

DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.15

УДК 532.516:539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СООСНЫХ ОБОЛОЧКАХ, ЗАПОЛНЕННЫХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ю.А. Блинков¹, А.В. Месянжин², Л.И. Могилевич³¹*Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Российская Федерация*²*ОАО «Конструкторское бюро промышленной автоматики», Саратов, Российская Федерация*³*Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов, Российская Федерация*

В современной волновой динамике, с одной стороны, известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость. Модели получены для связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, в итоге сводящимися к системам обобщенных уравнений Кортевега де Вриза (КдВ). С другой стороны, методом возмущений по малому параметру задачи построены модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках при наличии несжимаемой вязкой жидкости между ними. В данной работе впервые обсуждается модель связанной задачи гидроупругости, представляемая уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями, применительно к исследованию волновых явлений в двух физически и геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках типа Кирхгофа–Лява, содержащих вязкую несжимаемую жидкость как между ними, так и во внутренней полости. Для решения отвечающих постановке задачи систем обобщенных уравнений КдВ берётся базис Грёбнера и разностные схемы типа Кранка–Николсон. Генерация разностных схем осуществляется с помощью базовых интегральных соотношений, которые аппроксимируют исходную систему уравнений. Применение техники базисов Грёбнера позволяет создать схемы, в результате использования которых путём эквивалентных преобразований можно найти дискретные аналоги законов сохранения, согласующихся с исходными дифференциальными уравнениями. На основе предлагаемого вычислительного алгоритма разработан комплекс программ, дающий возможность установить численное решение задачи Коши при точном решении системы уравнений динамики соосных оболочек как начальном условии.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, упругие цилиндрические оболочки

NONLINEAR WAVE PROPAGATION IN COAXIAL SHELLS FILLED WITH VISCOUS LIQUID

Yu.A. Blinkov¹, A.V. Mesyanzhin² and L.I. Mogilevich³¹*Saratov State University, Saratov, Russian Federation*²*Industrial Automatics Design Bureau JSC, Saratov, Russian Federation*³*Yuri Gagarin Saratov State Technical University, Saratov, Russian Federation*

The investigation of deformation wave behavior in elastic shells is one of the significant trends in contemporary wave dynamics. There are wave motion mathematical models of infinitely long geometrically and physically nonlinear shells with viscous incompressible liquid inside. They are based on the coupled hydroelastic problems, described by the equations of dynamics of shells and the equations of viscous incompressible fluid in the form of generalized KdV equations. Mathematical models of wave processes in infinitely long geometrically nonlinear coaxial cylindrical shells are obtained by means of the small parameter perturbation method. The problems differ from the already known ones by the consideration of viscous incompressible liquid. The system of generalized KdV equations is obtained on the basis of coupled hydroelastic problems, described by the equations of dynamics of shells and fluid equations with corresponding boundary conditions. The article deals with investigating the model describing wave phenomena in two geometrically and physically nonlinear elastic coaxial cylindrical Kirchhoff–Love type shells, containing viscous incompressible liquid both between and inside them. The difference Crank–Nicholson type schemes aimed at investigating equations systems with the consideration of liquid impact are obtained with the help of Gröbner basis construction. To generate these difference schemes, basic integral difference correlations, approximating the initial equation system, are used. The use of Gröbner basis techniques makes it possible to generate the schemes allowing one to obtain discrete preservation law analogues to initial differential equations. To do this, equivalent transformations were made. On the basis of computational algorithm the program complex allowing one to construct graphs and to obtain Cauchy problem numerical solution was developed using the exact solutions of the system of coaxial shell dynamics equations as an initial condition.

Key words: nonlinear waves, viscous incompressible liquid, elastic cylinder shell

1. Постановка задачи

В современной волновой динамике одним из важных направлений является изучение поведения волн деформаций в упругих оболочках. Так, в абсолютно жесткой трубе с круговым сечением ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонического поведения по времени перепада давления анализировалось в [1], а при пульсирующем движении вязкой жидкости в соосных упругих оболочках конечной длины — в [2, 3]. В условиях вибрации взаимодействия вязкой несжимаемой жидкости с упругими оболочками исследовалось в [4–7], а с учётом вращения жидкости — в [8–10]. Проблемы распространения волн в упругих и вязкоупругих тонкостенных конструкциях, в том числе в бесконечно длинных цилиндрических оболочках без взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью, рассматривались в [11–14] с позиции теории солитонов.

Известны математические модели, учитывающие влияние вязкой несжимаемой жидкости на волновые процессы в бесконечно длинных геометрически и физически нелинейных оболочках [15–17]. При этом найдены эффекты влияния вязкой несжимаемой жидкости на поведение волны деформации в оболочке в зависимости от коэффициента Пуассона материала оболочки. В частности, при наличии жидкости в оболочке из неорганических материалов (различные трубопроводы в технологических сооружениях) выявлен экспоненциальный рост амплитуды волны. В случае органического материала (кровеносные сосуды) волна в жидкости быстро затухает.

Методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках [18, 19], которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости, находящейся между ними, с соответствующими краевыми условиями, в виде системы обобщенных уравнений Кортевега де Вриза (КдВ). Показано, что волна деформаций во внешней оболочке приводит во внутренней оболочке к возникновению волны деформаций, которой в начальный момент времени не было. Происходит «перекачка энергии» (через слой жидкости) от внешней оболочки к внутренней, в результате этого во внешней оболочке имеет место немонотонное падение амплитуды волны, и, как следствие, немонотонное снижение скорости её распространения. При этом во внутренней оболочке амплитуда немонотонно увеличивается. С течением времени значения скоростей и амплитуд волн в оболочках выравниваются.

Решение поставленной в работе задачи для геометрически и физически нелинейных оболочек представляется актуальным и сложным и имеет важное значение для акустической диагностики и неразрушающего контроля материалов. Во многом интерес к подобным задачам инициирован необходимостью анализа упругих и динамических свойств нанообъектов, в частности, карбоновых нанотрубок.

Рассмотрим две соосные бесконечно длинные упругие оболочки (Рис. 1), между которыми находится вязкая несжимаемая жидкость. Ширина щели, занимаемой жидкостью — δ , радиусы срединных поверхностей оболочек — $R^{(i)}$, их толщины $h_0^{(i)}$ (индекс $i=1$ относится к внешней оболочке,

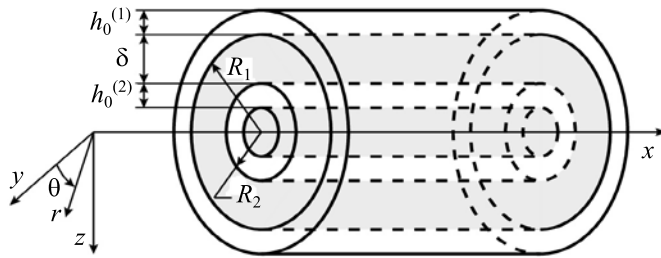


Рис. 1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки

индекс $i=2$ — к внутренней); $R_1 = R^{(1)} - h_0^{(1)}/2$ — внутренний радиус внешней оболочки; $R_2 = R^{(2)} + h_0^{(2)}/2$ — внешний радиус внутренней оболочки; $R_3 = R^{(2)} - h_0^{(2)}/2$ — внутренний радиус внутренней оболочки.

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрических координатах (r, θ, x) при осесимметричном течении имеют вид [21, 22]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

При этом t — время; V_x, V_r — осевая и радиальная компоненты вектора скорости жидкости; ρ — плотность жидкости; ν — кинематический коэффициент вязкости; p — давление в жидкости. Ось x совпадает с осью симметрии оболочек.

На границах оболочек и жидкости (Рис. 1) при $r = R_i - W^{(i)}$ ($i=1, 2$) выполняются условия прилипания жидкости [22]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} &= V_x + U^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial r}, \\ -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} &= V_r + U^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial r}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь: $U^{(i)}$ — упругое продольное перемещение i -й оболочки по оси x ; $W^{(i)}$ — прогиб оболочки (положительный к центру кривизны).

Запишем уравнения движения i -й цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Киргофа–Лява в случае больших деформаций, считая материал оболочки нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций e_i [20]:

$$\sigma_i = E^{(i)} e_i \mp m^{(i)} e_i^3,$$

где $E^{(i)}$ — модуль Юнга, $m^{(i)}$ — константа материала, которая определяется из опытов на сжатие или растяжение [23, 24] (далее полагается, что оболочки изготовлены из одного и того же материала):

$$\begin{aligned} & \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \left\langle \left[U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \times \right. \\ & \left. \times \left\{ 1 \mp \frac{4m}{3E} \left[\left(U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + U_x^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right\} \right\rangle_x - \rho_0 h_0^{(i)} U_{tt}^{(i)} = -q_x^{(i)} - \tilde{q}_x^{(i)}(i-1), \\ & \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} (W_{xx}^{(i)} + U_x^{(i)} W_{xx}^{(i)})_{xx} - \left\{ W_x^{(i)} \left(U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left[1 \mp \frac{4m}{3E} \left(\left(U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + U_x^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right] \right\} - \frac{1}{R} \left(\mu_0 U_x^{(i)} + \frac{1}{2} \mu_0 U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} \mu_0 W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \mu_0 W_{xx}^{(i)2} - \frac{W^{(i)}}{R} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left[1 \pm \frac{4m}{3E} \left(\left(U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + U_x^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right] \right\rangle_x + \rho_0 h_0^{(i)} W_{tt}^{(i)} = (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1), \end{aligned} \quad (3)$$

где ρ_0 , μ_0 — плотность материала оболочки и коэффициент Пуассона; q_x^i , q_n — напряжения, действующие со стороны жидкости, которая находится между оболочками; \tilde{q}_x , \tilde{q}_n — напряжения со стороны жидкости, заполняющей внутреннюю оболочку. Нижние индексы у перемещений обозначают соответствующие частные производные.

Напряжения, создаваемые наружным слоем жидкости, определяются по формулам:

$$\begin{aligned} q_n &= \left[P_{rr} \cos \left(-\bar{n}^{(i)}, \hat{\bar{n}}_r \right) + P_{rx} \cos \left(-\bar{n}^{(i)}, \hat{\bar{i}} \right) \right]_{r=R_i-W^{(i)}}, \\ q_x &= \left[P_{rx} \cos \left(-\bar{n}^{(i)}, \hat{\bar{n}}_r \right) + P_{xx} \cos \left(-\bar{n}^{(i)}, \hat{\bar{i}} \right) \right]_{r=R_i-W^{(i)}}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$P_{rr} = -p + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad P_{rx} = \rho v \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right), \quad P_{xx} = -p + 2\rho v \frac{\partial V_x}{\partial x}.$$

В подходе Эйлера имеем

$$\begin{aligned} \cos \left(-\bar{n}^{(i)}, \hat{\bar{n}}_r \right) &= \frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|}, & \cos \left(-\bar{n}^{(i)}, \hat{\bar{i}} \right) &= -\frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}, \\ \cos \left(-\bar{n}, \hat{\bar{n}}_r \right) &= \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2}}, & \cos \left(-\bar{n}, \hat{\bar{i}} \right) &= -\frac{\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}}{\left(1 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2}}, \\ |\bar{N}| &= (R_i - W^{(i)}) \left(1 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь: \bar{n} — нормаль к срединной поверхности i -й оболочки; \bar{n}_r , \bar{i} — орты базиса в цилиндрической системе координат, центр которой расположен на оси симметрии оболочек. Если отнести напряжения

к невозмущенной (внешней) поверхности наружной оболочки, то можно считать, что $\bar{n} = \bar{n}_r$ и $\cos\left(-\widehat{\bar{n}}, \widehat{\bar{n}}_r\right) = 1$.

Напряжения \tilde{q}_x , \tilde{q}_n , возникающие от действия жидкости, которая находится во внутренней оболочке, определяются по тем же формулам (4), (5), но в них следует учитывать, что $\tilde{\rho}$ — плотность заполняющей внутреннюю оболочку жидкости, а $\tilde{\nu}$ — её коэффициент кинематической вязкости.

2. Вывод уравнений динамики при наличии жидкости между оболочками и во внутренней оболочке

Принимая длину волны l за характерный размер и обозначая амплитуду продольного перемещения как u_m и прогиб как w_m , переходим к безразмерным переменным:

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}}.$$

Здесь c_0 — скорость звука в оболочке. Полагаем:

$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{R^{(i)}}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \quad \frac{w_m}{R^{(i)}} = O(\varepsilon).$$

В этих переменных уравнения динамики оболочек (3) принимают вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l} \frac{E h_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \left\langle \left[\frac{u_m}{l} u_{1x^*}^{(i)} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 u_{1x^*}^{(i)2} + \frac{1}{2} \left(\frac{w_m}{l} \right)^2 u_{3x^*}^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24l^2} \left(\frac{w_m}{l} \right)^2 u_{3x^*x^*}^{(i)2} - \mu_0 \frac{w_m}{R^{(i)}} u_3^{(i)} \right] \left\{ 1 \mp \frac{4m}{3E} \left[\left(\frac{u_m}{l} \right)^2 u_{1x^*}^{(i)2} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{u_m}{l} \frac{w_m}{R^{(i)}} u_{1x^*}^{(i)} u_3^{(i)} + \left(\frac{w_m}{R^{(i)}} \right)^2 u_3^{(i)2} \right] \right\} \right\rangle_{x^*} - \rho_0 h_0^{(i)} \frac{c_0^2}{l^2} u_m u_{1t^*}^{(i)} = -q_x^{(i)} - \tilde{q}_x(i-1), \\ & \frac{E h_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12l^2} \left(\frac{w_m}{l^2} u_{3x^*x^*}^{(i)} + \frac{w_m u_m}{l^3} u_{3x^*x^*}^{(i)} u_{1x^*}^{(i)} \right) - \frac{1}{l} \frac{w_m u^{(i)}}{l} \left[\frac{u_m}{l} u_{1x^*}^{(i)} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 u_{1x^*}^{(i)2} + \frac{1}{2} \left(\frac{w_m}{l} \right)^2 u_{3x^*}^{(i)2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{h_0^{(i)2}}{24l^2} \left(\frac{w_m}{l} \right)^2 u_{3x^*x^*}^{(i)2} - \mu_0 \frac{w_m}{R^{(i)}} u_3^{(i)} \right] \left[1 \mp \frac{4m}{3E} \left[\left(\frac{u_m}{l} u_{1x^*}^{(i)} - \frac{w_m}{R^{(i)}} u_3^{(i)} \right)^2 + \frac{w_m u_m}{l R^{(i)}} u_3^{(i)} u_{1x^*}^{(i)} \right] \right] \right\rangle_{x^*} - \\ & \left. - \frac{1}{R^{(i)}} \left\{ \left[\mu_0 \frac{u_m}{l} u_{1x^*}^{(i)} + \mu_0 \frac{1}{2} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 u_{1x^*}^{(i)2} + \mu_0 \frac{1}{2} \left(\frac{w_m}{l} \right)^2 u_{3x^*}^{(i)2} + \mu_0 \frac{h_0^{(i)2}}{24l^2} \left(\frac{w_m}{l} \right)^2 u_{3x^*x^*}^{(i)2} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{w_m}{R^{(i)}} u_3^{(i)2} \right] \left[1 \pm \frac{4m}{3E} \left[\left(\frac{u_m}{l} u_{1x^*}^{(i)} - \frac{w_m}{R^{(i)}} u_3^{(i)} \right)^2 + \frac{w_m u_m}{l R^{(i)}} u_3^{(i)} u_{1x^*}^{(i)} \right] \right] \right\} \right\rangle_{x^*} + w_m \rho_0 h_0^{(i)} \frac{c_0^2}{l^2} u_{3t^*}^{(i)} = q_n^{(i)} (-1)^{i-1} + \tilde{q}_n(i-1). \end{aligned} \quad (6)$$

Введём полухарактеристические (бегущие) координаты и растянутое время:

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*,$$

где c — неизвестная безразмерная скорость волны. Тогда, разделив обе части первого из уравнений (6)

на $\frac{1}{l} \frac{E h_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} = \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \frac{1}{l}$, получим:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{u_m}{l} \left[u_{1\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_3^{(i)} + \frac{1}{2} \frac{u_m}{l} u_{1\xi}^{(i)2} + \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi}^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{12l^2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{\xi\xi}^{(i)2} \right] \left\{ 1 \mp \right. \right. \\ & \left. \left. \mp \frac{4m}{3E} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 \left(u_{1\xi}^{(i)2} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{1\xi}^{(i)} u_3^{(i)} + \frac{w_m^2 l^2}{u_m^2 R^{(i)2}} u_3^{(i)2} \right) \right\} \right\rangle_{\xi} - \frac{u_m}{l} \left(c^2 u_{1\xi\xi}^{(i)} - 2\varepsilon c u_{1\xi\tau}^{(i)} + \varepsilon^2 u_{1\tau\tau}^{(i)} \right) = -\frac{l(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}. \end{aligned}$$

Разделив обе части второго уравнения (6) на $\frac{1}{R^{(i)}} \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} = \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{R^{(i)}}$, найдём:

$$\begin{aligned} & \frac{u_m}{l} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12l^2} \left[\frac{w_m R^{(i)}}{u_m l} u_{3\xi\xi}^{(i)} \left(1 + \frac{u_m}{l} u_{1\xi}^{(i)} \right) \right]_{\xi\xi} + \left[-\mu_0 u_{1\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_3^{(i)} - \right. \right. \\ & \left. \left. -\mu_0 \frac{1}{2} \frac{u_m}{l} u_{1\xi}^{(i)2} - \mu_0 \frac{1}{2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi}^{(i)2} - \mu_0 \frac{1}{2} \frac{h_0^{(i)2}}{24l^2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi\xi}^{(i)2} \right] \left\{ 1 \pm \frac{4}{3} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 \frac{m}{E} \left(u_{1\xi}^{(i)2} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{1\xi}^{(i)} u_3^{(i)} + \frac{w_m^2 l^2}{u_m^2 R^{(i)2}} u_3^{(i)} \right) \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{R^{(i)}}{l} \left\{ \frac{w_m}{l} u_{3\xi}^{(i)} \left[-u_{1\xi}^{(i)} + \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_3^{(i)} - \frac{1}{2} \frac{u_m}{l} u_{1\xi}^{(i)2} - \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi}^{(i)2} - \frac{1}{2} \frac{h_0^{(i)2}}{24l^2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi\xi}^{(i)2} \right] \left[1 \mp \frac{4}{3} \frac{m}{E} \frac{u_m^2}{l^2} \left(u_{1\xi}^{(i)2} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{1\xi}^{(i)} u_3^{(i)} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{w_m^2 l^2}{u_m^2 R^{(i)2}} u_3^{(i)} \right) \right] \right\} + \frac{w_m R^{(i)}}{l^2} \left(c^2 u_{3\xi\xi}^{(i)} - 2\varepsilon c u_{3\xi\tau}^{(i)} + \varepsilon^2 u_{3\tau\tau}^{(i)} \right) = R^{(i)} \frac{(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}. \end{aligned}$$

Разложим упругие перемещения по степеням $\varepsilon = \frac{u_m}{l}$:

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots,$$

подставим их в уравнения, разделим обе части уравнений на $\varepsilon = \frac{u_m}{l}$ и, оставив члены при ε^0 и ε^1 , придём к выражениям:

$$\begin{aligned} & \left(u_{10\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right)_\xi + \varepsilon \left\{ u_{11\xi\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} + \frac{1}{2} \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} \mp \frac{4}{3} \frac{m}{E} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 \left[u_{10\xi}^{(i)3} - (1 + \mu_0) \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{10\xi}^{(i)} u_{30}^{(i)} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(u_{10\xi}^{(i)} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right) - \mu_0 \left(\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} \right)^3 u_{30}^{(i)3} \right] \right\} - c^2 u_{10\xi\xi}^{(i)} - \varepsilon c^2 u_{11\xi\xi}^{(i)} + 2\varepsilon c u_{10\xi\tau}^{(i)} = - \frac{l^2 (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}, \\ & -\mu_0 u_{10\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} + \varepsilon \left\{ -\mu_0 u_{11\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} \mp \frac{4}{3} \frac{m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 \left[\mu_0 u_{10\xi}^{(i)3} - (1 + \mu_0) \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{10\xi}^{(i)} u_{30}^{(i)} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(u_{10\xi}^{(i)} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right) - \left(\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} \right)^3 u_{30}^{(i)3} \right] \right\} + \frac{w_m R^{(i)}}{u_m l} c^2 u_{30\xi\xi}^{(i)} = R^{(i)} l \frac{(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)}{u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}. \end{aligned}$$

Полагая коэффициенты при ε^0 нулевыми, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} u_{10\xi\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30\xi}^{(i)} - c^2 u_{10\xi\xi}^{(i)} &= 0, \\ -\mu_0 u_{10\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} &= 0, \end{aligned}$$

из которой следует:

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_{10\xi}^{(i)}, \quad (1 - \mu_0^2 - c^2) u_{10\xi\xi}^{(i)} = 0.$$

Отсюда можем заключить, что u_{10} — это произвольная функция, а безразмерная скорость волны составляет $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$, так как $c^2 = 1 - \mu_0^2$. Приравняем коэффициенты при ε в правых и левых частях уравнений и учтём предыдущие результаты, тогда

$$\begin{aligned} & \left[\mu_0^2 u_{11\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} \right]_\xi + \left[\frac{1}{2} \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} \mp \frac{4}{3} \frac{m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0^2) (1 - \mu_0 + \mu_0^2) u_{10\xi}^{(i)3} \right]_\xi + \\ & + 2\sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\xi\tau}^{(i)} = - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1)), \end{aligned}$$

$$-\mu_0 u_{11\xi} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} \mu_0 (1 - \mu_0^2) u_{10\xi\xi\xi}^{(i)} = R^{(i)} l \frac{(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}.$$

Умножим обе части второго уравнения на μ_0 и продифференцируем по ξ . В результате получим:

$$\left(\mu_0^2 u_{11\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31\xi}^{(i)} \right)_\xi + \left[\frac{1}{2} \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} \mp \frac{4}{3} \frac{m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0^2) (1 + \mu_0 - \mu_0^2) u_{10\xi}^{(i)3} + 2\sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\xi} \right]_\xi = - \frac{l^2 (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2},$$

$$\left(\mu_0^2 u_{11\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31\xi}^{(i)} \right)_\xi + \left[\frac{1}{2} \mu_0^2 \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} \right]_\xi + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} \mu_0^2 (1 - \mu_0^2) u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(i)} = \frac{R^{(i)} l}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \mu_0 \left((-1)^{i-1} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} + (i-1) \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} \right).$$

Вычтем из первого уравнения второе и разделим обе части этого выражения на $2\sqrt{1 - \mu_0^2}$, тогда придём к системе вида:

$$u_{10\xi\tau}^{(i)} + \frac{u_m \sqrt{1 - \mu_0^2}}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)} u_{10\xi\xi}^{(i)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(i)} \mp \frac{2m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\xi}^{(i)2} u_{10\xi\xi}^{(i)} =$$

$$= - \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1) - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} \left(\frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^{i-1} + (i-1) \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} \right) \right] \quad (i-1, 2), \quad (7)$$

моделирующей движение волн в оболочках при наличии жидкости между ними и во внутренней оболочке.

В случае, когда жидкости в системе нет, правая часть уравнений становится равной нулю и получаются независимые модифицированные уравнения Кортевега де Вриза (МКдВ), а в отсутствие физической нелинейности — уравнения Кортевега де Вриза (КдВ) (при $m = 0$). Далее, чтобы определить в уравнениях (7) правую часть, необходимо решить уравнения гидродинамики для жидкости, заполняющей трубы кольцевого и кругового сечений.

3. Определение напряжений в оболочках, возникающих от действия на них жидкости

3.1. Канал кольцевого сечения

Рассмотрим влияние, оказываемое на оболочки жидкостью, располагающейся между ними в канале кольцевого сечения. Введём безразмерные переменные и параметры:

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{\delta} v_x, \quad r = R_2 + \delta r^*, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l},$$

$$p = \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} P + p_0, \quad \psi = \frac{\delta}{R_2} = o(1), \quad \lambda = \frac{w_m}{\delta} = \frac{w_m R_2}{R_2 \delta} = o\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\right),$$

$$\frac{w_m}{R_2} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_2} = \lambda \psi, \quad \frac{w_m}{l} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_2} \frac{R_2}{l} = \lambda \psi \varepsilon^{1/2}, \quad \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{R_2} \frac{R_2}{l} = \psi \varepsilon^{1/2}.$$

При $r^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}$ и $r^* = -\lambda u_3^{(2)}$ запишем в безразмерном виде уравнения гидродинамики:

$$\left(\frac{\delta}{l} \right)^2 \left\{ \frac{\delta c_0}{v} \frac{\delta}{l} \left[\frac{\partial v_r}{\partial t^*} + \lambda \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right) \right] \right\} + \frac{\partial P}{\partial r^*} = \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{R_2 (1 + \psi_r^*)} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} - \frac{\delta^2 v_r}{R_2^2 (1 + \psi_r^*)^2} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^{*2}} \right],$$

$$\frac{\delta c_0}{v} \frac{\delta}{l} \left[\frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \lambda \left(v_r \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{R_2 (1 + \psi_r^*)} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^{*2}},$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{\delta v_r}{R_2 (1 + \psi_r^*)} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0,$$

и граничные условия:

$$\frac{\delta}{l} \frac{u_m}{w_m} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t^*} = v_x - \frac{u_m}{w_m} \frac{\delta}{l} \lambda u_1^{(i)} \frac{\partial v_x}{\partial x^*} - \lambda u_3^{(i)} \frac{\partial v_x}{\partial r^*}, \quad - \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t^*} = v_r + \frac{u_m}{w_m} \frac{\delta}{l} \lambda u_1^{(i)} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} - \lambda u_3^{(i)} \frac{\partial v_r}{\partial r^*}.$$

Полагая теперь $\delta/l = 0$, $\delta/R_2 = 0$ (нулевое приближение по δ/l в гидродинамической теории смазки), а также $(\delta/l)(\delta c_0/\nu) = 0$ согласно ползущим течениям, получим уравнения гидродинамики:

$$\frac{\partial P}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0,$$

и граничные условия: $v_r = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}$, $v_x = 0$. Разложим давление и компоненты скорости по степеням малого параметра λ :

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots.$$

Для первых членов разложения придём к тому же виду гидродинамических уравнений, что и выше:

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0,$$

и граничным условиям:

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}; \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 1,$$

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}; \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 0.$$

С точностью до ψ , λ найдём:

$$\cos\left(-\widehat{n}, \widehat{n}_r\right) \approx 1, \quad \cos\left(-\widehat{n}, \widehat{t}\right) \approx 0,$$

$$q_x^i = \rho\nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \left[\frac{\partial v_x^*}{\partial r^*} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial v_r^*}{\partial x^*} \right] \Bigg|_{r_2^* = \frac{w_m u_3^{(2)}}{\delta}} \Bigg|_{r_1^* = 1 - \frac{w_m u_3^{(1)}}{\delta}} \approx \rho\nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^*}{\partial r^*} \Bigg|_{r_2^* = -\lambda u_3^{(2)}} \Bigg|_{r_1^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}},$$

$$q_n = -\frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} P - p_0 + 2\rho\nu \frac{w_m c_0}{l\delta} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} = -p_0 - \frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} \left(P - 2 \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} \right) = \left\{ \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 = \psi_i^2 \epsilon_i \right\} \approx -p_0 - \frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} P.$$

Из уравнений движения жидкости с учётом граничных условий следует выражение $v_x^0 = \frac{r^{*2} - r^*}{2} \frac{\partial P^0}{\partial x^*}$, подстановка которого в уравнение неразрывности даёт:

$$\frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = -\frac{r^{*2} - r^*}{2} \frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{*2}}.$$

Тогда, учитывая условия на границе $r^* = 0$, получим:

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{1}{2} \left(\frac{r^{*3}}{3} - \frac{r^{*2}}{2} \right) \frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{*2}}.$$

Удовлетворяя условиям при $r^* = 1$, найдём:

$$\frac{\partial P^0}{\partial x^*} = 12 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \quad \frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{*2}} = 12 \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right), \quad P^0 = 12 \int \left[\int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*.$$

При этом

$$v_x^0 = 6(r^{*2} - r^*) \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \quad \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 6(2r^* - 1) \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*,$$

$$\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \quad \left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right) dx^*.$$

Помня, что введены переменные $\xi = x^* - ct^*$ и $\tau = \varepsilon t^*$, а $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$, запишем:

$$P^0 = 12 \int \left[\int \left(c \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - c \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} + \varepsilon c \frac{\partial u_{31}^{(1)}}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} - \varepsilon c \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} \right) d\xi \right] d\xi \approx 12\sqrt{1 - \mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi,$$

$$-\frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} q_n = \frac{\rho_0 \nu c_0 l w_m}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} 12\sqrt{1 - \mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi,$$

$$-\frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = \frac{\rho \nu c_0 l w_m}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} 12\sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}),$$

а с учётом равенства $w_m u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_m R^{(i)} u_{10\xi}^{(i)}$ для обеих оболочек придём к выражениям, которые определяют правую часть уравнений (7)

$$\frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = \frac{\rho \nu}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0 \mu_0} 12\sqrt{1 - \mu_0^2} [u_m R^{(2)} u_{10\xi}^{(2)} - u_m R^{(1)} u_{10\xi}^{(1)}], \quad q_x^{(i)} = \frac{\delta}{2l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^i. \quad (8)$$

3.2. Канал кругового сечения

Рассмотрим влияние жидкости на внутреннюю оболочку. По аналогии с подразделом 3.1 введём безразмерные переменные и параметры:

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r; \quad V_x = w_m \frac{c_0}{R_3} v_x; \quad r^* = \frac{r}{R_3}; \quad t^* = \frac{c_0}{l} t; \quad x^* = \frac{1}{l} x;$$

$$p = \frac{\tilde{\rho} \tilde{\nu} c_0 l w_m}{R_3^3} P + p_0; \quad \frac{R_3}{l} = \psi = O(\varepsilon^{1/2}); \quad \lambda = \frac{w_m}{R_3} = O(\varepsilon).$$

В этих переменных при $r^* = 1 - \lambda u_3^{(2)}$ представим уравнения гидродинамики:

$$\psi^2 \left\{ \psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{\nu}} \left[\frac{\partial v_r}{\partial t^*} + \lambda \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial r^*} \right\} = \psi^2 \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \psi^2 \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^{*2}} \right],$$

$$\psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{\nu}} \left[\frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \lambda \left(v_r \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \psi^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^{*2}},$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{v_r}{r^*} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0$$

и граничные условия

$$\frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t} = v_x + \frac{u_m R_3}{w_m l} \lambda u_1^{(2)} \frac{\partial v_x}{\partial x^*} - \lambda u_3^{(2)} \frac{\partial v_x}{\partial r^*},$$

$$-\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t} = v_r + \frac{u_m R_3}{w_m l} \lambda u_1^{(2)} \frac{\partial v_r}{\partial x^*} - \lambda u_3^{(2)} \frac{\partial v_r}{\partial r^*}.$$

Здесь v_r, v_x — ограничены при $r^* = 0$: $r^* \frac{\partial v_r}{\partial r^*} = 0$, $r^* \frac{\partial v_x}{\partial r^*} = 0$. Положив теперь $\psi = 0$ (нулевое приближение

по ψ в гидродинамической теории смазки [25]), а также $\psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{\nu}} = 0$ согласно ползущим течениям [26, 27], придём к следующему виду уравнений гидродинамики:

$$\frac{\partial P}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right), \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0.$$

Разложение давления и компонент вектора скорости по степеням малого параметра λ

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots$$

для первых членов разложений даёт по виду те же, что и выше, уравнения:

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right), \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0,$$

и граничные условия:

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t^*} \quad \text{при } r^* = 1, \\ r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0, \quad r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0 \quad \text{при } r^* = 0.$$

Определим теперь напряжения, возникающие в оболочке от действия находящейся на ней жидкости. С точностью до λ , ψ имеем:

$$\cos \left(\widehat{\vec{n}, \vec{n}_r} \right) = \frac{R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)})}{R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)}) \left(1 + \lambda \psi \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x^*} \right)} \approx 1, \quad \cos \left(\widehat{\vec{n}, \vec{i}} \right) = -\frac{\lambda \psi \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x^*} R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)})}{R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)}) \left(1 + \lambda \psi \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x^*} \right)} \approx 0, \\ \tilde{q}_x = \tilde{\rho} \tilde{v} \frac{c_0 w_m}{R_3^2} \left[\frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \psi^2 \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right] \Bigg|_{r^*=1-\lambda u_3^{(2)}} \approx \frac{w_m}{R_3} \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Bigg|_{r^*=1}, \\ \tilde{q}_n = \left[-p_0 - \frac{\tilde{\rho} \tilde{v} c_0 w_m l}{R_3^3} P + 2 \tilde{\rho} \tilde{v} \frac{w_m c_0}{l R_3} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} \right] \Bigg|_{r^*=1-\lambda u_3^{(2)}} \approx -p_0 - \frac{w_m}{R_3} \left(\frac{l^{(2)}}{R} \right) \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 P.$$

Отсюда получим выражения для определения правой части уравнений (7):

$$\tilde{q}_x = \lambda \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Bigg|_{r^*=1}, \quad \tilde{q}_n = -p_0 - \frac{\lambda}{\psi} \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 P. \quad (9)$$

Решение уравнений гидродинамики легко реализуемо — это классические уравнения гидродинамической теории смазки. Из уравнений движения следует:

$$v_x = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t^*} + \frac{r^{*2} - 1}{4} \frac{\partial P}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} + \frac{r^{*2} - 1}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}}.$$

Здесь учтены граничные условия при $r^* = 1$, $r^* = 0$. Подстановка в уравнение неразрывности даёт:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r) = -\frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{r^{*2} - 1}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}}.$$

Тогда, учитывая условия при $r^* = 0$, получим:

$$v_r = -\frac{r^*}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{1}{4} \left(\frac{r^{*3}}{4} - \frac{r^*}{2} \right) \frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}}.$$

Удовлетворяя граничным условиям при $r^* = 1$, найдём:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}} = 16 \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right].$$

После интегрирования имеем:

$$\frac{\partial P}{\partial x^*} = 16 \int \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right] dx^* = 16 \frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right]$$

и

$$P = 16 \int \frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right] dx^*,$$

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \frac{r^*}{2} \frac{\partial}{\partial t^*} 16 \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right] \Big|_{r^*=1} = 8 \frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right].$$

Принимая во внимание введённые переменные $\xi = x^* - ct^*$ и $\tau = \varepsilon t^*$, а также $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$ и связь (9), с точностью до ε вычислим давление внутри жидкости:

$$P = 8\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \left\{ 2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} - 1 \right\} u_{10}^{(2)}.$$

При этом

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 4\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \left\{ 2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} - 1 \right\} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}.$$

Отсюда при условии, что $\frac{w_m l}{u_m R_3} u_{30}^{(2)} = \mu_0 u_{10\xi}^{(2)}$, получим

$$\tilde{q}_x - \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} = -\frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 4\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m}{l} \left[1 - \left(2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} \right)^2 \right] \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}. \quad (10)$$

4. Уравнения динамики оболочек

С найденной правой частью (8), (10) система уравнений (7) примет следующий вид:

$$u_{10\xi\tau}^{(1)} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(1)} u_{10\xi\xi}^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(1)} \mp$$

$$\mp \frac{2m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\xi}^{(1)2} u_{10\xi\xi}^{(1)} + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] [u_{10\xi}^{(1)} - u_{10\xi}^{(2)}] = 0,$$

$$u_{10\xi\tau}^{(2)} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(2)} u_{10\xi\xi}^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(2)} \mp \frac{2m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\xi}^{(2)2} u_{10\xi\xi}^{(2)} +$$

$$+ 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] [u_{10\xi}^{(2)} - u_{10\xi}^{(1)}] - 2(1 - 4\mu_0^2) \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{\tilde{v}}{R c_0 \varepsilon} u_{10\xi}^{(2)} = 0.$$

Здесь, согласно принятой для вычислений точности $\frac{h_0^{(i)}}{R} = O(\varepsilon)$, $\frac{\delta}{R_2} = \psi \ll 1$, положено $R^{(1)} \approx R^{(2)} = R$ и $h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} \approx h_0$.

Для упрощения введём обозначения: $u_{10\xi}^{(1)} = c_3 \varphi^{(1)}$, $u_{10\xi}^{(2)} = c_3 \varphi^{(2)}$, $\eta = c_1 \xi$, $t = c_2 \tau$, где

$$c_1 = \left[c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \right]^{1/3}, \quad c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \frac{v}{\delta c_0}, \quad c_3 = \frac{c_2}{c_1} \frac{l_\varepsilon}{u_m} \frac{2}{\sqrt{1 - \mu_0^2}} 6\sigma_0,$$

$$\frac{2m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{c_3^2 c_1}{c_2} = 6\sigma_1, \quad \sigma = \frac{1 - 4\mu_0^2}{3\mu_0^2} \left(\frac{\delta}{R} \right)^3 \frac{\tilde{\rho} \tilde{v}}{\rho v} \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right]^{-1},$$

и получить систему уравнений относительно $\varphi^{(i)}$:

$$\begin{aligned} \varphi_t^{(1)} + 6\sigma_0\varphi^{(1)}\varphi_\eta^{(1)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(1)} \mp 6\sigma_1\varphi^{(1)2}\varphi_\eta^{(1)} + \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} &= 0, \\ \varphi_t^{(2)} + 6\sigma_0\varphi^{(2)}\varphi_\eta^{(2)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(2)} \mp 6\sigma_1\varphi^{(2)2}\varphi_\eta^{(2)} + \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} - \sigma\varphi^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Система (11) имеет в качестве точного решения выражения с верхним знаком « \mp » перед членом с σ_1 . В случае $\sigma = 0$ (при отсутствии жидкости во внутренней оболочке) точное решение выглядит так:

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = \frac{\sigma_0}{2\sigma_1} \pm \frac{k}{\sqrt{\sigma_1}} \operatorname{th} \left(k\eta - k \left(-2k^2 + \frac{3\sigma_0^2}{2\sigma_1} \right) t \right), \quad (12)$$

где k — произвольная величина.

5. Численное моделирование

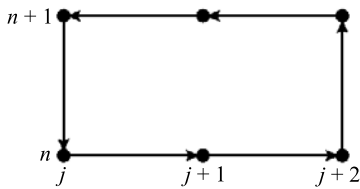


Рис. 2. Базовый разностный шаблон

В работах [28–30] развит подход к созданию разностных схем, ориентированный на получение переопределённой системы разностных уравнений, являющейся следствием аппроксимации интегральных законов сохранения с учётом интегральных соотношений связи искомых функций с их производными. То есть разностная схема — это условие совместности системы разностных уравнений. Таким образом, разностная схема автоматически обеспечивает выполнение интегральных законов сохранения в дискретных областях, составленных из шаблонов разностных схем.

Для любой области Ω запишем систему уравнений (11) в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} (-3\sigma_0\varphi^{(1)2} - \varphi_{\eta\eta}^{(1)} \pm 2\sigma_1\varphi^{(1)3}) dt + \varphi^{(1)} d\eta + \iint_{\Omega} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) dt d\eta &= 0, \\ \oint_{\partial\Omega} (-3\sigma_0\varphi^{(2)2} - \varphi_{\eta\eta}^{(2)} \pm 2\sigma_1\varphi^{(2)3}) dt + \varphi^{(2)} d\eta + \iint_{\Omega} (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} - \sigma\varphi^{(2)}) dt d\eta &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для перехода к дискретной формулировке положим $u_j^{(i)n} = \varphi^{(i)}(t_n, \eta_j)$ и выберем для разностного шаблона в качестве базового контур, показанный на рисунке 2.

Дополним систему (13) интегральными соотношениями, связывающими дискретные функции и их дискретные производные, записанные в интегральной форме:

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta}^{(i)} d\eta = u^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}(t, \eta_j), \quad \int_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u_{\eta\eta}^{(i)} d\eta = u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_{j+2}) - u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_j). \quad (14)$$

Используя для интегрирования по времени и первой производной по η формулу трапеций, а для второй производной по η формулу среднего значения и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (13), (14) в виде:

$$\begin{aligned} & \left(-3\sigma_0 \left(u_j^{(1)2n} + u_j^{(1)2n+1} - u_{j+2}^{(1)2n} - u_{j+2}^{(1)2n+1} \right) - \left(u_{\eta\eta}^{(1)n} + u_{\eta\eta}^{(1)n+1} - u_{\eta\eta}^{(1)n+2} - u_{\eta\eta}^{(1)n+1} \right) \pm \right. \\ & \left. \pm 2\sigma_1 \left(u_j^{(1)3n} + u_j^{(1)3n+1} - u_{j+2}^{(1)3n} - u_{j+2}^{(1)3n+1} \right) \right) \frac{\tau}{2} + \left(u_{j+1}^{(1)n+1} - u_{j+1}^{(1)n} \right) 2h + \left(\left(u_{j+1}^{(1)n+1} + u_{j+1}^{(1)n} \right) - \left(u_{j+1}^{(2)n+1} + u_{j+1}^{(2)n} \right) \right) \tau = 0, \\ & \left(-3\sigma_0 \left(u_j^{(2)2n} + u_j^{(2)2n+1} - u_{j+2}^{(2)2n} - u_{j+2}^{(2)2n+1} \right) - \left(u_{\eta\eta}^{(2)n} + u_{\eta\eta}^{(2)n+1} - u_{\eta\eta}^{(2)n+2} - u_{\eta\eta}^{(2)n+1} \right) \pm 2\sigma_1 \left(u_j^{(2)3n} + u_j^{(2)3n+1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - u_{j+2}^{(2)3n} - u_{j+2}^{(2)3n+1} \right) \right) \frac{\tau}{2} + \left(u_{j+1}^{(2)n+1} - u_{j+1}^{(2)n} \right) 2h + \left(\left(u_{j+1}^{(2)n+1} + u_{j+1}^{(2)n} \right) - \left(u_{j+1}^{(1)n+1} + u_{j+1}^{(1)n} \right) - \sigma \left(u_{j+1}^{(2)n+1} + u_{j+1}^{(2)n} \right) \right) h\tau = 0, \\ & \left(u_{\eta}^{(i)n} + u_{\eta}^{(i)n} \right) \frac{h}{2} = u_{\eta}^{(i)n} - u_{\eta}^{(i)n}, \\ & u_{\eta\eta}^{(i)n} 2h = u_{\eta}^{(i)n} - u_{\eta}^{(i)n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку пакет [30], используемый для решения системы алгебраических уравнений, работает только в случае линейных разностных идеалов, а исходное дифференциальное уравнение (11) нелинейно, заменим нелинейную часть в (15) путём введения дополнительной функции $F^{(i)} = 3\sigma_0 u^{(i)2} \mp 2\sigma_1 u^{(i)3}$. За счёт выбора допустимого упорядочения, такого, что $u^{(1)} \succ u^{(2)} \succ \dots \succ F^{(1)} \succ F^{(1)}$, а затем по переменным с индексами n, j , нелинейная часть не будет входить в лидирующие мономы системы при построении базиса Грёбнера, и структура базиса позволит проверить, является ли искомая разностная схема условием совместности системы разностных уравнений.

В результате получим следующий разностный аналог каждого уравнения (11), подобный тому, который получается по схеме Кранка–Николсон для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} & \frac{u^{(1)n+1}_j - u^{(1)n}_j}{\tau} + 3\sigma_0 \frac{(u^{(1)2n+1}_{j+1} - u^{(1)2n+1}_{j-1}) + (u^{(1)2n}_{j+1} - u^{(1)2n}_{j-1})}{4h} + \\ & + \frac{(u^{(1)n+1}_{j+2} - 2u^{(1)n+1}_{j+1} + 2u^{(1)n+1}_{j-1} - u^{(1)n+1}_{j-2}) + (u^{(1)n}_{j+2} - 2u^{(1)n}_{j+1} + 2u^{(1)n}_{j-1} - u^{(1)n}_{j-2})}{4h^3} \mp \\ & \mp 2\sigma_1 \frac{(u^{(1)3n+1}_{j+1} - u^{(1)3n+1}_{j-1}) + (u^{(1)3n}_{j+1} - u^{(1)3n}_{j-1})}{4h} + \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} - \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} = 0, \\ & \frac{u^{(2)n+1}_j - u^{(2)n}_j}{\tau} + 3\sigma_0 \frac{(u^{(2)2n+1}_{j+1} - u^{(2)2n+1}_{j-1}) + (u^{(2)2n}_{j+1} - u^{(2)2n}_{j-1})}{4h} + \\ & + \frac{(u^{(2)n+1}_{j+2} - 2u^{(2)n+1}_{j+1} + 2u^{(2)n+1}_{j-1} - u^{(2)n+1}_{j-2}) + (u^{(2)n}_{j+2} - 2u^{(2)n}_{j+1} + 2u^{(2)n}_{j-1} - u^{(2)n}_{j-2})}{4h^3} \mp \\ & \mp 2\sigma_1 \frac{(u^{(2)3n+1}_{j+1} - u^{(2)3n+1}_{j-1}) + (u^{(2)3n}_{j+1} - u^{(2)3n}_{j-1})}{4h} + \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} - \sigma \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} = 0. \end{aligned}$$

Полученные неявные разностные уравнения имеют квадратичную и кубическую нелинейность относительно следующего временного слоя. При построении решения использована линеаризация вида:

$$\begin{aligned} v_{k+1}^2 &= v_{k+1}^2 - v_k^2 + v_k^2 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1} + v_k) + v_k^2 \approx v_{k+1} \cdot 2v_k - v_k^2, \\ v_{k+1}^3 &= v_{k+1}^3 - v_k^3 + v_k^3 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1}^2 + v_{k+1}v_k + v_k^2) + v_k^3 \approx v_{k+1} \cdot 3v_k^2 - 2v_k^3. \end{aligned}$$

Количество итераций для достижения на следующем временном слое точности 10^{-12} , как правило, не превышало 2–3. Шаг по времени t брался равным половине шага по переменной η . Программа расчёта написана на языке Python с использованием пакета SciPy (<http://scipy.org>).

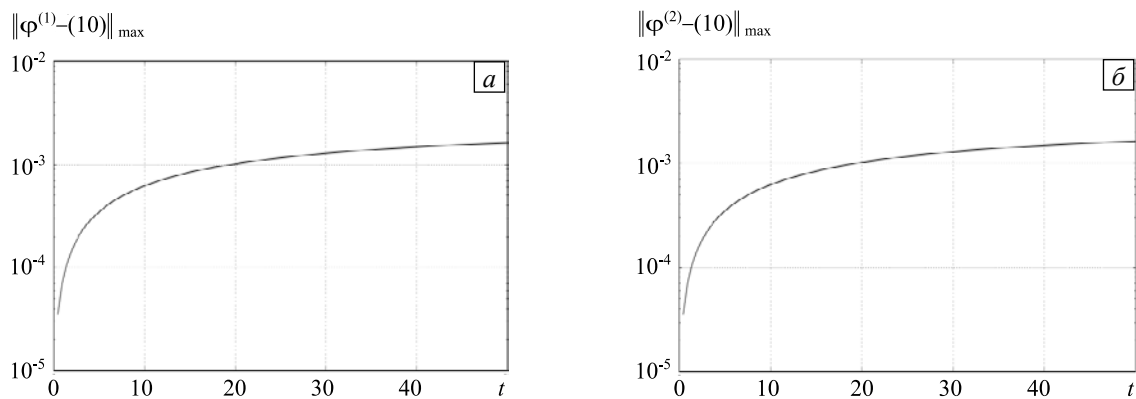


Рис. 3. Оценка погрешности численного решения уравнений (11) при $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 1, \sigma = 0$ с начальным условием $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}$, взятым из точного решения (12) при $t = 0$ с $k = 0, 2$

Для проверки предлагаемого численного алгоритма проведен расчёт задачи (11). Результаты вычислений представлены на рисунке 3 и показывают хорошее согласование с известным для неё точным решением (12).

При отсутствии жидкости во внутренней оболочке в последней с течением времени, как показано в работе [18], возникает нелинейная волна деформации. Это же подтверждают и авторские результаты (см. Рис. 4, 5).

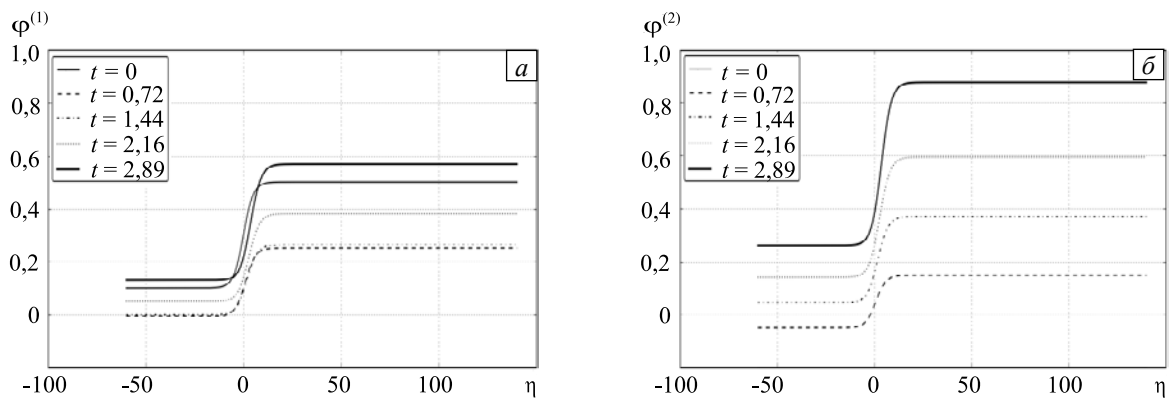


Рис. 4. Графики численного решения уравнений (11) в различные моменты времени при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma = 0,7$ с начальным условием $\varphi^{(2)} = 0$ и $\varphi^{(1)}$, взятым из точного решения (12) при $t = 0$ с $k = 0,2$

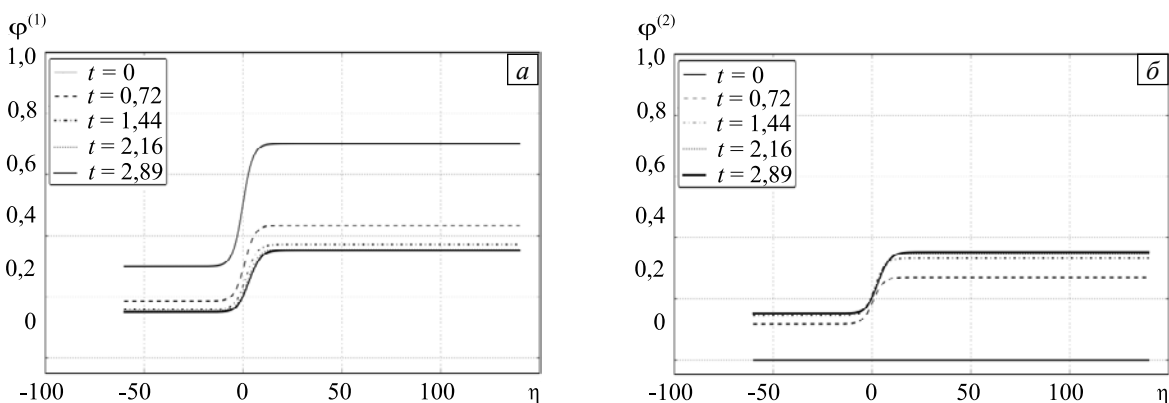


Рис. 5. Графики численного решения уравнений (11) в различные моменты времени при отсутствии жидкости во внутренней оболочке ($\sigma = 0$) и $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 1$, с начальным условием $\varphi^{(2)} = 0$ и $\varphi^{(1)}$, взятым из точного решения (12) при $t = 0$ с $k = 0,2$

6. Заключение

Выполненные вычислительные эксперименты, результаты которых показаны на рисунке 4, позволили впервые оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости во внутренней оболочке на поведение нелинейной волны деформации в системе при значении параметра $\sigma > 0$. Сначала происходит выравнивание амплитуд, в дальнейшем наблюдается линейный рост амплитуды волны относительно времени в обеих оболочках при более сильном во внутренней оболочке.

При отсутствии жидкости во внутренней оболочке (Рис. 5), что соответствует значению параметра $\sigma = 0$, сначала происходит выравнивание амплитуд в обеих оболочках, со временем же при движении волны жидкость, находящаяся между ними, не оказывает влияния на волну. Этот факт также можно установить, если рассмотреть уравнение (9) при $\sigma = 0$, когда его точное решение (10) при условии $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}$, ведёт себя полностью как расчётное (Рис. 3). Это может являться подтверждением правильности выбранного метода численного расчёта.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00175-а).

Литература

1. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах / Собр. соч. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 296 с. – С. 149-171.
2. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при отсутствии торцевого истечения в условиях вибрации // Вестник СГТУ. – 2007. – Т. 3, № 2(27). – С. 15-23.
3. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И. Исследование амплитудных частотных характеристик колебаний упругих стенок трубы кольцевого профиля при пульсирующем движении вязкой жидкости в условиях жесткого защемления по торцам // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2009. – № 3. – С. 15-21. (English version DOI).
4. Païdoussis M.P., Nguyen V.B., Misra A.K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid // J. Fluids Struct. – 1991. – Vol. 5, no. 2. – P. 127-164. DOI

5. *Amabili M., Garziera R.* Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part III: Steady viscous effects on shells conveying fluid // *J. Fluids Struct.* – 2002. – Vol. 16, no. 6. – P. 795-809. DOI
6. *Amabili M.* Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. – Cambridge University Press, 2008. – 374 p. DOI
7. *Могилевич Л.И., Попов В.С.* Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости // МТТ. – 2004. – № 5. – С. 179-190.
8. *Бочкарёв С.А.* Собственные колебания вращающейся круговой цилиндрической оболочки с жидкостью // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 24-33. DOI
9. *Лекомцев С.В.* Конечно-элементные алгоритмы расчета собственных колебаний трехмерных оболочек // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 233-243. DOI
10. *Бочкарёв С.А., Матвеев В.П.* Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 94-102. DOI
11. *Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Шешенин С.Ф.* Формирование солитонов деформации в континууме Коссера со стесненным вращением // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 4. – С. 67-75. DOI
12. *Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В.* Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. – М.: Физматлит, 2009. – 320 с.
13. *Ерофеев В.И., Кажжаев В.В., Павлов И.С.* Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в зернистой среде // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 140-150. DOI
14. *Землянухин А.И., Бочкарёв А.В.* Метод возмущений и точные решения уравнений нелинейной динамики сред с микроструктурой // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2016. – Т. 9, № 2. – С. 182-191. DOI
15. *Блинкова А.Ю., Блинков Ю.А., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны в соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними, с учетом рассеяния энергии // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 336-345. DOI
16. *Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Ковалев А.Д., Могилевич Л.И.* Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. – 2012. – Т. 12, № 2. – С. 12-18.
17. *Блинкова А.Ю., Блинков Ю.А., Иванов С.В., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны деформаций в геометрически и физически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – Т. 15, № 2. – С. 193-202. –
18. *Блинков Ю.А., Ковалева И.А., Могилевич Л.И.* Моделирование динамики нелинейных волн в соосных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. – 2013. – Т. 3. – С. 42-51.
19. *Блинков Ю.А., Месянжин А.В., Могилевич Л.И.* Математическое моделирование волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16, № 2. – С. 184-197.
20. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – М.: Иностранная литература, 1961. – 778 с.
21. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
22. *Валландер С.В.* Лекции по гидроаэромеханике. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. – 296 с.
23. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
24. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
25. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
26. *Чивилихин С.А., Попов И.Ю., Гусаров В.В.* Динамика скручивания нанотрубок в вязкой жидкости // ДАН. – 2007. – Т. 412, № 2. – С. 201-203. (English version DOI).
27. *Попов И.Ю., Родыгина О.А., Чивилихин С.А., Гусаров В.В.* Солитон в стенке нанотрубки и стоково течение в ней // ПЖТФ. – 2010. – Т. 36, № 18. – С. 48-54. (English version DOI).
28. *Гердт В.П., Блинков Ю.А.* О стратегии выбора немультимпликативных продолжений при вычислении базисов Жана // Программирование. – 2007. – Т. 33, № 3. – С. 34-43. (English version DOI).
29. *Блинков Ю.А., Гердт В.П.* Специализированная система компьютерной алгебры GINV // Программирование. – 2008. – Т. 34, № 2. – С. 67-80. (English version DOI).
30. *Gerdt V.P., Blinkov Yu.A.* Involution and difference schemes for the Navier–Stokes equations // Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2009. – Lecture Notes in Computer Science. – Vol. 5743. – Springer, 2009. – P. 94-105. DOI

References

1. Gromeka I.S. *K teorii dvizheniya zhidkosti v uzkih tsilindricheskikh trubakh* [To the theory of fluid flow in narrow cylindrical tubes]. Moscow: AS USSR, 1952. Pp. 149-171.
2. Kondratov D.V., Mogilevich L.I. Matematicheskoe modelirovanie protsessov vzaimodejstviya dvukh tsilindricheskikh obolochek so sloem zhidkosti mezhdru nimi pri otsutstvii tortsevogo istecheniya v usloviyakh vibratsii [Mathematical modeling of the interaction of two cylindrical shells with a fluid layer between them in the absence of an outward flow under vibrations]. *Vestnik Saratov State Technical University*, 2007, vol. 3, no. 2(27), pp. 15-23.
3. Kondratov D.V., Kondratova N.Yu., Mogilevich L.I. Studies of the amplitude frequency characteristics of oscillations of the tube elastic walls of a circular profile during pulsed motion of a viscous fluid under the conditions of rigid jamming on the butt-ends. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2009, vol. 38, no. 3, pp. 229-234. DOI
4. Paidoussis M.P., Nguyen V.B., Misra A.K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid. *J. Fluids Struct.*, 1991, vol. 5, no. 2, pp. 127-164. DOI
5. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part III: Steady viscous effects on shells conveying fluid. *J. Fluids Struct.*, 2002, vol. 16, no. 6, pp. 795-809. DOI
6. Amabili M. *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. Cambridge University Press, 2008. 374 p. DOI

7. Mogilevich L.I., Popov V.S. Dinamika vzaimodejstviya uprugogo tsilindra so sloem vyazkoj neszhimaemoj zhidkosti [Dynamics of the interaction between an elastic cylinder and a viscous incompressible fluid layer]. *Mechanics of Solids*, 2004, no. 5, pp. 179-190.
8. Bochkarev S.A. Natural vibrations of a rotating circular cylindrical shell containing fluid. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 24-33. DOI
9. Lekomtsev S.V. Finite-element algorithms for calculation of natural vibrations of three-dimensional shells. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 233-243. DOI
10. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Stability of coaxial cylindrical shells containing a rotating fluid. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 94-102. DOI
11. Erofeev V.I., Zemlyanukhin A.I., Catson V.M., Sheshenin S.F. Formation of strain solitary waves in the Cosserat continuum with restricted rotation. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2009, vol. 2, no. 4, pp. 67-75. DOI
12. Bagdoev A.G., Erofeev V.I., Shekoyan A.V. *Linejnye i nelinejnye volny v dispergiruyushchikh sploshnykh sredakh* [Linear and nonlinear waves in dispersive continuous media]. Moscow: Fizmatlit, 2009. 320 p.
13. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Pavlov I.S. Inelastic interaction and splitting of strain solitons propagating in a granular medium. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 140-150. DOI
14. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. The perturbation method and exact solutions of nonlinear dynamics equations for media with microstructure. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 2, pp. 182-191. DOI
15. Blinkova A.Y., Blinkov Y.A., Mogilevich L.I. Non-linear waves in coaxial cylinder shells containing viscous liquid inside with consideration for energy dispersion. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 336-345. DOI
16. Blinkova A.Yu., Ivanov S.V., Kovalev A.D., Mogilevich L.I. Mathematical and computer modeling of nonlinear waves dynamics in a physically nonlinear elastic cylindrical shells with viscous incompressible liquid inside them. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Physics*, 2012, vol. 12, no. 2, pp. 12-18.
17. Blinkova A.Yu., Blinkov Yu.A., Ivanov S.V., Mogilevich L.I. Nonlinear deformation waves in a geometrically and physically nonlinear viscoelastic cylindrical shell containing viscous incompressible fluid and surrounded by an elastic medium. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, no. 2, pp. 193-202.
18. Blinkov Yu.A., Kovaleva I.A., Mogilevich L.I. Nonlinear waves dynamics modeling in coaxial geometrically and physically nonlinear shell containing viscous incompressible fluid in between. *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*, 2013, vol. 3, pp. 42-51.
19. Blinkov Yu.A., Mesyanzhin A.V., Mogilevich L.I. Wave occurrences mathematical modeling in two geometrically nonlinear elastic coaxial cylindrical shells, containing viscous incompressible liquid. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 184-197.
20. Kauderer H. *Nichtlineare Mechanik* [Nonlinear mechanics]. Springer, 1958. 684 p.
21. Loitsyanskii L.G. *Mechanics of liquids and gases*. Pergamon Press, 1966. 804 p.
22. Vallander S.V. *Lektsii po gidroaeromekhanike* [Lectures on hydromechanics]. Leningrad: Leningrad State University, 1978. 296 p.
23. Volmir A.S. *Nelinejnaya dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow: Nauka, 1972. 432 p.
24. Vol'mir A.S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza. Zadachi gidrouprugosti* [Shells in liquid and gas flow. Hydroelasticity problems]. Moscow: Nauka, 1979. 320 p.
25. Schlichting H. *Boundary-layer theory*. NY: McGraw-Hill, 1955. 535 p.
26. Chivilikhin S.A., Popov I.Yu., Gusarov V.V. Dynamics of nanotube twisting in a viscous fluid. *Doklady Physics*, 2007, vol. 52, no. 1, pp. 60-62. DOI
27. Popov I.Yu., Rodygina O.A., Chivilikhin S.A., Gusarov V.V. Soliton in a nanotube wall and stokes flow in the nanotube. *Tech. Phys. Lett.*, 2010, vol. 36, no. 9, pp. 852-855. DOI
28. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A. On selection of nonmultiplicative prolongations in computation of Janet bases. *Program. Comput. Soft.*, 2007, vol. 33, no. 3, pp. 147-153. DOI
29. Blinkov Yu.A., Gerdt V.P. Specialized computer algebra system GINV. *Program. Comput. Soft.*, 2008, vol. 34, no. 2, pp. 112-123. DOI
30. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A. Involution and difference schemes for the Navier–Stokes equations. *Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2009. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5743. Springer, 2009. Pp. 94-105. DOI

Поступила в редакцию 09.11.2016; опубликована в электронном виде 30.06.2017

Сведения об авторах

Блинков Юрий Анатольевич, дфмн, зав. каф., Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (СГУ им. Н.Г. Чернышевского), 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83; e-mail: blinkovua@info.sgu.ru

Месянжин Артем Вячеславович, вед. матем., ОАО «Конструкторское бюро промышленной автоматики», 410005, Саратов, ул. Большая Садовая, д. 239; e-mail: a.v.mesyanzhin@gmail.com

Могилевич Лев Ильич, дтн, проф., Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А. (СГТУ им. Гагарина Ю.А.), 410054, Саратов, ул. Политехническая, д. 77; e-mail: mogilevich@sgu.ru