из третьей дисперсионной кривой сохраняется и для моды  $m = 42$ ). С ростом номера моды до значения  $m = 42$  и, соответственно, сближением частот зарождения, удельный вес этих отрицательных компонент в интегральном потоке энергии увеличивается, достигая максимального уровня на частоте возникновения кратных корней.

Сравним графики компонент потоков энергии (Рис. 2б) и компонент обобщённых сил  $f_t$  (Рис. 4б),  $f_z$ ,  $f_n$  (Рис. 5а),  $f_p$  (Рис. 5б) и смещений  $u_t$  (Рис. 6а),  $u_z$ ,  $u_n$ ,  $u_p$  (Рис. 6б). На рисунках цифрами 1, 2, 3, 4 обозначены модули крутильной ( $t$ ), продольной ( $z$ ), нормальной ( $n$ ) и моментной (или связанной с поворотом) ( $p$ ) составляющих обобщённых векторов. При этом имеет место равенство их модулей для волны из левой и правой ветвей в точке кратных корней (заметим, что в этой точке вещественные и мнимые части этих компонент, не равные тождественно нулю, имеют для ветвей противоположный знак). Причём у сил в этой точке нулевой является только нормальная компонента, а у смещений —

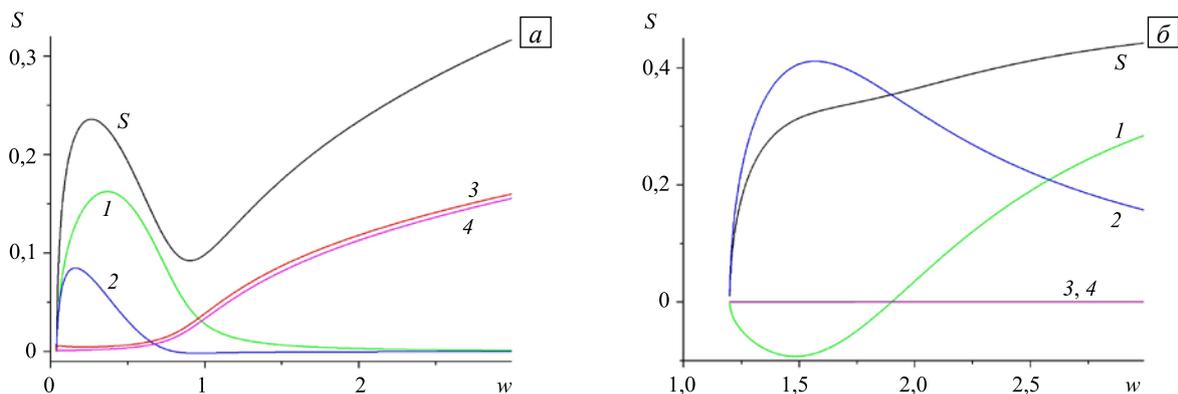


Рис. 3. Компоненты потоков энергии ( $m = 2$ ) для волны из первой (а) и второй (б) дисперсионных веток

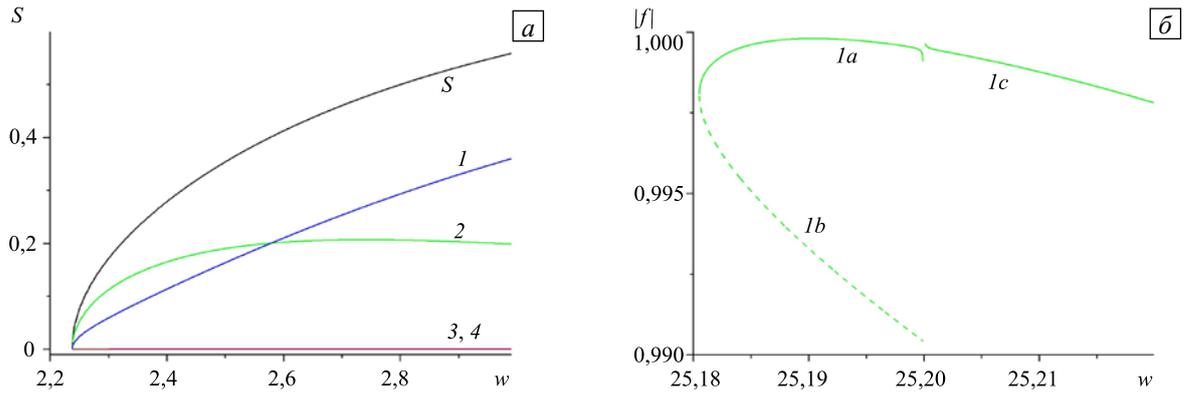


Рис. 4. Компоненты потоков энергии ( $m = 2$ ) для волны из третьей дисперсионной ветки (а) и модуль компоненты  $f_i$  ( $m = 42$ ) (б)

компонента, связанная с поворотом. Небольшие всплески на графиках связаны с неустойчивостью счёта в окрестности этой точки. Невозможно при численном подходе обеспечить абсолютное совпадение двух точек зарождения дисперсионных кривых, поэтому чем ближе к значениям этих точек проводится вычисление, тем «чувствительнее» оболочка к их несовпадению. Если в данном примере силы отражают всё-таки доминирующую роль крутильной компоненты колебаний (Рис. 4б), то у смещений (Рис. 6б) продольная и изгибная компоненты проявляются в равной степени. Эти расхождения связаны с тем, что потоки энергии (Рис. 2б) учитывают не только смещения (на основе которых обычно и устанавливают характер колебаний [7]), но и силы, и сдвиг фазы между ними, что более полно характеризует волновой процесс.

На рисунке 7а рассмотрена зависимость левых дисперсионных кривых, выходящих из точки кратных корней, от номера моды  $m$ . Кривым 1–5 отвечают моды  $m = 42; 63; 84; 105; 126$  соответственно (которые соотносятся с относительными толщинами  $h/R \approx 0,0496; 0,0330; 0,0248; 0,0198; 0,0165$ ). Каждая дисперсионная кривая выходит из своей точки зарождения  $w = m\sqrt{v_-}$ , но, для удобства, на рисунках все кривые приведены к точке с нулевым значением координаты  $w - w^0$ . Наиболее ярко эффект с отрицательной

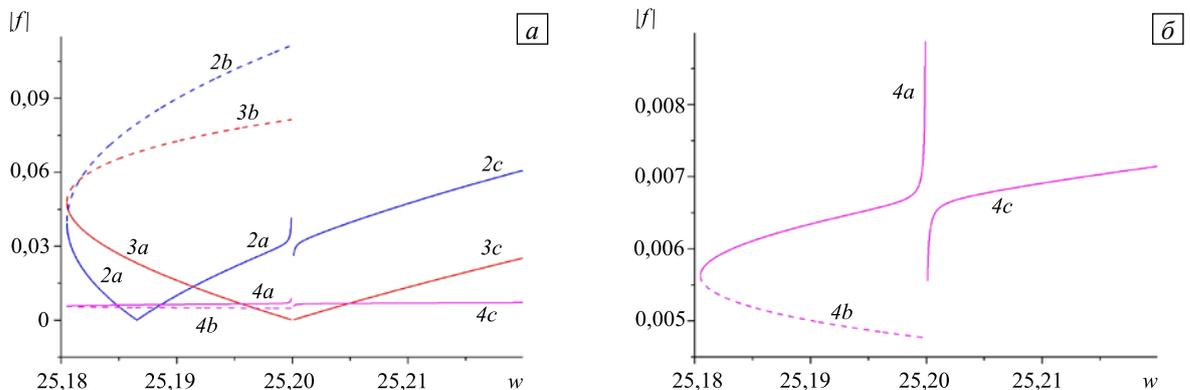


Рис. 5. Модули компонент  $f_z$ ,  $f_n$ ,  $f_p$  (кривые 2, 3, 4 соответственно) (а) и  $f_p$  (б) для моды колебаний оболочки  $m = 42$

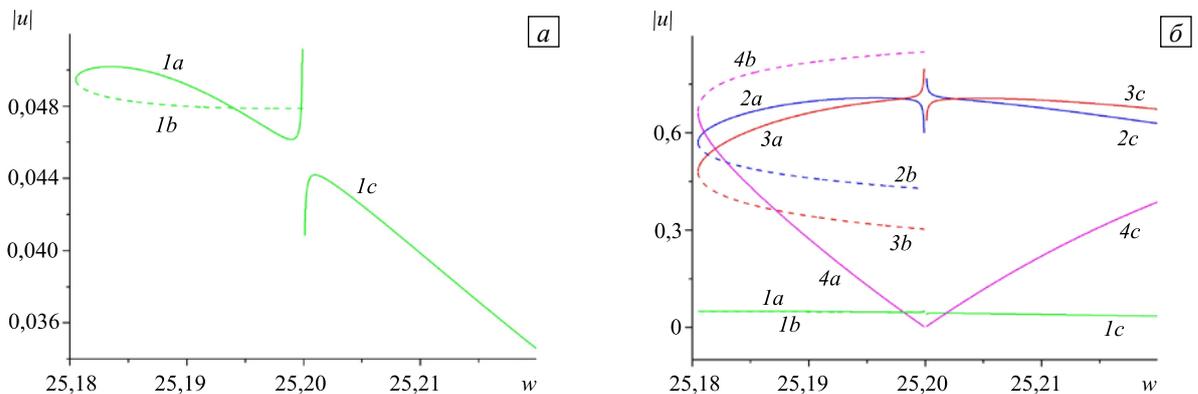
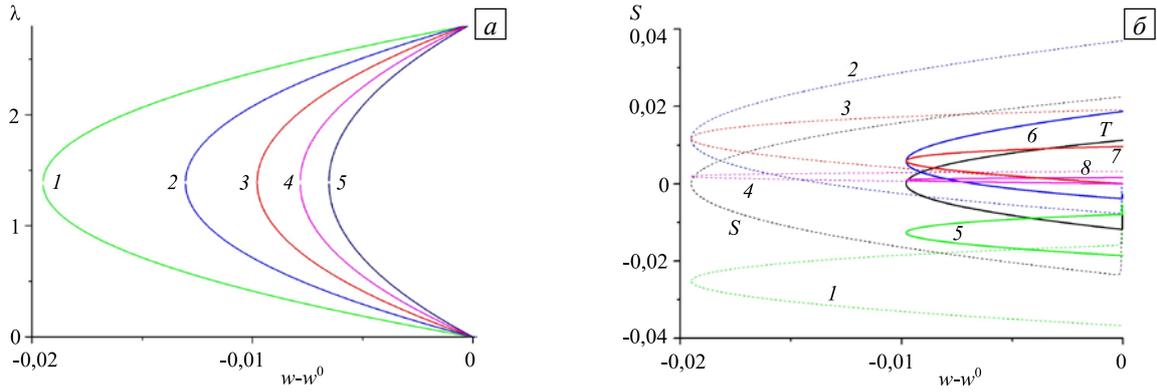


Рис. 6. Модули компонент  $u_i$  (а) и  $u_z$ ,  $u_n$ ,  $u_p$  (кривые 2, 3, 4 соответственно) (б) для моды колебаний оболочки  $m = 42$



**Рис. 7.** Левые дисперсионные кривые при различном номере моды колебаний  $m$  : 42 (кривая 1), 63 (2), 84 (3), 105 (4), 126 (5) (а); кривые компонент потока энергии ( $S_i$  (кривая 1),  $S_z$  (2),  $S_n$  (3),  $S_p$  (4)) и интегрального потока энергии (кривая  $S$ ) для  $m = 42$  (штриховые линии), кривые компонент потока энергии ( $S_i$  (5),  $S_z$  (6),  $S_n$  (7),  $S_p$  (8)) и интегрального потока энергии (кривая  $T$ ) для  $m = 84$  (сплошные линии) (б)

групповой скоростью выражен для моды с наименьшим номером:  $m = 42$ . Здесь реализуется случай наибольших отрицательных групповых скоростей в самом широком диапазоне частот.

Теперь очертим границы применимости полученных результатов с точки зрения длин волн, получаемых в результате вычислений. Выделим в оболочке два волновых процесса: I — имеется окружная волна длиной  $s = 2\pi R/m$ , зависящая от угла  $\varphi$ ; II — волна вдоль оси  $z$ , характеризуемая длиной  $l = 2\pi/\lambda$ . Грубая оценка применимости теории оболочек Кирхгофа–Лява определяется соотношениями  $s/h, l/h > 1$ , то есть длина волны должна быть больше толщины оболочки. Следовательно,  $m, \lambda < 2\pi R/h$  или  $m\alpha, \lambda\alpha < 2\pi/\sqrt{12} \approx 1,81$ .

Условие возникновения кратных корней (согласно (5)) определяется уравнением:

$$\det \begin{pmatrix} w^2 + \hat{L}_{11} & \hat{L}_{13} \\ \hat{L}_{31} & w^2 + \hat{L}_{33} \end{pmatrix} \Big|_{\lambda=0, w=w^0} = \det \begin{pmatrix} m^2 v_- - \alpha_1 m & -m(1 + 2\alpha^2[1 + m^2]) \\ -m(1 + 2\alpha^2[1 + m^2]) & m^2 v_- - 1 - \alpha^2[1 + m^2]^2 \end{pmatrix} = 0, \quad (15)$$

которое перепишем в виде:

$$(m^2 v_- - \alpha_1 m^2) \left( v_- - \frac{1}{m^2} - (m\alpha)^2 \left[ 1 + \frac{1}{m^2} \right]^2 \right) + \left( 1 + 2(m\alpha)^2 \left[ 1 + \frac{1}{m^2} \right] \right)^2 = 0.$$

Упростим его в предположении больших  $m$  ( $m \gg 1$ ). При этом учтём, что, во-первых, условная граница применимости теории тонких оболочек — это  $h/R < 0,05$  (то есть  $\alpha < 0,015$ ) [16], а во-вторых, что  $m\alpha < 2$  и  $v_- = (1 - \nu)/2 = 0,36$  (то есть  $v_-$  есть величина порядка единицы). В результате придём к уравнению:

$$v_- - (m\alpha)^2 + O\left(\frac{1}{m^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad m\alpha = \sqrt{v_-} + O\left(\frac{1}{m^2}\right) = 0,6 + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \quad (16)$$

(вычисления показывают, что даже при отбрасывании членов порядка  $1/m^2$  это уравнение выполняется в рассматриваемом диапазоне физических параметров задачи с точностью до 0,3%, причём с ростом  $m$  точность только растёт). Таким образом, имеем:  $s/h = (2\pi/\sqrt{12})(1/\sqrt{v_-}) \approx 3,02$ . При этом, как показывают вычисления (Рис. 7а), участок с отрицательной групповой скоростью лежит в пределах  $0 \leq \lambda R \leq 1,4$  (и его протяжённость практически не зависит от номера моды), а значит  $l/R \geq 4$ . Таким образом, в грубом приближении можно говорить, что режим с отрицательной групповой скоростью реализуется в том случае, когда длина окружной волны в три раза больше толщины оболочки, а длина волны вдоль оси оболочки не меньше четырёх радиусов. Заметим, что из приведённых оценок следует, что  $m, \lambda < 2\pi R/h < 126$ ;  $m \geq 42$ .

Наибольший диапазон частот  $\Delta w$ , в котором наблюдается отрицательная групповая скорость, можно оценить из асимптотики (6) и из условия зануления потока энергии при  $\lambda R \approx 1,4$ , что в результате даёт приближённую формулу  $\Delta w \approx 0,8193/m$ . Для модуля самой групповой скорости при  $\lambda \rightarrow 0$  приближённая

формула будет иметь вид  $(dw/d\lambda)|_{\lambda=0} \approx 1,166/m$  в точке кратных корней, где достигаются максимальные отрицательные групповые скорости при заданной моде  $m$ . Обе эти формулы дают относительную погрешность 3,5% при изменении коэффициента Пуассона в диапазоне  $0,25 \leq \nu \leq 0,33$ , что отвечает материалам типа чугуна, стали, алюминиевых сплавов.

То, что режим колебаний оболочки при малых  $\lambda$  определяется не по отдельности параметрами  $m$  и  $\alpha$ , а соотношением длины окружной волны и толщины оболочки, указывает, что оболочки с различными  $m$  будут подобными в некотором смысле. На рисунке 7б приведены компоненты потоков энергии  $S_t$ ,  $S_z$ ,  $S_n$ ,  $S_p$  как функции частоты  $w - w^0$  для мод с номером  $m = 42$  (штриховые кривые 1, 2, 3, 4) и  $m = 84$  (сплошные кривые 5, 6, 7, 8), а также интегральные потоки энергии (кривые  $S$  и  $T$  для мод с номером  $m = 42$  и  $m = 84$  соответственно). Видно, что относительный вклад отдельных компонент в состав потока энергии для этих номеров мод одинаков. При этом сами вклады для  $m = 84$  оказываются в два раза меньшими, чем для  $m = 42$ , что согласуется с тем, что групповая скорость также оказывается в два раза меньшей.

Наглядная физическая интерпретация условий возникновения участка дисперсионной кривой с отрицательной групповой скоростью состоит в следующем. Каждой дисперсионной кривой отвечает некий свой, «самобытный», волновой процесс. Если же точки зарождения двух дисперсионных кривых совпадают, то в этой общей точке формируются два волновых процесса, «конкурирующих» между собой за перенос энергии. Но в момент их зарождения пропускная способность (по энергии) оболочки как волновода, по-видимому, ещё мала, поэтому у соответствующих интегральных потоков энергии единственный способ реализоваться, «сохранив самобытность», — это сразу с ненулевой скоростью начать распространяться в противоположные стороны, энергетически компенсируя друг друга. Система старается минимизировать внешнее воздействие на неё в соответствии с общим физическим принципом. Внутри каждого интегрального потока это достигается его перераспределением по различным каналам (компонентам потока), отвечающим вращательным, продольным и изгибным движениям (фактически по степеням свободы). Тем самым оболочка «разгружается» от воздействия на неё волны. Дополнительным ресурсом является возможность некоторых каналов осуществлять распространение потока энергии, противоположное направлению распространения волны. Если же точки зарождения не совпадают, но близки, то взаимное влияние волновых процессов и соответствующих каналов распространения энергии, отвечающих разным дисперсионным кривым, сохраняется, порождая на одной из них участок с отрицательной групповой скоростью. Однако при этом в самих точках зарождения наблюдается «плавный старт» (нулевая групповая скорость) (Рис. 1б).

## 5. Заключение

Существуют различные модели оболочек, в разной степени приближающие реальные объекты. Оценки параметров, определяющих область их применимости, к сожалению, в значительной степени являются условными, и возможность использования той или иной модели зависит от конкретных условий задачи, соответствия полученных результатов данным экспериментов и данным, установленным на других моделях. Тем не менее, качественный анализ возникающих эффектов даже в достаточно простых моделях оболочек, как, например, в рассмотренной здесь, позволяет прогнозировать поведение и более сложных систем, в том числе оболочки с жидкостью внутри неё.

Так, проведённые асимптотические и численные исследования показывают, что наиболее ярко эффект с отрицательной групповой скоростью выражен для точки кратных корней дисперсионного уравнения, вне её он достаточно быстро пропадает (Рис. 1б). Характерной особенностью волн с отрицательной групповой скоростью в случае кратных корней является их быстрое «включение» в процесс переноса энергии на длинных волнах (групповая скорость не равна нулю в момент зарождения соответствующей дисперсионной кривой).

Анализ потоков энергии в оболочке позволяют оценивать различные компоненты вибрационного и энергетического полей и их взаимное влияние. Так, например, показано, что отрицательная групповая скорость связана с вращательной компонентой движения оболочки. Можно ожидать, что, регулируя жесткость оболочки к определённым деформациям, можно ослаблять или усиливать волну с отрицательной групповой скоростью.

Отрицательная групповая скорость в системе оболочка – жидкость может представлять интерес, в частности, для соответствующей неоднородной задачи, когда источник колебаний работает на частотах, близких к  $\tilde{w}$  — частоте зарождения дисперсионной кривой с участком отрицательной групповой скорости. В этом случае коэффициент возбуждения обратной волны может быть значительным, а небольшое изменение частоты источника в окрестности  $\tilde{w}$  может вести к существенному изменению режима колебаний системы, что может влиять, например, на прочностные характеристики оболочки.

## Литература

1. Fuller C.R., Fahy F.J. Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid // J. Sound Vib. – 1982. – Vol. 81, no. 4. – P. 501-518. DOI

2. Pavić G. Vibrational energy flow in elastic circular cylindrical shells // *J. Sound Vib.* – 1990. – Vol. 142, no. 2. – P. 293-310. DOI
3. Pavić G. Vibroacoustical energy flow through straight pipes // *J. Sound Vib.* – 1992. – Vol. 154, no. 3. – P. 411-429. DOI
4. Feng L. Acoustic properties of fluid-filled elastic pipes // *J. Sound Vib.* – 1994. – Vol. 176, no. 3. – P. 399-413. DOI
5. Филиппенко Г.В. Анализ потоков энергии в бесконечной цилиндрической оболочке контактирующей со сжимаемой жидкостью // *Материалы XXVII сессии РАО, Санкт-Петербург, 16-18 апреля 2014 г.* – 8 с. (URL: <http://rao.akin.ru/Rao/sess27/филиппенко.pdf>).
6. Тер-Акопянц Г.Л. Осесимметричные волновые процессы в цилиндрических оболочках, заполненных жидкостью // *Естественные и технические науки.* – 2015. – №7(85). – С. 10-14.
7. Тер-Акопянц Г.Л. Дисперсионные кривые и модальные коэффициенты при распространении волн в оболочке с жидкостью // *Естественные и технические науки.* – 2015. – № 6(84). – С. 77-81.
8. Филиппенко Г.В. Энергетические аспекты осесимметричного распространения волн в бесконечной цилиндрической оболочке, полностью погруженной в жидкость // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 187-197. DOI
9. Филиппенко Г.В. Энергетические аспекты распространения волн в бесконечной цилиндрической оболочке, полностью погруженной в жидкость // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 295-305. DOI
10. Елисеев В.В. *Механика упругих тел.* – СПб.: Изд.-во СПбГПУ, 2003. – 336 с.
11. Зиновьева Т.В. Дисперсия волн в цилиндрической оболочке // *Научно-технические ведомости СПбГПУ.* – 2007. – Т. 52-1. – С. 53-58.
12. Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. Двумерные (оболочечные) и трехмерная модели для упругого тонкостенного цилиндра // *Вестник ПНИПУ. Механика.* – 2014. – № 3. – С. 50-70. DOI
13. Вешев В.А., Коузов Д.П., Миролюбова Н.А. Поток энергии и дисперсия нормальных волн изгибного типа в балке крестообразного профиля // *Акустический журнал.* – 1999. – Т. 45, № 3. – С. 331-336.
14. Sorokin S.V., Nielsen J.B., Olhoff N. Green's matrix and the boundaryintegral equation method for the analysis of vibration and energy flow in cylindrical shells with and without internal fluid loading // *J. Sound Vib.* – 2004. – Vol. 271, no. 3-5. – P. 815-847. DOI
15. Коузов Д.П., Миролюбова Н.А. Локальные потоки энергии вынужденных колебаний тонкой упругой полосы // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 397-404. DOI
16. Новожиллов В.В. *Теория тонких оболочек.* – Л.: Судпромгиз, 1951. – 344 с.

## References

1. Fuller C.R., Fahy F.J. Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid. *J. Sound Vib.*, 1982, vol. 81, no. 4, pp. 501-518. DOI
2. Pavić G. Vibrational energy flow in elastic circular cylindrical shells. *J. Sound Vib.*, 1990, vol. 142, no. 2, pp. 293-310. DOI
3. Pavić G. Vibroacoustical energy flow through straight pipes. *J. Sound Vib.*, 1992, vol. 154, no. 3, pp. 411-429. DOI
4. Feng L. Acoustic properties of fluid-filled elastic pipes. *J. Sound Vib.*, 1994, vol. 176, no. 3, pp. 399-413. DOI
5. Filippenko G.V. Analiz potokov energii v beskonechnoj tsilindricheskoj obolochke kontaktiruyushchej so szhimaemoj zhidkost'yu [Analyzing of energy fluxes in the infinite cylindrical shell contacting with compressible liquid]. *Proc. of the Conference "XXVII session of Russian Acoustical Society", 16-18 April 2014, St.-Petersburg, Russia, 2014, CD format, 8 p.* (URL: <http://rao.akin.ru/Rao/sess27/филиппенко.pdf>).
6. Ter-Akopyants G.L. Osessimmetrichnye volnovye protsessy v tsilindricheskikh obolochkakh, zapolnennykh zhidkost'yu [Axisymmetrical wave processes in cylindrical shells filled with fluid]. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Natural and technical sciences*, 2015, no. 7(85), pp.10-14.
7. Ter-Akopyants G.L. Dispersionnye krivye i modal'nye koeffitsienty pri rasprostranenii voln v obolochke s zhidkost'yu [Dispersion curves and modal patterns of the wave propagation in elastic cylindrical shell filled with fluid]. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Natural and technical sciences*, 2015, no. 6(84), pp. 77-81.
8. Filippenko G.V. Energy aspects of axisymmetric wave propagation in an infinite cylindrical shell fully submerged in liquid. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 187-197. DOI
9. Filippenko G.V. Energy aspects of wave propagation in an infinite cylindrical shell fully submerged in liquid. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 295-305. DOI
10. Yeliseev V.V. *Mekhanika uprugikh tel* [Mechanics of elastic bodies]. St.-Petersburg State Polytechnical University, 2003. 336 p.
11. Zinovieva T.V. Dispersiya voln v tsilindricheskoj obolochke [Wave dispersion in cylindrical shell], *St. Petersburg State Polytechnical University Journal*, 2007, no. 52-1, pp. 53-58.
12. Yeliseyev V.V., Zinovieva T.V. Two-dimensional (shell-type) and three-dimensional models for elastic thin-walled cylinder. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 3, pp. 50-70. DOI
13. Veshev V.A., Kouzov D.P., Mirolyubova N.A. Energy fluxes and dispersion of flexural normal waves in a cross-shaped beam. *Acoust. Phys.*, 1999, vol. 45, no. 3, pp. 331-336.
14. Sorokin S.V., Nielsen J.B., Olhoff N. Green's matrix and the boundaryintegral equation method for the analysis of vibration and energy flow in cylindrical shells with and without internal fluid loading. *J. Sound Vib.*, 2004, vol. 271, no. 3-5, pp. 815-847. DOI
15. Kouzov D.P., Mirolyubova N.A. Local energy fluxes of forced vibrations of a thin elastic band. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 397-404. DOI
16. *Thin shell theory*, ed. by V.V. Novozhilov, J.M.R. Radok. Springer Netherlads, 1964. 417 p.

Поступила в редакцию 12.12.2016; опубликована в электронном виде 30.06.2017

## Сведения об авторе

Филиппенко Георгий Викторович, кфмн, снс, Институт проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН), 199178, Санкт-Петербург, Васильевский остров, Большой пр., д. 61; e-mail: g.filippenko@spbu.ru