

DOI: [10.7242/1999-6691/2017.10.2.12](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.12)

УДК 532.5

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЧИСТОГО ИЗГИБА БАЛКИ В РАМКАХ ДИЛАТАЦИОННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ю.О. Соляев¹, С.А. Лурье^{1,2}, А.В. Волков¹¹Институт прикладной механики РАН, Москва, Российская Федерация²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Российская Федерация

В работе представлены результаты численного решения задачи чистого изгиба балки в постановке дилатационной теории упругости. Используемая модель соответствует частному случаю среды с микроструктурой Миндлина, в которой присутствуют только свободные деформации изменения объема. Физическая трактовка модели связана с уточненным описанием напряженно-деформированного состояния пористых сред, в которых объемное содержание пор изменяется под действием приложенных внешних нагрузок. Рассматриваемая формулировка модели расширяется за счет учета поверхностных эффектов. Решение находится методом конечных элементов. Проводится анализ точности известного приближенного аналитического решения задачи чистого изгиба балки, построенного полуобратным методом Сен-Венана также в рамках дилатационной теории. Показано, что в численном решении, в отличие от аналитического, напряженное состояние балки трехмерно. Возникают самоуравновешенные нормальные и касательные напряжения, действующие в плоскости ее поперечного сечения. При этом все граничные условия по напряжениям на свободных поверхностях балки выполняются точно. Путем сопоставления результатов численного и аналитического моделирования выявлено, что аналитическое решение позволяет получать достаточно точные оценки при прогнозе влияния неклассических масштабных и поверхностных эффектов на эффективную жесткость и напряженное состояние пористых балок.

Ключевые слова: микродилатационная теория упругости, пористые среды, чистый изгиб, метод конечных элементов, поверхностные эффекты

NUMERICAL SOLUTION OF THE BEAM PURE BENDING PROBLEM IN THE FRAMEWORK OF THE THEORY OF ELASTIC MATERIALS WITH VOIDS

Yu.O. Solyaev¹, S.A. Lurie^{1,2} and A.V. Volkov¹¹Institute of Applied Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation²Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

The beam pure bending problem is solved numerically in the framework of the theory of elastic materials with voids, also called the elastic micro-dilatation theory. This theory describes a particular case of Mindlin's type media with microstructure and contains only non-zero micro-dilatations. The physical meaning of the model involves a more comprehensive description of the stress-strain state of porous media, in which the volume pore fraction changes in response to applied external loads. In this paper we consider a generalized variant of the theory with surface effects. The finite element method is used to find a solution to the beam pure bending problem. The semi-inverse analytical micro-dilatation solution is compared with the FEM solution. It is shown that, unlike the analytical solution, in the FEM solution all the components of the stress-strain tensors are not equal to zero. There are also self-equilibrated normal stress components in the width direction and shear stress components in the cross section perpendicular to the neutral plane. In the numerical solution, all the stress boundary conditions are accurately satisfied on the free surfaces of the beam. Comparison of analytical and numerical simulation results shows that the analytical solution allows one to obtain sufficiently precise estimates to predict the influence of non-classical scale effects and surface effects on the effective stiffness and stress state of porous beams.

Key words: theory of elastic materials with voids, micro-dilatation theory, porous media, pure bending, finite element modeling, surface effects

1. Введение

Рассматриваемая в настоящей работе дилатационная теория упругости — это частный случай линейной теории упругости сред с микроструктурой Миндлина [1] в предположении, что тензор микродисторсии имеет шаровой вид. При этом в среде присутствуют только свободные деформации изменения объема (свободная дилатация). Среда обладает усложненной кинематикой: неизвестными переменными являются перемещения и дилатация ее точек. Возникают неклассические напряжения, обусловленные дополнительной кинематической переменной и ее градиентом. Формулировка модели дилатационной теории упругости впервые была представлена в работах [2–5]. В англоязычной литературе для этой теории приняты названия: «Theory of elastic materials with voids» и «Micro-dilatation theory».

С точки зрения физического смысла под свободной дилатацией понимается изменение пористости в точке среды. Таким образом, дилатационная линейная теория упругости предназначена для описания обратимых малых деформаций, при которых в среде имеет место связанное обратимое изменение объемного содержания пор. Фактически, в такой среде под действием нагрузки происходит перераспределение пористости: в растянутой области материала объемное содержание пор увеличивается, а в сжатой области поры закрываются. Причем закрытию или образованию пор соответствует знак первых

инвариантов тензоров напряжений и деформаций. Считается, что дилатационная теория позволяет строить уточненные прогнозы механического поведения сред с малым объемным содержанием микроскопических пор-дефектов, которые почти не влияют на жесткость материала, однако могут играть существенную роль в процессе накопления повреждений, поэтому в задачах прочности и разрушения их учет становится важным [6]. Также известно, что модели этой теории могут применяться для описания процессов деформирования сред, в которых пористость в значительной степени сказывается на коэффициенте Пуассона, и, в частности, сред и метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетиков) [7, 8].

В рамках дилатационной теории упругости замкнутые аналитические решения построены для задачи однородной деформации [5], задач Сен-Венана [5, 9–11], задачи Кирша [12], задачи Ламе [13] и других. Выполнение принципа Сен-Венана в дилатационной теории было установлено в работе [14]. Обобщение теории на случай температурных эффектов представлено в работе [15]. Анализ общего решения системы дифференциальных уравнений дилатационной теории и математические аналогии с моделями теплопроводности и пороупругости проведен в работах [17, 18]. Формулировка балочной теории и теории оболочек с учетом свободной дилатации рассматривалась, например, в работах [19, 20]. Построение аналитических решений в задачах теории трещин содержат работы [21, 22]. Исследование контактных задач приведено в [23, 24]. Модель дилатационной теории, описывающая поверхностные эффекты, аналогичная модели поверхностной упругости Гуртина–Мердока, впервые была представлена в работе [25]. Влияние поверхностной дефектности содержит и модель из [26–28]. Эта модель дилатационной теории упругости получена и проанализирована как частный случай общей модели сред с сохраняющимися дислокациями.

Впервые численные решения статических и динамических задач дилатационной теории упругости построены в работах [29, 30]. В недавних работах [31–34] при построении численных решений методом конечных элементов использован программный комплекс Comsol и слабая интегральная формулировка для решения связанной системы дифференциальных уравнений модели. Найдены численные решения задачи однородных деформаций в нелинейной постановке [34], задачи Кирша для пластины конечного размера [31], задачи Ламе для цилиндра конечного размера [31], задачи об усадке прямоугольных брусков пористой структуры [32, 33]. В работе [35] предложена модификация метода граничных элементов для численного решения уравнений дилатационной теории и решены задачи однородного и неоднородного деформирования полого цилиндра.

Модель дилатационной теории упругости предназначена для описания деформированного состояния пористых сред (керамик, металлов, содержащих микропористость, геоматериалов, биоматериалов, вспененных материалов и другого), а также сред с точечными дефектами [4, 5, 31]. Существует незначительное количество работ, в которых проводились исследования, направленные на экспериментальную проверку эффектов, прогнозируемых моделями в рамках дилатационной теории упругости, и на идентификацию дополнительных физических параметров этих моделей. Например, в [32, 33] дана экспериментальная оценка возможных значений параметра связанности (дополнительной материальной постоянной дилатационной теории). В работе [36] на примере материала полиуретана показано, что для высокопористых материалов масштабные эффекты могут проявляться как в испытаниях на изгиб, так и в испытаниях на кручение, что противоречит теоретическим прогнозам, следующим из дилатационной теории упругости [5]. Однако в более поздней работе [37] продемонстрирована возможность существования связанности свободной дилатации и деформаций сдвига при нелинейной постановке задачи в рамках дилатационной теории. Известны также предположения о возможности аналитической оценки дополнительных материальных констант дилатационной теории [4].

В настоящей работе осуществляется и анализируется решение задачи чистого изгиба изотропной однородной балки с позиций дилатационной теории упругости. В работе [9] доказывается, что для этой задачи не существует полиномиального решения, аналогичного классическому решению задачи Сен-Венана. Известное аналитическое решение для пористой среды с учетом микродилатации [5] является приближенным — при его нахождении введены гипотезы о том, что боковые и торцевые поверхности балки остаются плоскими и искомые функции напряжений и свободной дилатации изменяются только по толщине. При этом граничные условия сформулированы относительно интегральных характеристик (усилий и моментов), что, вообще говоря, допустимо, так как принцип Сен-Венана в дилатационной теории выполняется [14]. Однако построенное аналитическое решение справедливо только вдали от внешних поверхностей балки. В частности, из анализа этого решения следует [5], что все поверхности балки должны деформироваться не по линейному закону, то есть должна происходить их депланация. В работе [9] также отмечается, что нейтральная ось деформированной балки со свободной дилатацией может не совпадать с продольной осью симметрии балки. Как будет показано ниже, напряженно-деформированное состояние (НДС) балки со свободной дилатацией является трехмерным, и все искомые функции изменяются не только по толщине, но и в направлении двух других координат. При этом численное решение строится при обычных (неинтегральных) граничных условиях по напряжениям на свободных поверхностях балки в предположении изотропности и однородности ее материала. Аналитическое решение задачи Сен-Венана для ортотропных и неоднородных (функционально-градиентных) сред рассматривалось в работах [10, 11, 20].

Прямое численное решение, построенное в настоящей работе, позволяет оценить точность приближенного аналитического решения, а именно определить погрешности вычисления распределения классических и неклассических напряжений по сечениям и на поверхностях балки, распределения деформаций поперечных сечений балки и изменения эффективной жесткости балки. Последнее представляется важным с точки зрения эффектов, которые могут быть установлены прямыми экспериментальными измерениями.

2. Модель дилатационной теории упругости (теории пористых сред)

Для формулировки краевой задачи дилатационной теории упругости в стационарном случае с учетом поверхностных эффектов воспользуемся вариационным подходом по аналогии с [27, 28] и обозначениями, введенными в работе [5]. Рассмотрим тело, занимающее объем V и ограниченное поверхностью S . Лагранжиан в случае линейной изотропной среды, в которой присутствуют только свободные деформации изменения объема, может быть записан в следующем виде [27, 28]:

$$\mathcal{L} = A - U = A - \int_V U_V dV - \oint_S U_S dS, \quad (1)$$

$$U_V(\varepsilon_{ij}, \phi, \phi_{,k}) = \frac{1}{2}(\lambda \theta^2 + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + 2\beta \phi \theta + \xi \phi^2 + \alpha \phi_{,k} \phi_{,k}), \quad U_S(\phi) = \frac{1}{2} \xi_S \phi^2.$$

Здесь: $A = \int_V p_i u_i dV + \oint_S P_i u_i dS$ — работа внешних объемных (p_i) и поверхностных (P_i) сил на перемещениях u_i деформируемого тела; U — энергия деформации; U_V — объемная плотность энергии деформации и свободных деформаций; U_S — поверхностная плотность энергии свободных деформаций; $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ — тензор бесконечно малых деформаций, связанный с перемещениями классическими соотношениями Коши; $\theta = \varepsilon_{ii}$ — объемная деформация; $\phi = P_R - P$ — изменение объемного содержания матрицы материала (микро-дилатация) в произвольной точке среды; P_R, P — объемное содержание пор в среде до и после деформирования, соответственно; λ, μ — параметры Ламе; β, ξ, α — дополнительные материальные константы дилатационной теории; ξ_S — неклассический поверхностный параметр, определяющий дефектность поверхности среды [27, 28]. По повторяющимся индексам производится суммирование, запятая перед нижним индексом означает производную по соответствующей координате.

Учет дефектности поверхности среды через введение поверхностной плотности энергии свободных деформаций $U_S(\phi)$ впервые предложен в [27, 28]. В этих работах модель (1) представлена в обозначениях теории сред с сохраняющимися дислокациями, в качестве кинематических переменных используются стесненные и свободные деформации изменения объема (стесненная и свободная микродилатация) частиц среды. В работе [28] приведена структура общего решения задачи дилатационной теории и дана оценка эффективных свойств среды через объемное содержание пористости с учетом влияния поверхностных свойств. При этом имеет место соответствие между моделью с полями дефектов и моделью градиентной теории упругости, в которой градиент деформации определяется лишь объемной составляющей. Этот факт легко устанавливается при введении обобщенной гипотезы Аэро–Кувшинского [28].

В общем случае модель дилатационной теории упругости записывается с учетом динамических эффектов, а работа внешних сил сама по себе может включать вклад от нагрузок, действующих на вариациях неклассических кинематических переменных [5]. В настоящей работе такие постановки задач не рассматриваются.

Соотношения для классического тензора напряжений (σ_{ij}), неклассических скалярной (g) и векторной (h_i) функций напряжений и поверхностных напряжений (поверхностного натяжения g_S) могут быть получены из (1) на основании формул Грина:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta \phi \delta_{ij}, \quad (2)$$

$$-g = \frac{\partial U_V}{\partial \phi} = \xi \phi + \beta \varepsilon_{kk}, \quad (3)$$

$$h_i = \frac{\partial U_V}{\partial \phi_{,i}} = \alpha \phi_{,i}, \quad (4)$$

$$g_S = \frac{\partial U_S}{\partial \phi} = \xi_S \phi. \quad (5)$$

Физический смысл неклассических напряжений (3) и (4) обсуждался, например, в работах [4, 31–33]. Введение отрицательного знака в (3) обусловлено обозначениями, предложенными в [5]. Из положительной определенности квадратичной формы объемной плотности энергии деформаций следуют допустимые значения физических параметров модели:

$$\mu > 0, \quad \lambda + 2\mu/3 > 0, \quad \xi > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta^2 < \xi(\lambda + 2\mu/3). \quad (6)$$

Таким образом, на параметры Ламе накладываются такие же ограничения, как и в классической теории упругости. Неклассические материальные константы ξ и α , которые иногда называют «собственной жесткостью» и параметром диффузии пор [31], должны быть положительными. Квадрат модуля β , характеризующего связанные эффекты, должен быть меньше произведения классического объемного модуля $K = (\lambda + 2\mu/3)$ и неклассического модуля ξ . На основании этого для удобства вычислений обычно вводится параметр связанности модели: $N = \beta^2 / (K\xi)$, $N \in [0, 1)$. В случае $N = 1$ жесткость среды при действии всестороннего растяжения или сжатия становится равной нулю, поэтому это значение не может быть включено в область допустимых значений параметра связанности модели.

Вариационная формулировка (1), позволяет установить энергетически согласованные определяющие соотношения и уравнения равновесия модели и записать краевую задачу с полным набором естественных граничных условий. Форма (1) для объемной плотности энергии деформаций изотропной среды с учетом свободной дилатации является общепринятой в рамках рассматриваемой теории [5, 31]. Перейдя в (1) к перемещениям и применив вариационный принцип Лагранжа и интегрирование по частям, получим:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = 0: \\ \int_V \left[((\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{ii,kk} + \beta\phi_{,i} + p_i)\delta u_i + (\alpha\phi_{,kk} - \xi\phi - \beta u_{k,k})\delta\phi \right] dV + \\ + \oint_S \left[(P_i - (\lambda u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \beta\phi\delta_{ij}))n_j\right]\delta u_i - (\alpha\phi_{,k}n_k + \xi_S\phi)\delta\phi \Big] dS = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует постановка краевой задачи дилатационной теории упругости в кинематических переменных:

– уравнения равновесия

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{ii,kk} + \beta\phi_{,i} + p_i = 0, \quad x_i \in V, \quad (7)$$

$$\alpha\phi_{,kk} - \xi\phi - \beta u_{k,k} = 0, \quad x_i \in V; \quad (8)$$

– граничные условия

$$(\lambda u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \beta\phi\delta_{ij})n_j = P_i, \quad x_i \in S_\sigma, \quad (9)$$

$$\alpha\phi_{,k}n_k + \xi_S\phi = 0, \quad x_i \in S_h, \quad (10)$$

$$u_i = u_i^0, \quad x_i \in S_u,$$

$$\phi = \phi^0, \quad x_i \in S_\phi.$$

Здесь $S_\sigma, S_h, S_u, S_\phi$ — части поверхности тела, на которых заданы, соответственно, статические граничные условия для классических и неклассических напряжений и кинематические граничные условия для перемещений и свободной дилатации.

В качестве граничных условий для свободной дилатации обычно используются граничные условия второго рода без учета поверхностных эффектов:

$$\phi_{,k}n_k = 0, \quad x_i \in S_h \equiv S. \quad (11)$$

3. Решение задачи чистого изгиба балки

Аналитическое решение задачи чистого изгиба балки в рамках дилатационной теории упругости построено в работе [4] и обобщено на случай динамической постановки в [38]. Как отмечается в [5, 9], это решение является приближенным, так как при его получении введен ряд упрощающих гипотез. Далее в кратком виде приведем алгоритм построения решения с помощью полуобратного метода Сен-Венана [5].

Рассмотрим балку длиной L с прямоугольным поперечным сечением шириной $2w$ и толщиной $2h$ (Рис. 1). Объемная нагрузка отсутствует. Верхняя и нижняя поверхности балки свободны от нагрузки,

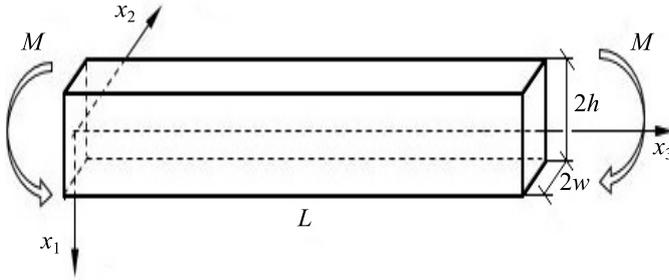


Рис. 1. Схема чистого изгиба балки

и на них задаются условия равенства нулю соответствующих компонент тензора напряжений и вектора неклассических напряжений:

$$x_1 = \pm h :$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0, \quad (12)$$

$$h_1 = 0 \Rightarrow \phi_{,1} = 0. \quad (13)$$

Балка нагружается моментами M , приложенными на ее торцах. Все остальные равнодействующие усилия (продольные и поперечные силы) и моменты на боковых и торцевых поверхностях балки равняются нулю. Предположим, что торцевые и боковые поверхности балки остаются плоскими, и используем следующие граничные условия:

$$x_3 = 0, L: \quad 2w \int_{-h}^{+h} x_1 \sigma_{33} dx_1 = -M, \quad (14)$$

$$x_2 = \pm w: \quad \int_{-w}^{+w} \int_{-h}^{+h} x_1 \sigma_{22} dx_1 = 0. \quad (15)$$

Для построения решения полубратным методом будем считать, что функции напряжений, свободной дилатации и, следовательно, деформаций изменяются только по толщине балки (по координате x_1). Далее, на основе анализа уравнений равновесия (7), (8) с учетом вида функций напряжений (2)–(5) и граничных условий (14), (15) путем интегрирования соотношений Коши приходим к следующему представлению искомых функций перемещений, напряжений и деформаций [5]:

$$u_1 = -C_1 \frac{x_3^2}{2} - C_2 \frac{x_2^2}{2} + \int \varepsilon_{11}(x_1) dx_1, \quad u_2 = C_2 x_1 x_2, \quad u_3 = C_1 x_1 x_3, \quad (16)$$

$$\sigma_{22}(x_1) = 2\mu(C_2 x_1 - \varepsilon_{11}(x_1)), \quad (17)$$

$$\sigma_{33}(x_1) = 2\mu(C_1 x_1 - \varepsilon_{11}(x_1)), \quad (18)$$

$$\varepsilon_{11}(x_1) = -\frac{\nu}{1-\nu}(C_1 + C_2)x_1 - \frac{\beta}{\lambda + 2\mu}\phi(x_1), \quad (19)$$

$$h_1(x_1) = \alpha \phi_{,1}(x_1).$$

Остальные компоненты тензора и вектора напряжений равняются нулю, а компоненты тензора деформаций могут быть установлены через перемещения (16) на основании соотношений Коши.

Таким образом, задача сведена к определению функции свободной дилатации $\phi(x_1)$ и двух констант — C_1 и C_2 . Для этого решаем неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение, в которое преобразуется неклассическое уравнение равновесия (8) с учетом (16), (19) и граничных условий (13). Найдем распределение свободной дилатации по толщине балки:

$$\phi(x_1) = -RH(C_1 + C_2)\ell \left(\frac{x_1}{\ell} - \frac{\text{sh}(x_1/\ell)}{\text{ch}(h/\ell)} \right). \quad (20)$$

Здесь введены обозначения: $R = \frac{2\mu\ell^2}{\alpha}$, $H = \frac{\beta}{\lambda + 2\mu}$, $\ell^2 = \frac{\alpha}{\xi - H\beta}$ [5].

Неизвестные константы C_1 , C_2 получим из граничных условий (14), (15), учитывая (17)–(20):

$$C_1 = -\frac{M}{EI} \frac{1 - J(1 + \nu)}{1 - 2J}, \quad C_2 = \frac{M}{EI} \frac{\nu - J(1 + \nu)}{1 - 2J}, \quad (21)$$

$$J = RH^2 \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \left(1 - 3 \frac{\ell^3}{h^3} \left(\frac{h}{\ell} - \text{th} \left(\frac{h}{\ell} \right) \right) \right). \quad (22)$$

Решение включает модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν , которые связаны с параметрами Ламе классическими соотношениями, а также $I = 4bh^3/3$ — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси x_2 .

Таким образом, выражения (16)–(22) представляют собой замкнутое приближенное аналитическое решение задачи чистого изгиба балки, построенное в рамках дилатационной теории упругости. Независимыми параметрами построенного решения являются размеры балки L , h , w , заданные моменты M , параметры Ламе и два неклассических параметра N и ℓ , через которые могут быть определены материальные константы дилатационной теории упругости. Анализ аналитического решения в сопоставлении с прямым численным решением, полученным методом конечных элементов, проводится ниже. Можно отметить, что в аналитическом решении напряжения $\sigma_{22}(x_1)$ и $h_1(x_1)$, которые в классическом решении отсутствуют, оказываются отличными от нуля в объеме и на внешних боковых поверхностях балки. Эти напряжения самоуравновешены и поэтому удовлетворяют используемым интегральным граничным условиям. Отсюда, однако, следует, что в реальности в точном решении задачи поверхности балки не должны оставаться плоскими [5].

Решение (16)–(22) выходит на классическое решение задачи теории упругости в том случае, если параметр связанности модели равняется нулю: $N = 0$ или $h/\ell \rightarrow 0$. Параметр ℓ имеет размерность длины, и его можно считать характерным размером микроструктуры или масштабным параметром материала. Можно показать (см. уравнение (8)), что с математической точки зрения ℓ обуславливает расстояние, на котором локальные эффекты в распределении микродилатации вблизи границы среды затухают в e раз. Значение этого масштабного параметра может коррелировать или с размером пор, или со средним расстоянием между порами, или с иными характеристиками микроструктуры, например с размером зерна поликристаллического материала. Поэтому условие $h/\ell \rightarrow 0$ соответствует случаю, когда толщина балки мала. Удлинение балки при этом может быть произвольным.

Аналогичным образом может быть построено решение задачи дилатационной теории с учетом дефектности поверхности балки. В этом случае вместо условия (13) необходимо прибегнуть к граничному условию типа (10). Представление решения, включающего поверхностные эффекты, полностью совпадает с (16)–(19) и (21), но вместо выражений вида (20) и (22) следует, соответственно, использовать:

$$\phi(x_1) = -RH(C_1 + C_2)\ell \left(\frac{x_1}{\ell} - \frac{\alpha + \xi_s h}{\alpha + \xi_s \ell} \frac{\text{sh}(x_1/\ell)}{\text{ch}(h/\ell)} \right), \quad (23)$$

$$J = RH^2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \left(1 - 3 \frac{\ell^3}{h^3} \frac{\alpha + \xi_s h}{\alpha + \xi_s \ell} \left(\frac{h}{\ell} - \text{th} \left(\frac{h}{\ell} \right) \right) \right). \quad (24)$$

При отсутствии поверхностных эффектов выполняется равенство $\xi_s = 0$, и выражения (23) и (24) совпадают с (20), (22).

4. Эффективная жесткость балки со свободной дилатацией частиц при чистом изгибе

На основании построенного аналитического решения можно определить эффективные характеристики жесткости балки при чистом изгибе. Для этого сопоставим НДС балки со свободной дилатацией и НДС эквивалентной ей классической балки. Приравняем перемещения точек центральной оси симметрии балки, найденные в рамках дилатационной и классической теории: $u_1(0, 0, x_3) = u_1^{class}(0, 0, x_3)$. Воспользовавшись решением (16) с учетом (21) и классическим решением теории упругости, получим соотношение

$$\frac{M}{2EI} \frac{1-J(1+\nu)}{1-2J} x_3^2 = \frac{M}{2E^*I} x_3^2,$$

откуда следует:

$$E^* = E \frac{1-2J}{1-J(1+\nu)}. \quad (25)$$

Здесь E^* — эффективный модуль упругости при чистом изгибе балки со свободной дилатацией частиц.

З а м е ч а н и е 1. Рассмотрим эффективную жесткость (25). В последнее время появилось большое количество публикаций, в которых обсуждается вопрос ее зависимости от толщины сверхтонких масштабозависимых (scale-depend) стержней, в которых масштабный параметр структуры соизмерим с толщиной. Для теоретического моделирования этого эффекта привлекается градиентная теория

упругости. Нетрудно видеть, что если в аналитическом выражении (25) устремить отношение h/ℓ к нулю, то J стремится к нулю и эффективная жесткость принимает в пределе классическое значение. Этот результат получен на основе аналитического, в определенном смысле точного, представления вдали от границ балки. Известные результаты моделирования масштабозависимых стержней с помощью градиентных теорий и формального использования вариационных подходов, в которых эффективная изгибная жесткость возрастает по гиперболическому закону при $h/\ell \rightarrow 0$, противоречат найденной аналитической оценке. По-видимому, зависимость от масштаба в сверхтонких системах обуславливается не градиентным эффектом, а влиянием поведения поверхности балки.

Прийти к соотношению (25) можно также, если приравнять решения дилатационной и классической теорий для углов поворота поперечных сечений балки ($u_{1,3} = u_{1,3}^{class}$) или для продольных деформаций на верхней (нижней) поверхностях балки ($\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^{class}$). Указанные величины могут быть напрямую измерены в эксперименте на чистый изгиб. Установить опытным путем значения вертикальных перемещений возможно только для точек, расположенных на внешней поверхности балки. Поэтому, если в эксперименте жесткость балки устанавливается по перемещениям, то представление (25) является точным только для балок малой толщины, так как предполагает измерение перемещений на упругой оси балки. Однако уточнение формулы (25) путем определения перемещений точек балки, расположенных на ее внешней поверхности, дает незначительные поправки, которыми можно пренебречь.

Аналогичным образом введем эффективный коэффициент Пуассона, характеризующий поперечные деформации балки со свободной дилатацией при чистом изгибе. Для этого приравняем поперечные деформации классической и дилатирующей балок: $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^{class}$. Получим:

$$C_2 x_1 = x_1 v^* \frac{M}{E^* I},$$

откуда с учетом (24) следует:

$$v^* = \frac{v - J(1+v)}{1 - J(1+v)}. \quad (26)$$

З а м е ч а н и е 2. При принятии во внимание ограничений на значения материальных констант дилатационной теории (1) и полученных выражений (25) и (26) эффективный модуль упругости изменяется в пределах $E^* \in (0, E]$, а эффективный коэффициент Пуассона в пределах $v^* \in (-1, v]$. Таким образом, в построенном решении сохраняются ограничения на допустимые значения характеристик жесткости среды, существующие в классической теории упругости. В (25) и (26) в явном виде входит отношение толщины балки к масштабному параметру материала h/ℓ . Поэтому аналитическое решение позволяет прогнозировать возникновение масштабных эффектов: характеристики жесткости балки со свободной дилатацией частиц будут зависеть от соотношения толщины и характерного размера микроструктуры материала балки. Масштабные эффекты при изменении ширины или длины балки отсутствуют. Выражения (25) и (26) также справедливы и для аналитического решения, построенного с учетом поверхностных эффектов и формулы (24) для вычисления параметра J . В этом случае в решении проявляются масштабные эффекты, связанные не только со свободной дилатацией в объеме балки, но и с влиянием поверхностных свойств.

5. Методика построения численного решения

При построении численного решения задачи чистого изгиба учтем симметрию и в силу этого рассмотрим одну четвертую часть балки, приведенной на рисунке 1. Геометрические размеры расчетной модели составляют $L/2 \times w \times 2h$.

Выберем следующие граничные условия:

– на левом торце модели балки зададим в качестве нагрузки линейное распределение нормальных напряжений:

$$x_3 = 0: \quad \sigma_{33} = -\frac{M}{I} x_1. \quad (27)$$

Такой вид граничного условия эквивалентен (14):

– на правом торце учтем условие симметрии

$$x_3 = L/2: \quad u_3 = 0, \quad \phi_{,3} = 0; \quad (28)$$

– на поверхности $x_2 = 0$ поставим второе условие симметрии

$$x_2 = 0: \quad u_2 = 0, \quad \phi_{,2} = 0; \quad (29)$$

– условия на свободных поверхностях балки S запишем в явном виде, в отличие от аналитического решения, где граничные условия формулировались относительно интегральных характеристик — усилий и моментов. Для этого соответствующие компоненты тензора классических напряжений и вектора неклассических напряжений примем равными нулю

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}n_j &= 0, \quad x_i \in S_\sigma \quad (ij \neq 33), \\ h_j n_j + g_s &= 0, \quad x_i \in S_h. \end{aligned}$$

Здесь: n_j — компоненты внешней единичной нормали к поверхностям балки S_σ и S_h , которые включают в себя боковую грань балки $x_2 = w$, верхнюю и нижнюю поверхности $x_1 = \pm h$ и торцевую поверхность $x_3 = 0$. При этом учитывается, что граничное условие для напряжений σ_{33} имеет вид (27).

В рассматриваемой постановке для исключения смещений балки как жесткого целого достаточно запретить вертикальные перемещения единственной точки балки. В построенном далее решении фиксировалась точка балки, расположенная в начале координат. Повороты как жесткого целого исключаются вследствие заданных условий симметрии (28) и (29).

Численное решение задачи строится в трехмерной постановке методом конечных элементов с использованием системы FlexPDE. Применяются тетраэдральные элементы второго порядка. Решение реализуется с помощью метода Ланцоша. Обсуждаемая краевая задача, по сути, полностью соответствует исходному варианту дилатационной модели (7)–(10), в том числе, и для балки с поверхностной дефектностью. На основании численного решения определяются НДС, перемещения точек и эффективные характеристики жесткости балки. Эффективный модуль упругости находится по перемещениям точки модели балки с координатами $x_1 = -h$, $x_2 = 0$, $x_3 = L/2$, так как именно в этой точке значение может быть измерено экспериментально. Для вычислений применяется стандартная формула балочной теории в пренебрежении деформациями поперечного сечения:

$$E^* = \frac{ML^2}{2ID}. \quad (30)$$

Здесь $D = u_1(-h, 0, L/2)$.

Эффективный коэффициент Пуассона балки устанавливается через отношение продольных и поперечных деформаций в этой же точке:

$$\nu^* = - \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} \Big|_{x_1=-h, x_2=0, x_3=L/2}. \quad (31)$$

Далее построенное численное решение и вычисленные эффективные характеристики балки будут сопоставляться с соответствующими величинами, найденными аналитически в разделе 4.

6. Результаты вычислений

В настоящем разделе проведем анализ неклассических эффектов, возникающих в численном решении задачи чистого изгиба балки в рамках дилатационной теории и сопоставим численные результаты с полученными аналитически в разделах 3 и 4. Для тестирования рассмотрим гипотетический материал с коэффициентом Пуассона 0,3. Величина модуля Юнга материала не существенна, так как все представленные результаты будем нормировать

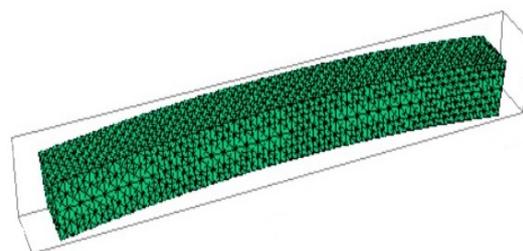


Рис. 2. Пример конечно-элементной сетки для решения задачи чистого изгиба балки

относительно классического решения. В численном решении величину модуля Юнга зададим равной 1000 МПа. Соотношения размеров сторон балки возьмем следующие: $w/h=2$, $L/h=20$. Параметр связанности модели N проварьировуем в пределах от 0 до 0,99, масштабный параметр модели — в пределах $10^{-4}h \leq \ell \leq 10^{-1}h$. Для построения решений в перемещениях зададим порядок точности до 10^{-6} , что обязывает строить достаточно мелкую конечно-элементную сетку (см. Рис. 2).

6.1. Трехмерное напряженное состояние дилатирующей балки при чистом изгибе

При чистом изгибе балки со свободной дилатацией частиц в ней реализуется трехмерное напряженное состояние, при котором отличными от нуля являются все компоненты тензора классических напряжений и вектора неклассических напряжений. На рисунках 3, 4 приведено распределение напряжений по поперечному сечению пористой балки. Точки соответствуют численному решению в узлах сетки, а сплошные линии — это аппроксимация. Балка имеет единичную толщину, изгибающий момент составляет $M = \sigma_0 I$, $\sigma_0 = 1$ МПа, масштабный параметр $\ell = 10^{-2}h$. Видно, что в численном решении граничные условия по напряжениям выполняются точно, и соответствующие компоненты напряжений на поверхности балки обнуляются. Возникающие неклассические напряжения (фактически это все компоненты тензора σ_{ij} , за исключением σ_{33} , и все компоненты h_j) оказываются самоуравновешенными. При этом их амплитуда очень мала в широком диапазоне значений параметров модели.

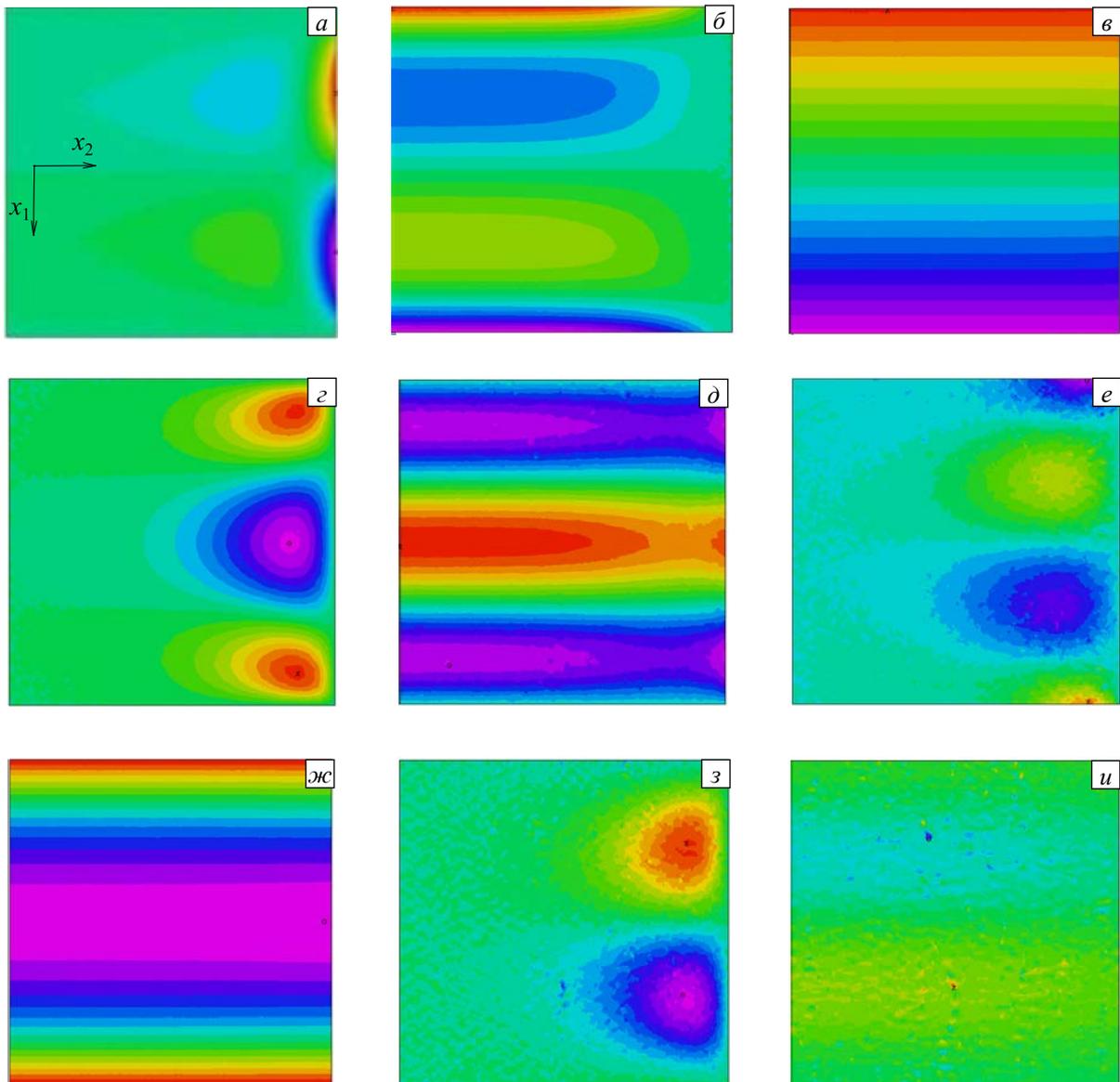


Рис. 3. Характер распределения напряжений по поперечному сечению модельной балки $0 \leq x_2 \leq w$, $0 \leq x_1 \leq h$ при $N=0,9$, $\ell/h=0,9$: σ_{11} (а), σ_{22} (б), σ_{33} (в), σ_{12} (г), σ_{13} (д), σ_{23} (е), h_1 (ж), h_2 (з), h_3 (и)

На рисунках 3, 4 представлены результаты для тестового материала с высоким параметром связанности: $N=0,9$, но даже в этом случае получается, что по отношению к продольным напряжениям σ_{33} напряжения в трансверсальных направлениях σ_{11} и σ_{22} имеют порядок 10^{-2} , а порядок касательных напряжений 10^{-4} , поэтому они вычисляются с большой погрешностью (см. Рис. 3з–е). Неклассические напряжения h_2 и h_3 (их порядок 10^{-2}) существенно меньше напряжений h_1 , присутствующих в аналитическом решении. Вследствие такого разброса значений напряжений достаточно сложно получить хорошее качество рисунков. Решение на рисунках 3 и 4 получено в результате двухчасового расчета на стандартном персональном компьютере. Заметим, что граничные эффекты в распределении классических напряжений σ_{22} сводятся к тому, что на поверхности балки эти напряжения обращаются в нуль, а вдали от поверхности выходят на аналитическое решение.

Таким образом, на рисунках 3, 4 наглядно продемонстрировано выполнение принципа Сен-Венана в дилатационной теории упругости: граничные условия, сформулированные относительно напряжений в численном решении или в интегральной форме в аналитическом решении, вызывают одинаковое напряженное состояние вдали от границ.

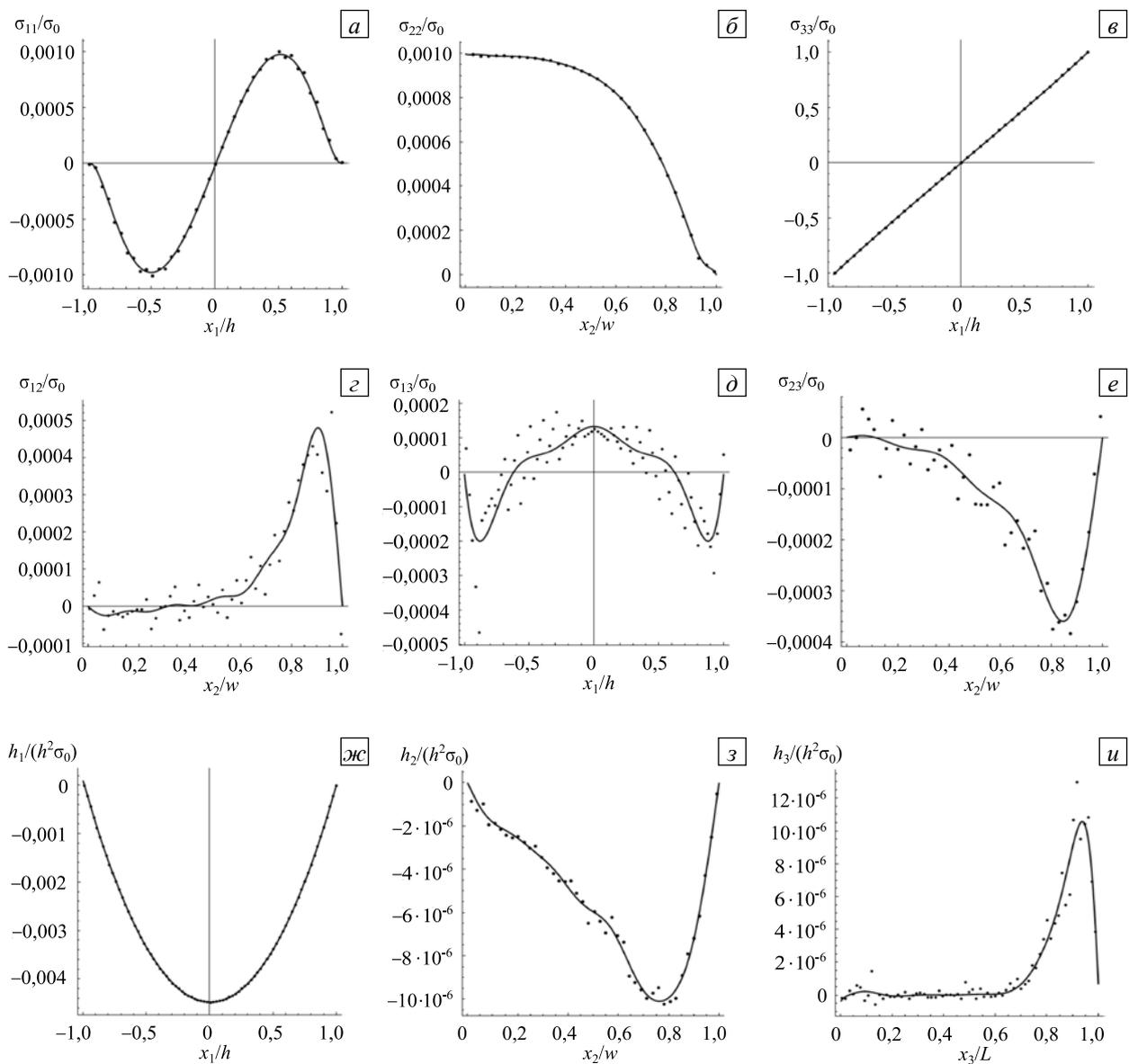


Рис. 4. Распределение напряжений в сечении модельной балки $0 \leq x_2 \leq w$, $0 \leq x_1 \leq h$ при $N=0,9$, $\ell/h=0,9$: нормальных σ_{11}/σ_0 (а), σ_{22}/σ_0 (б), σ_{33}/σ_0 (в); касательных σ_{12}/σ_0 (г), σ_{13}/σ_0 (д), σ_{23}/σ_0 (е); неклассических $h_1/(h^2\sigma_0)$ (ж), $h_2/(h^2\sigma_0)$ (з), $h_3/(h^2\sigma_0)$ (и)

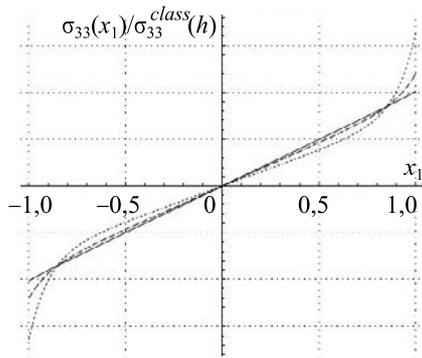


Рис. 5. Распределение продольных напряжений σ_{33} в сечении балки при $\ell/h = 10^{-2}$

Для напряжений σ_{33} , действующих вдоль оси балки x_3 , на рисунке 5 представлены аналитическое и численное решения в центральном поперечном сечении при различных параметрах связанности модели. Решения сходятся с высокой точностью. Продольные напряжения на верхней и нижней поверхностях балки в дилатационной задаче растут, однако этот эффект оказывается значительным только для больших параметров связанности модели. В численном решении при приближении к торцам балки продольные напряжения снижаются и выходят на заданное линейное распределение. Таким образом, аналитическое решение позволяет оценить максимальные продольные напряжения в балке, которые являются наиболее существенными и определяют ее прочностные характеристики.

6.2. Деформация сечений и внешних поверхностей балки

В численном решении, в отличие от классического в рамках теории упругости и аналитического (16), происходит искривление боковых и торцевых поверхностей балки — деформация. В результате распределение перемещений отклоняется от линейного закона. По сравнению с вертикальными перемещениями балки перемещения точек вследствие деформации ее сечений оказываются малыми величинами даже при высоких значениях параметра связанности. На рисунке 6 представлен характер искривления центрального поперечного сечения балки для исходных данных, приведенных в начале раздела 6. Для наглядности деформации увеличены в 50 раз. На рисунке 6б дополнительно задано 10-кратное увеличение.

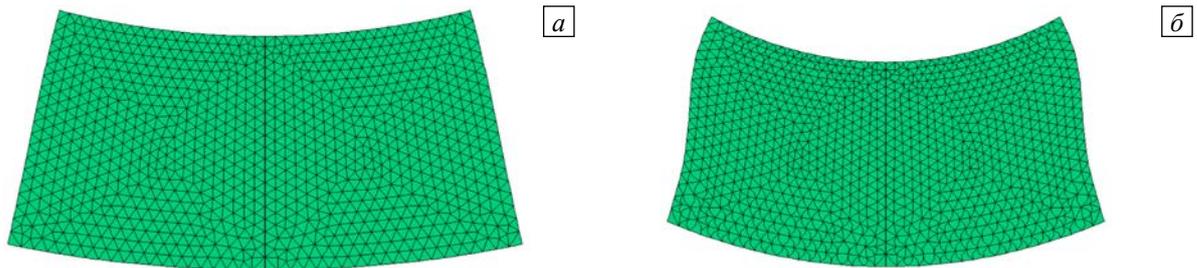


Рис. 6. Вид поперечного сечения балки со свободной дилатацией при $N = 0,9$, $\ell/h = 0,9$ в 50-кратном увеличении (а) и с дополнительным увеличением искривления поперечных сечений в 10 раз (б)

6.3. Эффективные характеристики жесткости балки

На рисунке 7 представлены аналитическое (по формулам (25), (26)) и численное (согласно (30), (31)) решения для эффективных модуля упругости E^*/E и коэффициента Пуассона ν^* балки в зависимости от параметра связанности N и относительной толщины балки ℓ/h . Видно, что приближенные

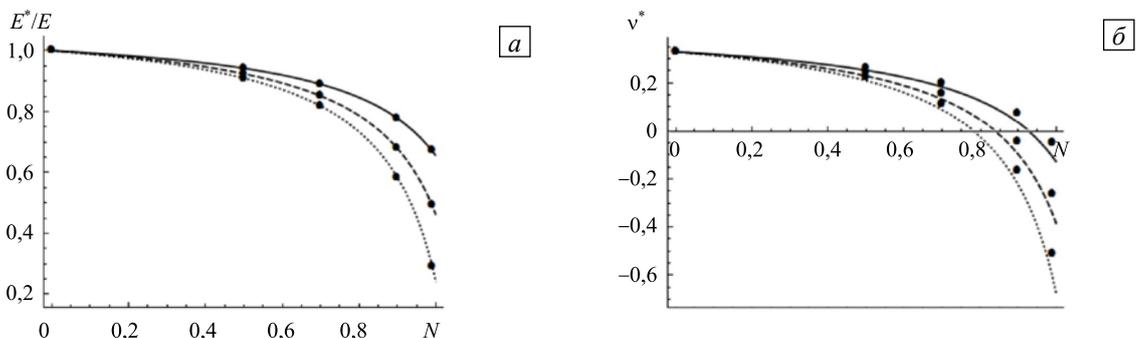


Рис. 7. Влияние параметра связанности (а, б) и толщины (в, г) на эффективный модуль упругости (а, в) и коэффициент Пуассона (б, г) балки со свободной дилатацией: аналитическое (линии) и численное (●) решения, при этом сплошная линия – $\ell = h/2$, штриховая – $\ell = h/3$, пунктирная – $\ell = h/5$

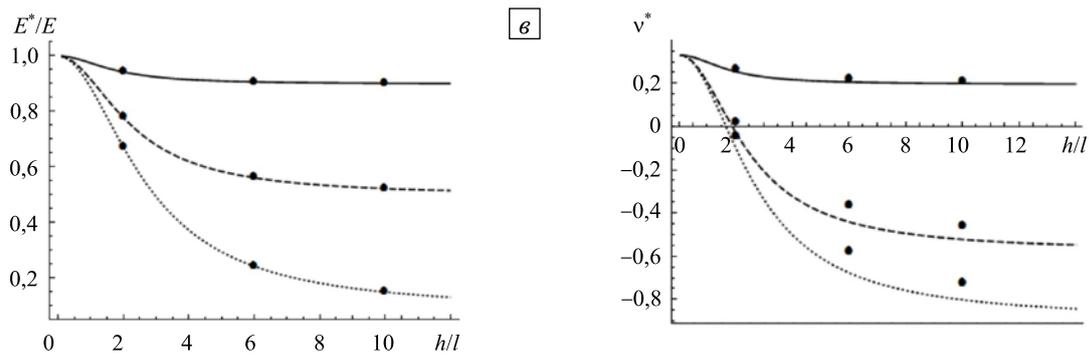


Рис. 7. Продолжение

аналитические формулы позволяют получать точные прогнозы модуля упругости для всего диапазона значений неклассических параметров модели. Для коэффициента Пуассона погрешность становится больше, что обусловлено, по всей видимости, накоплением ошибки дифференцирования при вычислении деформаций в численном решении. В аналитическом и численном решениях проявляется масштабный эффект: модуль упругости и коэффициент Пуассона более толстых балок оказываются ниже по сравнению с характеристиками тонких балок. При больших параметрах связанности модель описывает поведение материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона, которые одновременно характеризуются и низкой жесткостью. Таким классом материалов могут являться высокопористые или вспененные материалы-ауксетики [7, 8, 36].

Нетрудно показать, что аналитическая формула (25) достаточно хорошо прогнозирует влияние неклассических параметров на жесткость балки не только в задаче чистого изгиба, но и в других экспериментах на изгиб (трехточечном, четырехточечном, консольном). Поэтому испытания такого рода могут применяться для идентификации неклассических параметров модели.

6.4. Влияние поверхностных эффектов

Решение с учетом поверхностных эффектов позволяет учесть дополнительное неклассическое изменение напряженно-деформированного состояния и эффективной жесткости балки. На рисунке 8

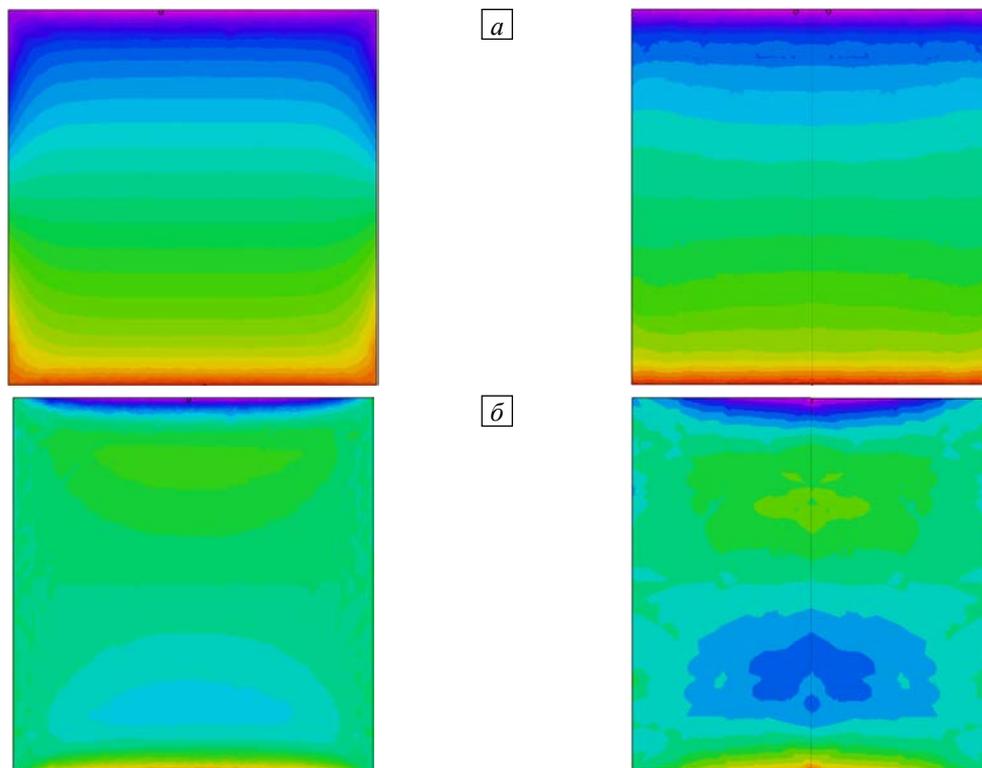


Рис. 8. Распределения продольных (а) и поперечных (б) напряжений и микродилатации (в) в поперечном сечении балки при численном решении с учетом дефектности поверхности слева при $\xi_s > 0$, справа при $\xi_s < 0$

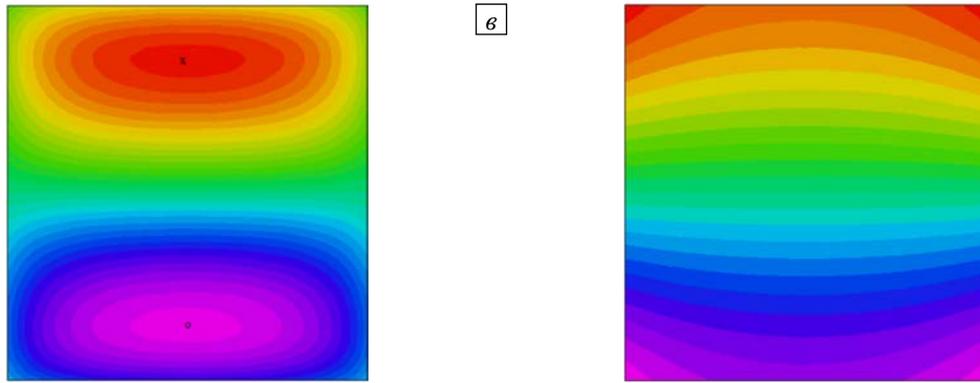


Рис. 8. Продолжение

приведено распределение продольных и поперечных напряжений в среднем поперечном сечении балки при действии на ее поверхностях напряжений. Можно проследить, что, в отличие от решения без поверхностных эффектов, микродилатация (или пористость) изменяется неравномерно не только по толщине, но и по ширине балки. Рисунок 9 содержит зависимость эффективного модуля упругости балки от значения поверхностного модуля ξ_S , найденную в результате аналитических и численных расчетов.

В случае его положительных значений эффективная жесткость увеличивается, а при отрицательных значениях — снижается. Зависимость эффективного модуля от толщины балки представлена на рисунке 10. Видно, что при отрицательных значениях поверхностного модуля появляется возможность моделировать отрицательный масштабный эффект в изменении жесткости пористой балки. Отличие численного и аналитического решений (точки и сплошные линии) связано с тем, что в численном решении учитывается наличие дефектности всех поверхностей балки, а в аналитическом — только верхней и нижней.

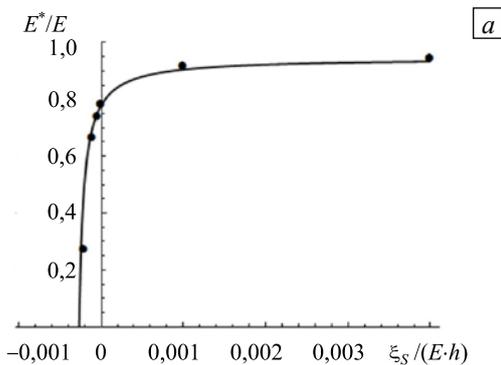


Рис. 9. Влияние поверхностного модуля ξ_S на эффективный модуль упругости балки при $N = 0,9$, $\ell = h/2$ в аналитическом (сплошная линия) и численном (•) решениях

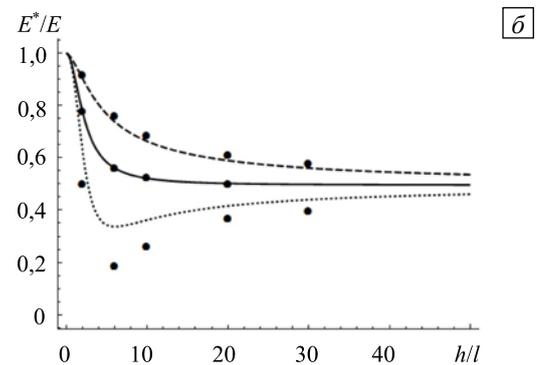


Рис. 10. Влияние толщины балки со свободной дилатацией на эффективный модуль упругости при $N = 0,9$ и различном значении дефектности поверхности ξ_S , Н/мм: 0 (сплошная линия), 1 (штриховая линия), – 0,15 (пунктирная линия); линии соответствуют аналитическому решению, символы • – численному

7. Заключение

1. Представлена вариационная формулировка модели дилатационной теории упругости, учитывающая дефектность поверхности среды.

2. С использованием метода конечных элементов построено численное решение задачи чистого изгиба в трехмерной постановке дилатационной теории упругости с учетом поверхностных эффектов.

3. Выявлено, что вдали от внешних поверхностей балки известное аналитическое решение задачи чистого изгиба балки со свободной дилатацией в точности совпадает с численным. При численном решении граничные условия задачи по напряжениям выполняются в каждой точке на свободных поверхностях балки, в то время как при аналитическом решении они задаются в интегральной форме относительно усилий и моментов. Вследствие этого при численном решении возникает деформация сечений, и НДС балки изменяется не только в по ее толщине, но и в поперечном направлении.

4. Показано, что аналитическое решение для оценки напряженного состояния и эффективных упругих характеристик балки со свободной дилатацией оказывается достаточно точным по отношению к построенному прямому численному решению в широком диапазоне значений неклассических

параметров модели. Поэтому имеющиеся аналитические выражения возможно использовать для прогноза масштабных эффектов в испытаниях на изгиб пористых балок различной толщины. Масштабные эффекты могут существенным образом сказываться как на жесткости, так и на прочности пористых балок, поэтому испытания на изгиб могут служить средством идентификации дополнительных параметров дилатационной теории упругости.

5. Представлено аналитическое решение задачи чистого изгиба балки с учетом дефектности поверхности среды. Проведено сопоставление построенного аналитического и численного решений. Обнаружено, что введение в модель поверхностной дефектности позволяет учесть дополнительное снижение или повышение жесткости балки.

6. Из аналитического и численного решений следует, что при уменьшении толщины балок со свободной дилатацией их жесткость возрастает. Однако, с точки зрения физического смысла, рассмотренная модель не может применяться для балок, толщина которых сопоставима с масштабным параметром микроструктуры материала или с размером пор. Кроме этого, для балок малой толщины определяющую роль могут играть поверхностные эффекты. Поэтому возможно существование некоторой оптимальной толщины, которая обеспечивает наиболее высокую жесткость и прочность балки со свободной дилатацией.

7. Решение в рамках дилатационной теории упругости может быть полезным для уточненного описания напряженно-деформированного состояния пористых сред и, в частности, метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона.

Литература

1. Миндлин Р.Д. Микроструктура в линейной упругости // Механика. – 1964. – № 4. – С. 129-160. (English version [DOI](#)).
2. Марков К.З. К теории упругости сред со свободной дилатацией частиц // Теоретическая и прикладная механика. – 1974. – Т. 6, № 1. – С. 93-99.
3. Nunziato J.W., Cowin S.C. A nonlinear theory of elastic materials with voids // Arch. Rational Mech. Anal. – 1979. – Vol. 72, no. 2. – P. 175-201. [DOI](#)
4. Markov K.Z. On the dilatation theory of elasticity // ZAMM. – 1981. – Vol. 61, no. 8. – P. 349-358. [DOI](#)
5. Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids // J. Elasticity. – 1983. – Vol. 13, no. 2. – P. 125-147. [DOI](#)
6. Markov K.Z. On a microstructural model of damage in solids // Int. J. Eng. Sci. – 1995. – Vol. 33, no. 1. – P. 139-150. [DOI](#)
7. Thurieau N., Kouitat Njiwa R., Taghite M. The local point interpolation-boundary element method (LPI-BEM) applied to the solution of mechanical 3D problem of a microdilatation medium // Eur. J. Mech. A-Solid. – 2014. – Vol. 47. – P. 391-399. [DOI](#)
8. Ciarletta M., Chiriță S., Passarella F. Some results on the spatial behaviour in linear porous elasticity // Arch. Mech. – 2005. – Vol. 57, no. 1. – P. 43-65.
9. Dell'Isola F., Batra R.C. Saint-Venant's problem for porous linear elastic materials // J. Elasticity. – 1997. – Vol. 47, no. 1. – P. 73-81. [DOI](#)
10. Ieșan D., Scalia A. On the deformation of functionally graded porous elastic cylinders // J. Elasticity. – 2007. – Vol. 87, no. 2. – P. 147-159. [DOI](#)
11. Ghiba I. Semi-inverse solution for Saint-Venant's problem in the theory of porous elastic materials // Eur. J. Mech. A-Solid. – 2008. – Vol. 27, no. 6. – P. 1060-1074. [DOI](#)
12. Cowin S.C. The stresses around a hole in a linear elastic material with voids // Q. J. Mechanics Appl. Math. – 1984. – Vol. 37, no. 3. – P. 441-465. [DOI](#)
13. Cowin S.C., Puri P. The classical pressure vessel problems for linear elastic materials with voids // J. Elasticity. – 1983. – Vol. 13, no. 2. – P. 157-163. [DOI](#)
14. Batra R.C., Yang J.S. Saint-Venant's principle for linear elastic porous materials // J. Elasticity. – 1995. – Vol. 39, no. 3. – P. 265-271. [DOI](#)
15. Ieșan D. A theory of thermoelastic materials with voids // Acta Mechanica. – 1986. – Vol. 60, no. 1. – P. 67-89. [DOI](#)
16. Ieșan D. Some theorems in the theory of elastic-materials with voids // J. Elasticity. – 1985. – Vol. 15, no. 2. – P. 215-224. [DOI](#)
17. Chandrasekharaiah D.S., Cowin S.C. A complete solution for a unified system of field equations of thermoelasticity and poroelasticity // Acta Mechanica. – 1993. – Vol. 99, no. 1. – P. 225-233. [DOI](#)
18. Chandrasekharaiah D.S., Cowin S.C. Unified complete solutions for the theories of thermoelasticity and poroelasticity // J. Elasticity. – 1989. – Vol. 21, no. 1. – P. 121-126. [DOI](#)
19. Bîrsan M. A bending theory of porous thermoelastic plates // J. Therm. Stresses. – 2003. – Vol. 26, no. 1. – P. 67-90. [DOI](#)
20. Bîrsan M., Altenbach H. On the theory of porous elastic rods // Int. J. Solids Struct. – 2011. – Vol. 48, no. 6. – P. 910-924. [DOI](#)
21. Ciarletta M., Iovane G., Sumbatyan M.A. On stress analysis for cracks in elastic materials with voids // Int. J. Eng. Sci. – 2003. – Vol. 41, no. 20. – P. 2447-2461. [DOI](#)

22. Popuzin V., Pennisi M. Fast numerical method for crack problem in the porous elastic material // *Meccanica*. – 2014. – Vol. 49, no. 9. – P. 2169-2179. DOI
23. Scalia A. Contact problem for porous elastic strip // *Int. J. Eng. Sci.* – 2002. – Vol. 40, no. 4. – P. 401-410. DOI
24. Pompei A., Rigano A., Sumbatyan M.A. Contact problem for a rectangular punch on the porous elastic half-space // *J. Elasticity*. – 2005. – Vol. 76, no. 1. – P. 1-19. DOI
25. Chandrasekharaiah D.S. Effects of surface stresses and voids on rayleigh waves in an elastic solid // *Int. J. Eng. Sci.* – 1987. – Vol. 25, no. 2. – P. 205-211. DOI
26. Lurie S.A., Kalamkarov A.L. General theory of defects in continuous media // *Int. J. Solids Struct.* – 2006. – Vol. 43, no. 1. – P. 91-111. DOI
27. Lurie S.A., Kalamkarov A.L. General theory of continuous media with conserved dislocations // *Int. J. Solids Struct.* – 2007. – Vol. 44, no. 22-23. – P. 7468-7485. DOI
28. Лурье С.А., Белов П.А. Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро–Кувшинского, пористые среды, среды с «двойникованием» // *Современные проблемы механики гетерогенных сред: Сб. науч. тр. – Изд-во ИПРИМ РАН, 2005. – С. 235-267.*
29. Iovane G., Nasedkin A.V. Finite element analysis of static problems for elastic media with voids // *Comput. Struct.* – 2005. – Vol. 84, no. 1-2. – P. 19-24. DOI
30. Iovane G., Nasedkin A.V. Finite element dynamic analysis of anisotropic elastic solids with voids // *Comput. Struct.* – 2009. – Vol. 87, no. 15-16. – P. 981-989. DOI
31. Ramézani H., Steeb H., Jeong J. Analytical and numerical studies on Penalized Micro-Dilatation (PMD) theory: Macro-micro link concept // *Eur. J. Mech. A-Solid*. – 2012. – Vol. 34. – P. 130-148. DOI
32. Jeong J., Sardini P., Ramézani H., Siitari-Kauppi M., Steeb H. Modeling of the induced chemo-mechanical stress through porous cement mortar subjected to CO₂: Enhanced micro-dilatation theory and ¹⁴C-PMMA method // *Comp. Mater. Sci.* – 2013. – Vol. 69. – P. 466-480. DOI
33. Jeong J., Ramézani H., Sardini P., Kondo D., Ponson L., Siitari-Kauppi M. Porous media modeling and micro-structurally motivated material moduli determination via the micro-dilatation theory // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* – 2015. – Vol. 224, no. 9. – P. 1805-1816. DOI
34. Ramézani H., Jeong J. Non-linear elastic micro-dilatation theory: Matrix exponential function paradigm // *Int. J. Solids Struct.* – 2015. – Vol. 67-68. – P. 1-26. DOI
35. Thurieau N., Njiwa K.R., Taghite M. The local point interpolation-boundary element method (LPI-BEM) applied to the solution of mechanical 3D problem of a microdilatation medium // *Eur. J. Mech. A-Solid*. – 2014. – Vol. 47. – P. 391-399. DOI
36. Lakes R.S. Experimental microelasticity of two porous solids // *Int. J. Solids Struct.* – 1986. – Vol. 22, no. 1. – P. 55-63. DOI
37. Ieşan D. Second-order effects in the torsion of elastic materials with voids // *ZAMM*. – Vol. 85, no. 5. – P. 351-365. DOI
38. Lazar M., Maugin G.A. On microcontinuum field theories: the Eshelby stress tensor and incompatibility conditions // *Philos. Mag.* – 2007. – Vol. 87, no. 25. – P. 3853-3870. DOI
39. Cowin S.C. A note on the problem of pure bending for linear elastic materials with voids // *J. Elasticity*. – 1984. – Vol. 14, no. 2. – P. 227-233. DOI

References

1. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1964, vol. 16, no. 1, pp. 51-78. DOI
2. Markov K.Z. К теории упругости сред со свободной дилатацией частиц [To the theory of elasticity of media with free particles dilatation]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika – Theoretical and Applied Mechanics*, 1974, vol. 6, no. 1, pp. 93-99.
3. Nunziato J.W., Cowin S.C. A nonlinear theory of elastic materials with voids. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1979, vol. 72, no. 2, pp. 175-201. DOI
4. Markov K.Z. On the dilatation theory of elasticity. *ZAMM*, 1981, vol. 61, no. 8, pp. 349-358. DOI
5. Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids. *J. Elasticity*, 1983, vol. 13, no. 2, pp. 125-147. DOI
6. Markov K.Z. On a microstructural model of damage in solids. *Int. J. Eng. Sci.*, 1995, vol. 33, no. 1, pp. 139-150. DOI
7. Thurieau N., Kouitat Njiwa R., Taghite M. The local point interpolation-boundary element method (LPI-BEM) applied to the solution of mechanical 3D problem of a microdilatation medium. *Eur. J. Mech. A-Solid*, 2014, vol. 47, pp. 391-399. DOI
8. Ciarletta M., Chiriță S., Passarella F. Some results on the spatial behaviour in linear porous elasticity. *Arch. Mech.*, 2005, vol. 57, no. 1, pp. 43-65
9. Dell'Isola F., Batra R.C. Saint-Venant's problem for porous linear elastic materials. *J. Elasticity*, 1997, vol. 47, no. 1, pp. 73-81. DOI
10. Ieşan D., Scalia A. On the deformation of functionally graded porous elastic cylinders. *J. Elasticity*, 2007, vol. 87, no. 2, pp. 147-159. DOI
11. Ghiba I. Semi-inverse solution for Saint-Venant's problem in the theory of porous elastic materials. *Eur. J. Mech. A-Solid*, 2008, vol. 27, no. 6, pp. 1060-1074. DOI

12. Cowin S.C. The stresses around a hole in a linear elastic material with voids. *Q. J. Mechanics Appl. Math.*, 1984, vol. 37, no. 3, pp. 441-465. DOI
13. Cowin S.C., Puri P. The classical pressure vessel problems for linear elastic materials with voids. *J. Elasticity*, 1983, vol. 13, no. 2, pp. 157-163. DOI
14. Batra R.C., Yang J.S. Saint-Venant's principle for linear elastic porous materials. *J. Elasticity*, 1995, vol. 39, no. 3, pp. 265-271. DOI
15. Ieşan D. A theory of thermoelastic materials with voids. *Acta Mechanica*, 1986, vol. 60, no. 1, pp. 67-89. DOI
16. Ieşan D. Some theorems in the theory of elastic-materials with voids. *J. Elasticity*, 1985, vol. 15, no. 2, pp. 215-224. DOI
17. Chandrasekharaiah D.S., Cowin S.C. A complete solution for a unified system of field equations of thermoelasticity and poroelasticity. *Acta Mechanica*, 1993, vol. 99, no. 1, pp. 225-233. DOI
18. Chandrasekharaiah D.S., Cowin S.C. Unified complete solutions for the theories of thermoelasticity and poroelasticity. *J. Elasticity*, 1989, vol. 21, no. 1, pp. 121-126. DOI
19. Bîrsan M. A bending theory of porous thermoelastic plates. *J. Therm. Stresses*, 2003, vol. 26, no. 1, pp. 67-90. DOI
20. Bîrsan M., Altenbach H. On the theory of porous elastic rods. *Int. J. Solids Struct.*, 2011, vol. 48, no. 6, pp. 910-924. DOI
21. Ciarletta M., Iovane G., Sumbatyan M.A. On stress analysis for cracks in elastic materials with voids. *Int. J. Eng. Sci.*, 2003, vol. 41, no. 20, pp. 2447-2461. DOI
22. Popuzin V., Pennisi M. Fast numerical method for crack problem in the porous elastic material. *Meccanica*, 2014, vol. 49, no. 9, pp. 2169-2179. DOI
23. Scalia A. Contact problem for porous elastic strip. *Int. J. Eng. Sci.*, 2002, vol. 40, no. 4. – P. 401-410. DOI
24. Pompei A., Rigano A., Sumbatyan M.A. Contact problem for a rectangular punch on the porous elastic half-space. *J. Elasticity*, 2005, vol. 76, no. 1, pp. 1-19. DOI
25. Chandrasekharaiah D.S. Effects of surface stresses and voids on rayleigh waves in an elastic solid. *Int. J. Eng. Sci.*, 1987, vol. 25, no. 2, pp. 205-211. DOI
26. Lurie S.A., Kalamkarov A.L. General theory of defects in continuous media. *Int. J. Solids Struct.*, 2006, vol. 43, no. 1, pp. 91-111. DOI
27. Lurie S.A., Kalamkarov A.L. General theory of continuous media with conserved dislocations. *Int. J. Solids Struct.*, 2007, vol. 44, no. 22-23, pp. 7468-7485. DOI
28. Lurie S.A., Belov P.A. Teoriya sred s sokhranyayushchimisya dislokatsiyami. Chastnye sluchai: sredi Kossera i Aero-Kuvshinskogo, poristye sredi, sredi s «dvojnikovaniem» [Theory of media with conserved dislocations. Particular cases: the Cosserat and Aero-Kuvshinsky media, porous media, media with "twinning"], *Sovremennye problemy mekhaniki geterogennykh sred* [Modern problems of the mechanics of heterogeneous media]. Institute of Applied Mechanics RAS, 2005. Pp. 235-267.
29. Iovane G., Nasedkin A.V. Finite element analysis of static problems for elastic media with voids. *Comput. Struct.*, 2005, vol. 84, no. 1-2, pp. 19-24. DOI
30. Iovane G., Nasedkin A.V. Finite element dynamic analysis of anisotropic elastic solids with voids. *Comput. Struct.*, 2009, vol. 87, no. 15-16, pp. 981-989. DOI
31. Ramézani H., Steeb H., Jeong J. Analytical and numerical studies on Penalized Micro-Dilatation (PMD) theory: Macro-micro link concept. *Eur. J. Mech. A-Solid*, 2012, vol. 34, pp. 130-148. DOI
32. Jeong J., Sardini P., Ramézani H., Siitari-Kauppi M., Steeb H. Modeling of the induced chemo-mechanical stress through porous cement mortar subjected to CO₂: Enhanced micro-dilatation theory and ¹⁴C-PMMA method. *Comp. Mater. Sci.*, 2013, vol. 69, pp. 466-480. DOI
33. Jeong J., Ramézani H., Sardini P., Kondo D., Ponson L., Siitari-Kauppi M. Porous media modeling and micro-structurally motivated material moduli determination via the micro-dilatation theory. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2015, vol. 224, no. 9, pp. 1805-1816. DOI
34. Ramézani H., Jeong J. Non-linear elastic micro-dilatation theory: Matrix exponential function paradigm. *Int. J. Solids Struct.*, 2015, vol. 67-68, pp. 1-26. DOI
35. Thuriéau N., Njiwa K.R., Taghite M. The local point interpolation-boundary element method (LPI-BEM) applied to the solution of mechanical 3D problem of a microdilatation medium. *Eur. J. Mech. A-Solid.*, 2014, vol. 47, pp. 391-399. DOI
36. Lakes R.S. Experimental microelasticity of two porous solids. *Int. J. Solids Struct.*, 1986, vol. 22, no. 1, pp. 55-63. DOI
37. Ieşan D. Second-order effects in the torsion of elastic materials with voids. *ZAMM*, vol. 85, no. 5, pp. 351-365. DOI
38. Lazar M., Maugin G.A. On microcontinuum field theories: the Eshelby stress tensor and incompatibility conditions. *Philos. Mag.*, 2007, vol. 87, no. 25, pp. 3853-3870. DOI
39. Cowin S.C. A note on the problem of pure bending for linear elastic materials with voids. *J. Elasticity*, 1984, vol. 14, no. 2, pp. 227-233. DOI

Поступила в редакцию 06.09.2016; опубликована в электронном виде 30.06.2017

Сведения об авторах

Соляев Юрий Олегович, кфмн, снс, Институт прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН), 125040, Москва, Ленинградский проспект, д. 7, стр.1; e-mail: yos@iam.ras.ru

Лурье Сергей Альбертович, дтн, проф., гнс, ИПРИМ РАН; e-mail: lurie@ccas.ru

Волков Александр Владимирович, асп., мнс, ИПРИМ РАН; e-mail: volkov.9291@mail.ru