

DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.11  
УДК 534.1

## НЕУПРУГОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И РАСЩЕПЛЕНИЕ СОЛИТОНОВ ДЕФОРМАЦИИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СТЕРЖНЕ

В.И. Ерофеев<sup>1,2</sup>, В.В. Кажаяев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Российская Федерация

<sup>2</sup>Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

Дается краткий аналитический обзор публикаций, посвященных теоретическому изучению возможности формирования и особенностей распространения солитонов продольной деформации в нелинейно-упругих стержнях, а также экспериментальному обнаружению таких волн. Основное внимание уделяется изложению результатов оригинальных исследований взаимодействия солитонов. Путем численного моделирования показано, что качественно различные сценарии такого взаимодействия зависят от относительной скорости столкновения солитонов. Так, при малой скорости столкновение происходит по сценарию, свойственному классическим солитонам, описываемым уравнением Кортевега–де Вриза, то есть вторичные солитоны сохраняют те же скорость, амплитуду и ширину, что и первичные солитоны. При большей относительной скорости столкновение имеет неупругий характер: часть энергии солитонов теряется при воздействии их друг на друга и реализуется в пакеты квазигармонических волн, движущихся со скоростью линейной волны. Дальнейшее увеличение скорости столкновения приводит к эффекту расщепления солитонов, под которым авторы данной работы понимают образование большего, чем вступавшее в связь, количества вторичных солитонов. Кроме согласованного поведения солитонов между собой, исследовано их взаимодействие с границей стержня.

*Ключевые слова:* стержень, солитон деформации, взаимодействие, расщепление

## INELASTIC INTERACTION AND SPLITTING OF DEFORMATION SOLITONS PROPAGATING IN THE ROD

V.I. Erofeev<sup>1,2</sup> and V.V. Kazhaev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Mechanical Engineering Research Institute RAS, Nizhny Novgorod, Russian Federation

<sup>2</sup>Research Institute for Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

A brief analytical review of publications devoted to theoretical studies of the formation and peculiarities of distribution of longitudinal deformation solitons in nonlinear elastic rods and to experimental detection of such waves is given. The focus is on presenting the results of original research of the interaction of solitons. Numerical modeling shows that qualitatively different scenarios for this interaction depend on the relative speed of collision of solitons. At low collision velocity the interaction occurs according to the scenario of classical solitons described by the Korteweg–de Vries equation, i.e., the secondary solitons have the same speed, amplitude and width as the initial solitons. At higher relative speed the collision of solitons is inelastic in nature: part of their energy is lost in the interaction, being realized in the quasi-harmonic packets of waves moving with the speed of linear waves. A further increase in impact velocity leads to the effect of fragmentation of solitons, which is considered by the authors as the formation of a number of secondary solitons greater than that of interacted solitons. In addition to the interaction between solitons, the interaction of solitons with the rod boundary is investigated.

*Key words:* rod, soliton deformation, interaction, splitting

### 1. Введение

Из теории волн известно, что в одномерных системах все многообразие волновых процессов определяется соотношением нелинейности, дисперсии и диссипации. В двумерных и трехмерных системах к ним добавляется еще и явление дифракции. В случае, когда нелинейные, дисперсионные и дифракционные факторы уравновешивают друг друга, а диссипация мала, в системе могут формироваться уединенные нелинейные стационарные волны (солитоны), распространяющиеся с постоянной скоростью без изменения формы.

Согласно определению, данному в [1], «Солитон — структурно устойчивая уединенная волна в нелинейной диспергирующей среде. Солитоны ведут себя подобно частицам: при взаимодействии между собой и с некоторыми другими возмущениями солитоны не разрушаются, а расходятся вновь, сохраняя свою структуру неизменной». Термин «солитон» ввели в обращение Н. Забуски и М. Крускал в 1965 году [2]. Еще в 1834 году этот тип волны отметил Дж. Скотт Рассел при наблюдении волн в каналах.

Солитонное решение для длинных волн на поверхности жидкости было впервые получено Буссинеском (1872 г). Кортевег и де Вриз вывели уравнение, носящее их имена, и нашли решение в виде периодических (кноидальных) волн в 1895 г. После развития К. Гарднером, Д. Грином, М. Крускалом и Р. Миурой метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) в 1967 году [3] и выявления ряда полностью интегрируемых уравнений [4] интерес к солитонам рос непрерывно.

На фоне увеличивающегося внимания к солитонам, начиная с 1970-х годов, поднялся интерес к нелинейным волнам в стержне как к одному из наиболее доступных для изучения в экспериментальном плане объектов и в то же время широко используемому в технике [5–7].

Под стержнем принято понимать деформируемое твердое тело, имеющее два малых по сравнению с третьим размера и обладающее конечной жесткостью на растяжение, кручение и изгиб. Нормальные волны в стержнях подразделяются на три типа: продольные, крутильные и изгибные. В линейном приближении в прямолинейных стержнях различные типы волн взаимно не обусловлены [8]. В настоящей работе приводятся разные сценарии неупругого влияния солитонов друг на друга, зависящие от относительной скорости взаимодействия, полученные при численном моделировании.

## 2. Основные математические модели распространения нелинейных продольных уединенных волн (солитонов) в стержне

Классическая модель Д. Бернулли (техническая теория) предполагает, что при рассмотрении продольных колебаний стержня можно пренебречь как потенциальной энергией сдвиговых деформаций, так и кинетической энергией поперечных движений частиц стержня. Согласно этой теории линейные волны в стержне распространяются со скоростью  $c_0 = \sqrt{E/\rho}$  (где  $E$  — модуль упругости Юнга;  $\rho$  — плотность материала), не зависящей от частоты, следовательно, модель Д. Бернулли не позволяет описать геометрическую дисперсию продольных волн, наблюдаемую экспериментально [1].

Математические модели, предложенные Релеем и Лявом, Бишопом, Миндлиным и Германом (уточненные теории) [5], лишены этого недостатка. Из одномерных моделей дисперсию продольных волн в широком частотном диапазоне наиболее точно представляют модели Бишоп и Миндлина–Германа. Учет нелинейности связей между деформациями и градиентами перемещений (геометрической нелинейности) и связей между деформациями и напряжениями (физической нелинейности) приводит к нелинейным обобщениям этих математических моделей.

При некоторых условиях для определения нелинейных продольных волн в стержне применимо уравнение Кортевега–де Вриза (КдВ)

$$v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0, \quad (1)$$

где  $v = u_x$  — составляющая продольной деформации,  $u$  — продольное перемещение частиц срединной линии;  $x$  — безразмерная координата;  $t$  — безразмерное время. Впервые это показано в работе Г.А. Нариболи [9]. Позднее, в совместной работе Г.А. Нариболи и А. Седова [10], были учтены диссипативные эффекты и выведено уравнение Бюргерса–Кортевега–де Вриза (БКдВ), описывающее в вязкоупругих стержнях влияние дисперсии и диссипации на волны малой, но конечной амплитуды:

$$v_t + \alpha vv_x - \beta v_{xx} - \gamma v_{xxx} = 0, \quad (2)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — параметры, посредством которых вводится влияние нелинейности, диссипации и дисперсии. В работах [9, 10] уравнение КдВ было получено методом возмущений по нескольким малым параметрам из точной системы уравнений теории упругости, моделирующей нелинейные волны в круглом стержне. В уравнениях (1), (2) и далее по тексту нижний буквенный индекс означает дифференцирование по соответствующей независимой переменной.

Островский Л.А. и А.М. Сутин [11] рассмотрели распространение продольных волн в однородном стержне из нелинейно-упругого материала, внутренняя энергия которого является функцией инвариантов тензора деформаций с точностью до кубического члена включительно. Они показали, что эволюция продольной компоненты вектора смещения происходит согласно уравнению (нелинейному обобщению модели Релея–Лява или нелинейному уравнению Буссинеска):

$$u_{tt} - c_0^2 \left( 1 - \frac{6\alpha}{E} u_x \right) u_{xx} - \sigma^2 r_p^2 u_{xxt} = 0,$$

где  $\alpha = E/2 + v_1(1-6\sigma)/6 + v_2(1-2\sigma) + 4v_3/3$  — коэффициент, характеризующий геометрическую и физическую нелинейности стержня;  $\sigma$  — коэффициент Пуассона;  $r_p$  — полярный радиус инерции поперечного сечения стержня;  $v_1, v_2, v_3$  — константы Ламе третьего порядка. В [12] к полученному уравнению был применен разработанный одним из авторов метод упрощения систем уравнений с малыми нелинейностью и дисперсией. В случае малых нелинейности и дисперсии это уравнение сводится к уравнению КдВ (1).

В работе В.И. Ерофеева и А.И. Потапова [13] предложена методика перехода от трехмерных уравнений нелинейной теории упругости к приближенным уравнениям теории стержней, основанная на аппроксимации перемещений в поперечном сечении стержня и применении вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Выведены нелинейные уравнения, обобщающие модели Бишоп и Миндлина–Германа. Первое из этих уравнений имеет вид:

$$u_{tt} - c_0^2 \left( 1 - \frac{6\alpha}{E} u_x \right) u_{xx} - \sigma^2 r_p^2 (u_{tt} - c_\tau^2 u_{xx})_{xx} = 0, \quad (3)$$

где  $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$  — скорость распространения упругой сдвиговой волны в материале;  $\mu$  — модуль сдвига.

В работах А.М. Самсонова и Е.В. Сокуринской [14, 15] подробно исследовалось уравнение (3), переписанное в градиентах перемещений:

$$v_{tt} - v_{xx} = \varepsilon (6v^2 + v_{tt} - bv_{xx})_{xx}, \quad (4)$$

Здесь:  $b = (2(1 + \sigma))^{-1} < 1$ ;  $\varepsilon < 1$  — малый параметр задачи. Авторы цитируемых работ называют соотношение (4) «уравнением с двумя дисперсиями».

Разрешенные значения скоростей, то есть те значения, при которых возможно распространение уединенной волны, заключены в интервалах  $(0, c_\tau)$ ,  $(c_0, \infty)$ , и следовательно, кроме решений типа «сверхзвуковых» солитонов деформации (их существование, правда, с другими параметрами, следует из анализа решений уравнения КдВ), уравнение (4) допускает в качестве решений «дозвуковые» солитоны. Условие баланса между нелинейностью и дисперсией, обеспечивающее наличие локализованного квазистационарного решения уравнения (4), принципиально отличается от аналогичного условия для уравнений КдВ и Буссинеска, поскольку связывает все параметры решения, а не только амплитуду и ширину импульса. Это объясняется его иными дисперсионными свойствами, и в частности тем, что дисперсионные слагаемые в нем могут даже компенсировать друг друга при скорости, близкой к скорости волны сдвига, после чего баланс нелинейности и дисперсии будет нарушен. Найдено несколько законов сохранения для уравнения (4).

Основная часть работы Г.В. Дрейдена, Ю.И. Островского, А.М. Самсонова, И.В. Семеновой, Е.В. Сокуринской [16] посвящена экспериментальному исследованию формирования и распространения уединенных волн в стержнях. Было показано, что при возбуждении торцевой части стержня радиуса  $R$  импульсом сжатия с амплитудой давления  $P_0$  и длительностью  $\tau_0 = \lambda_0/c$  на расстоянии  $\lambda_0$  от торца стержня может сформироваться локализованная плоская волна, имеющая амплитуду деформации  $A$ , ширину  $\lambda$  и скорость  $V$ :

$$l \approx (RV/4)(E/|\beta A|)^{3/2}, \quad |A| \approx P_0/E, \\ \lambda \approx RV(2 + 6(E - \mu)/|\beta A|)^{1/2}, \quad V \approx c_0(1 + A\beta/(3E))^{1/2},$$

где  $\beta = 3E + 2A(1 - 2\sigma^3) + 6B(1 - 2\sigma + 2\sigma^2 - 4\sigma^3) + 2C(1 - 2\sigma)^3 = 3E + 2l(1 - 2\sigma)^3 + 4m(1 - 2\sigma)(1 + \sigma)^2 + 6n\sigma^2$  — параметр нелинейности материала, зависящий от модулей упругости второго ( $E, \sigma$ ) и третьего ( $A, B, C$  — модули Ландау, а  $l, m, n$  — модули Мурнагана) порядков. Приведены конкретные примеры расчета параметров уединенных волн при заданном радиусе стержня и давлении начального импульса. Авторам работы, по-видимому, впервые удалось сформировать из первичной ударной волны и зарегистрировать нелинейную уединенную волну (солитон) продольной деформации в твердотельном волноводе (стержне из полистирола).

В работе [17] были произведены некоторые усовершенствования методики эксперимента, расширяющие ее возможности при регистрации изучаемых волн по сравнению с [15]. Стало доступным не только наблюдение генерации уединенной волны, но и ее распространения на большие расстояния, а также удалось получить картину ее эволюции вдоль стержня и тем самым экспериментально показать, что волна действительно сохраняет свою форму и отношение амплитуды к длине, что и дает основание называть ее солитоном продольной деформации.

В [18] предложена методика, позволяющая производить одновременное возбуждение возмущений в нескольких стержнях. Она допускает варьирование параметров нагружающего импульса, качественную визуализацию возбуждаемых волн и использование непрозрачных материалов. В одном эксперименте можно наблюдать особенности в поведении волн в стержнях различной геометрии и изготовленных из разных материалов.

В работе А.В. Порубова, А.М. Самсонова [19] уточнены гипотезы, положенные в основу теории распространения продольной волны деформации в нелинейно-упругом стержне цилиндрической формы, основанной на нелинейном уравнении (4). Для осевой  $u$  и радиальной  $w$  компонент вектора смещения вдоль осей  $x$  и  $r$ , соответственно, приняты следующие соотношения:

$$u = U(x, t) + r^2 V(x, t), \quad w = -r\sigma U_x + r^3 W(x, t),$$

где  $U, V$  и  $W$  — функции, подлежащие определению. При  $V = W = 0$  эти выражения представляют собой запись гипотезы плоских сечений Лява, положенной в основу при выводе уравнения с двумя дисперсиями. Получено уточненное «уравнение с двумя дисперсиями» для составляющей продольной деформации  $v = u_x$ :

$$v_{tt} - c_0^2 v_{xx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{\rho} v^2 + \sigma R^2 (v-1) v_{tt} + \sigma R^2 c_0^2 v_{xx} \right)_{xx}, \quad (5)$$

где  $\beta$  — параметр нелинейности материала, зависящий от модулей упругости второго ( $E, \sigma$ ) и третьего ( $l, m, n$ ) порядков;  $\sigma$  — коэффициент Пуассона. В рамках уточненной теории найдена оценка величины линейной составляющей касательного напряжения на боковой поверхности стержня:  $\sigma_{rx} < 3,95 R^3 \mu v^2 A / ((3-2\nu)\lambda^3)$ , то есть значение максимального напряжения  $\sigma_{rx}$  на границе уменьшается в  $E/|\beta A|$  раз по сравнению с его максимальным значением в рамках теории [14]. Уточнение модели распространения продольных волн деформации в нелинейно-упругом стержне позволяет существенно уменьшить величины касательных напряжений на границе по сравнению с теоретически предсказываемыми, что представляется полезным с точки зрения дальнейшей разработки экспериментов по возбуждению и исследованию распространения солитонов деформации в нелинейно-упругом стержне.

В безразмерных переменных  $t' = c_0 t / (\sigma r_p)$ ,  $x' = x / (\sigma r_p)$  уравнение (3), описывающее продольные волны в стержне круглого сечения, записывается следующим образом [8]:

$$U_{tt} - (1 + U_x) U_{xx} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (U_{tt} - c^2 U_{xx}) = 0, \quad (6)$$

где  $U = 6\alpha u / (E\sigma r_p)$  — безразмерное перемещение частиц срединной линии;  $c^2 = c_\tau^2 / c_0^2 < 1$ . Штрихи при безразмерных переменных опущены.

Уравнение (6) имеет решение:

$$U(x, t) = A \operatorname{th} \left( \frac{x - vt}{\Delta} \right), \quad (7)$$

отвечающее как дозвуковым  $v^2 < c^2 < 1$ , так и сверхзвуковым  $v^2 > 1$  солитонам, их амплитуда и ширина могут быть выражены через скорость:

$$A = 6\sqrt{(v^2 - c^2)(v^2 - 1)}, \quad \Delta = 2\sqrt{\frac{v^2 - c^2}{v^2 - 1}}. \quad (8)$$

Плотность энергии волнового процесса представляется в виде:

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} U(x, t) \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} U(x, t) \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial}{\partial x} U(x, t) \right)^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} U(x, t) \right)^2 + \frac{c^2}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) \right)^2. \quad (9)$$

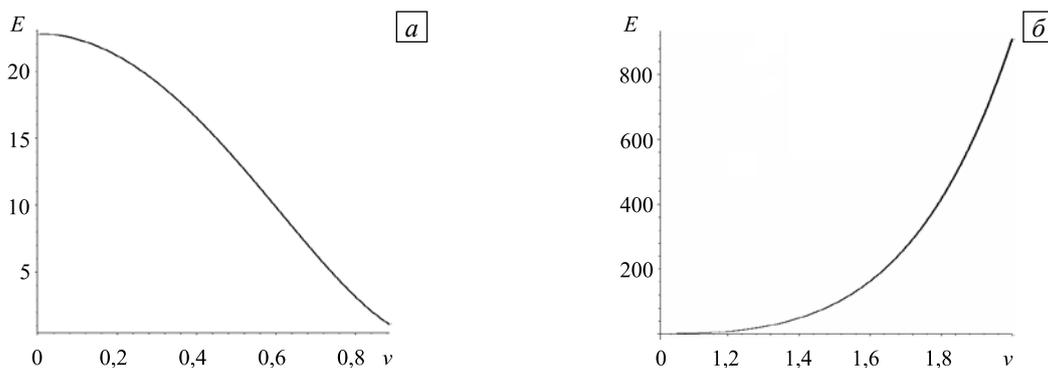


Рис. 1. Зависимость энергии солитона от дозвуковой (а), сверхзвуковой (б) скорости

Подстановка (7) в (9) с учетом (8) и интегрирование дают зависимость энергии солитона от его скорости. Графики этой зависимости приведены далее для дозвуковых (Рис. 1а) и сверхзвуковых (Рис. 1б) солитонов. Все расчеты в статье выполнены при  $c^2 = 0,9$ .

### 3. Численное моделирование взаимодействия солитонов

Классические солитоны, описываемые уравнением КдВ или другими нелинейными уравнениями, интегрируемыми МОЗР, ведут себя подобно частицам: при столкновении они сохраняют свою индивидуальность и претерпевают лишь сдвиг фаз. Уравнение (6) относится к классу систем, неинтегрируемых МОЗР, и особенности взаимодействия солитонов в соответствии с ним на сегодняшний день остаются неисследованными.

Процессы влияния дозвуковых и сверхзвуковых солитонов друг на друга будем изучать на примере волн деформации, уравнение для которых может быть получено из (7) простым дифференцированием:

$$W(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} U(x,t) = \frac{3(v^2 - 1)}{ch^2\left(\frac{x - vt}{\Delta}\right)}, \quad \Delta = 2\sqrt{\frac{v^2 - c^2}{v^2 - 1}}. \tag{10}$$

Так же путем дифференцирования (6) с учетом (5) приходим к уравнению, изображающему солитоны деформации:

$$W'' - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( W + \frac{1}{2} W^2 \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (W'' - c^2 W_{xx}) = 0. \tag{11}$$

Решения (1) и (11) с учетом (10) полностью совпадают. При этом дозвуковые солитоны деформации имеют отрицательную полярность, а сверхзвуковые положительную.

Численное моделирование уравнения (11) с начальными условиями (7) проводилось с помощью разработанного конечно-разностного алгоритма, реализующего неявную трехслойную схему с порядком аппроксимации  $O(\tau^2, \xi^2)$ , где  $\tau$  и  $\xi$  — временной и пространственный шаги сетки. Разностная схема равномерно устойчива при соотношении шагов  $\tau \leq 0,85\xi^2 / \sqrt{2\xi^2(1 + |W_x|) + 8c^2}$ .

В результате численного моделирования показано, что качественно различные сценарии взаимодействия солитонов зависят от относительной скорости столкновения. Рассматривалось столкновение только сверхзвуковых солитонов, так как для них можно реализовать любые скорости. При малой скорости столкновение происходит подобно обмену взаимодействием классических солитонов Кортевега–де Вриза. Быстрый солитон догоняет медленный, не сливаясь; они как бы обмениваются характеристиками и далее продолжают движение в соответствии с вновь приобретенными скоростями, причем вторичные солитоны полностью идентичны первичным (Рис. 2).

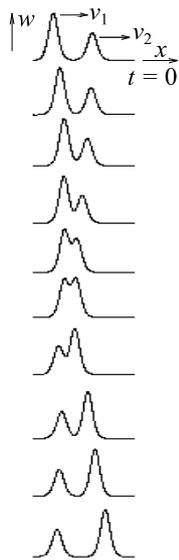


Рис. 2. Упругое столкновение солитонов; относительная скорость  $\Delta v = v_1 - v_2 = 0,0466$

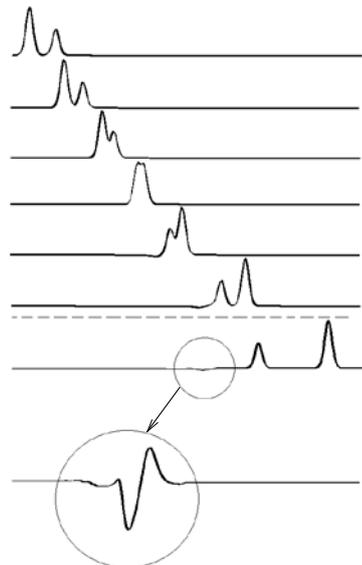


Рис. 3. Неупругое взаимодействие солитонов с относительной скоростью  $\Delta v = 0,1$

Расчеты для рисунка 2 проведены при  $v_1^2 = 1,2$  и  $v_2^2 = 1,1$  (относительная скорость столкновения составила  $\Delta v = v_1 - v_2 = 0,0466$ ). За время прикосновения солитоны успевают пройти вместе очень большое расстояние по отношению к их ширине  $\Delta$ , из-за чего изобразить весь процесс целиком в одном пространственном масштабе не представляется возможным. Рисунок выполнен с помощью следящего окна, поэтому в нем нельзя видеть сдвиг фаз, полученный солитонами при воздействии друг на друга, этот эффект хорошо известен и в данном случае интереса не представляет. Здесь хотелось бы подчеркнуть тот факт, что даже в неинтегрируемых системах существует вероятность упругого столкновения солитонов, хотя бы с точностью до ошибок численного эксперимента. Также заметим, что известное аналитическое двухсолитонное решение КдВ здесь не применимо [4].

При большей относительной скорости  $\Delta v = 0,1$  столкновение солитонов носит уже неупругий характер (Рис. 3). При взаимодействии солитоны теряют часть своей энергии, которая реализуется в пакет квазигармонических волн, движущихся за самым медленным сверхзвуковым солитоном со скоростью линейных волн. Характеристики вторичных солитонов полностью совпадают с решением (10) или (7). На рисунке 3 пакет квазилинейных волн выделен кружком и демонстрируется в увеличенном масштабе.

Дальнейшее увеличение скорости столкновения  $\Delta v = 0,4$  (Рис. 4) приводит к тому, что быстрый солитон, догнав медленный, сливается с ним. Амплитуда слияния оказывается меньше алгебраической суммы амплитуд отдельных солитонов. Затем солитоны расходятся, потеряв часть энергии. Эта энергия распределяется между двумя волновыми пакетами, в одном из которых волны распространяются в противоположную направлению движения солитонов сторону со скоростью квазилинейных волн (в увеличенном масштабе волны показаны в кружке), а в другом пакете — с той же скоростью догоняют сверхзвуковые солитоны (эти волны в увеличенном масштабе показаны в прямоугольной рамке). Ниже изображена эволюция этого волнового пакета.

Большие скорости столкновения  $\Delta v \geq 0,5$  приводят к эффекту расщепления солитонов, под которым в данной работе понимается образование большего по сравнению со вступавшим во взаимодействие количества вторичных солитонов. На рисунке 5 показан процесс расщепления при столкновении солитонов со скоростями  $v_1 = 3$  и  $v_2 = 1,5$ . Из рисунка видно, что высокоскоростной солитон, обогнав медленный солитон, быстро удаляется из зоны взаимодействия, при этом возникает волновой пакет, распространяющийся в сторону, противоположную движению солитонов. В увеличенном масштабе волны, которые он включает, показаны в левом овале, ниже представлена их эволюция. Далее выделяется второй солитон, за которым распространяется

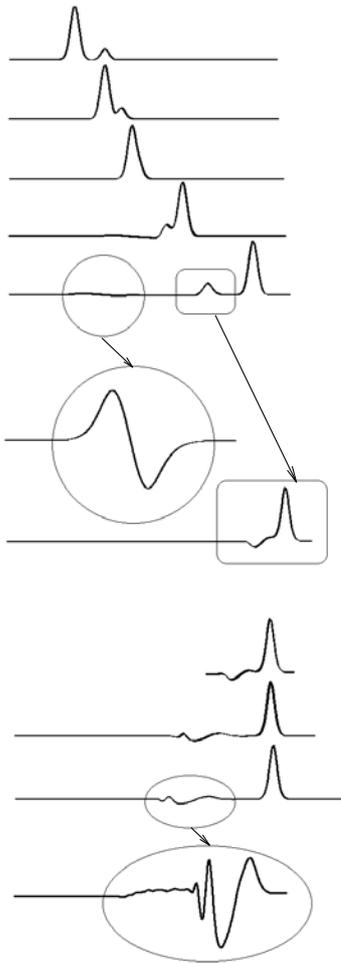


Рис. 4. Попутное столкновение солитонов с относительной скоростью  $\Delta v = 0,4$

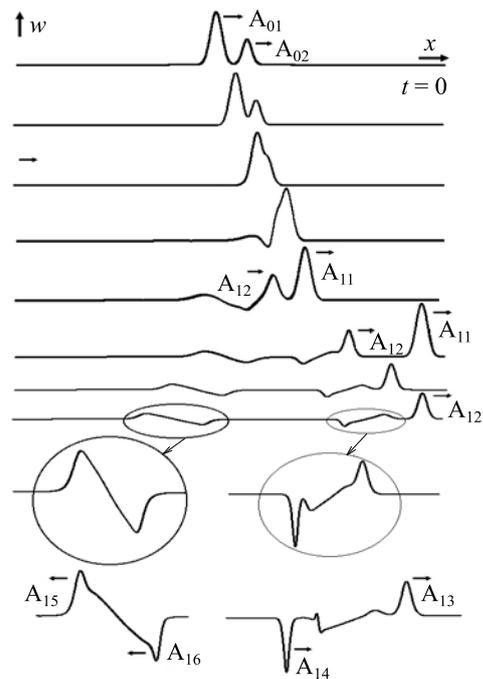


Рис. 5. Эффект расщепления солитонов вследствие столкновения с относительной скоростью  $\Delta v \geq 0,5$

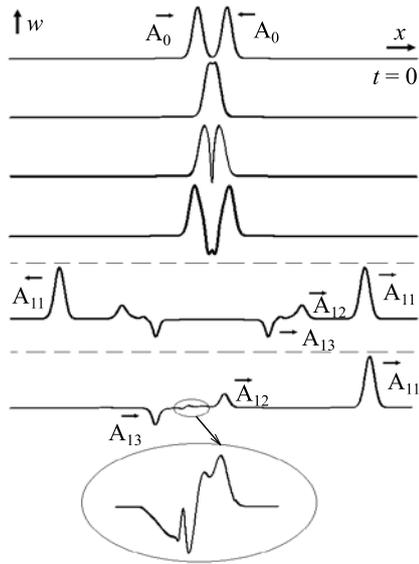


Рис. 6. Встречное взаимодействие солитонов при скоростях  $\Delta v > 2$

нестационарный волновой пакет (правый овал), эволюция входящих в него волн приведена ниже; видно, что они служат источником еще одного сверхзвукового солитона. Далее опять появляется квазилинейный волновой пакет и медленный (дозвуковой) солитон отрицательной полярности. Все характеристики вторичных солитонов полностью совпадают с решением (7) или (10). Поскольку амплитуды участвующих в процессе взаимодействия солитонов различаются почти на два порядка, то для удобства визуального восприятия рисунок 5 выполнен в логарифмическом масштабе.

Наиболее эффектно взаимодействие солитонов при очень больших скоростях ( $\Delta v > 2$ ) выглядит при встречном столкновении одинаковых солитонов. При этом картина полностью симметрична, и область взаимодействия остается в центре, как показано на рисунке 6. В силу симметрии достаточно рассмотреть только одну половину рисунка.

После столкновения выделяется высокоскоростной вторичный солитон с амплитудой  $A_{11}$ , которая ненамного меньше амплитуды  $A_0$  первичного солитона. За ним образуется второй вторичный солитон, амплитуда которого  $A_{12}$  уже много меньше. Далее формируется нелинейный волновой пакет (в увеличенном масштабе волны показаны в овале; следует заметить, что в дальнейшем из них могут сформироваться еще солитоны, но на это потребуются большее время наблюдения). Завершает картину медленный дозвуковой солитон, амплитуда которого  $A_{13}$  почти равна  $A_{12}$ . Вообще говоря, волновой пакет может быть источником скольких угодно сверхзвуковых солитонов, так как их амплитуда и энергия практически нулевая.

#### 4. Взаимодействие солитонов с границей

Отдельный интерес представляет взаимодействие солитонов и границы. В качестве граничного закрепления для волн смещения (соотношение (7)) выберем идеальную свободную границу:

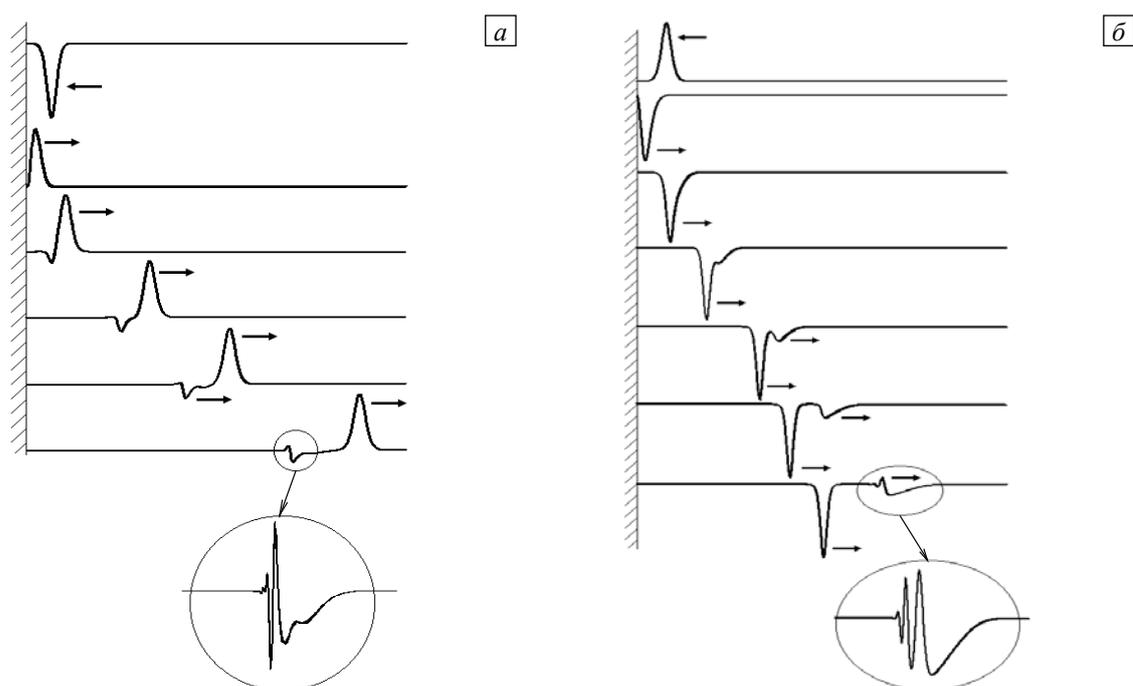
$$\left. \frac{\partial}{\partial x} U(x, t) \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) \right|_{x=0} = 0.$$

Для волн деформации (11) это соответствует шарнирному закреплению:

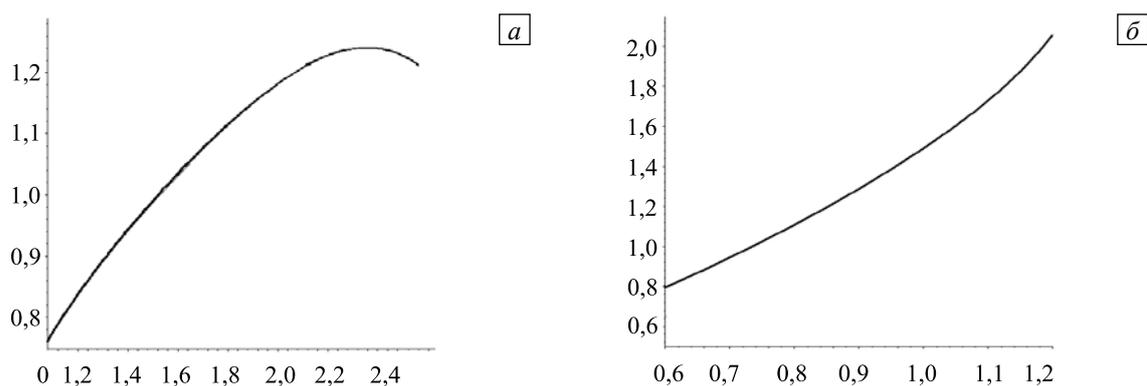
$$W(x, t) \Big|_{x=0} = \left. \frac{\partial}{\partial x} W(x, t) \right|_{x=0} = 0.$$

При взаимодействии с границей вторичный (отраженный) солитон приобретает обратную по отношению к первичному полярность. Энергия вторичного солитона меньше энергии первичного солитона, а избыток энергии реализуется в виде волнового пакета, распространяющегося со скоростью линейных волн.

Если на границу падает дозвуковой солитон (имеющий отрицательную полярность) (Рис. 7а), то отражается сверхзвуковой солитон, за которым следует пакет квазилинейных волн, показанный в увеличенном масштабе в кружке. Взаимодействие сверхзвукового солитона (у него положительная полярность, Рис. 7б) с границей порождает отраженный волновой пакет (обозначен овалом), за которым следует дозвуковой солитон. Зависимость амплитуды вторичного сверхзвукового солитона от амплитуды первичного дозвукового представлена на рисунке 8а. На рисунке 8б показана зависимость амплитуды вторичного дозвукового солитона от амплитуды первичного сверхзвукового солитона. Из сравнения рисунков 8а и 8б можно предположить, что приведенные зависимости взаимно обратны, однако это утверждение требует более тщательной проверки.



**Рис. 7.** Взаимодействие солитонов с границей: дозвуковой солитон с отрицательной полярностью (а), сверхзвуковой солитон с положительной полярностью (б); в увеличенном масштабе показаны нестационарные волны, распространяющиеся со скоростью квазигармонических волн



**Рис. 8.** Зависимость амплитуды вторичного солитона от амплитуды первичного дозвукового (а) и сверхзвукового (б) солитонов при взаимодействии их с идеальным граничным закреплением

Описанию особенностей формирования двумерных солитонов деформации в пластинах и оболочках посвящены работы [20–23]

В заключение заметим, что экспериментально расщепление солитонов наблюдалось лишь при распространении поперечных волн [24], для этого же типа волн (то есть для поперечных, вносящих кубическую нелинейность в уравнение динамики) в [25, 26] проведено численно-аналитическое изучение указанного эффекта. Таким образом, настоящая работа, содержащая результаты численно-аналитических исследований расщепления солитонов продольной деформации в стержне (с квадратичной нелинейностью в уравнении динамики), является, своего рода, пионерской.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-19-01637).

## Литература

1. Физический энциклопедический словарь / Под ред. А.М. Прохорова. – М.: Советская Энциклопедия, 1984. – 944 с.
2. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // *Phys. Rev. Lett.* – 1965. – Vol. 15, no. 6. – P. 240-243. DOI
3. *Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteweg–deVries equation // *Phys. Rev. Lett.* – 1967. – Vol. 19, no. 19. – P. 1095-1097. DOI
4. *Захаров В.Е., Мананов С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

5. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
6. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с.
7. Вибрации в технике: справочник в 6 томах. Т. 1. Колебания нелинейных систем / под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
8. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М.: Физматлит, 2002. – 208 с.
9. Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods // *J. Math. Phys. Sci.* – 1970. – Vol. 4. – P. 64-73.
10. Nariboli G.A., Sedov A. Burgers's–Korteweg–De Vries equation for viscoelastic rods and plates // *J. Math. Anal. Appl.* – 1970. – Vol. 32, no. 3. – P. 661-677. DOI
11. Островский Л.А., Сутин А.М. Нелинейные упругие волны в стержнях // *ПММ.* – 1977. – Т. 41, № 3. – С. 531-537. (English version DOI).
12. Островский Л.А., Пелиновский Е.Н. О приближенных уравнениях для волн в средах с малыми нелинейностью и дисперсией // *ПММ.* – 1974. – Т. 38, № 1. – С. 121-124. (English version DOI).
13. Ерофеев В.И., Потапов А.И. Нелинейные модели продольных колебаний стержней // *Гидроаэромеханика и теория упругости / Всес. межвуз. сб.* – Днепропетровск: ДГУ. – 1984. – № 32. – С. 78-82.
14. Самсонов А.М. О существовании солитонов продольной деформации в бесконечном нелинейно-упругом стержне // *ДАН СССР.* – 1988. – Т. 299. – С. 1083-1086.
15. Самсонов А.М., Сокуринская Е.В. О возможности возбуждения солитона продольной деформации в нелинейно-упругом стержне // *ЖТФ.* – 1988. – Т. 58, № 8. – С. 1632-1634.
16. Дрейден Г.В., Островский Ю.И., Самсонов А.М., Семенова И.В., Сокуринская Е.В. Формирование и распространение солитонов деформации в нелинейно-упругом твердом теле // *ЖТФ.* – 1988. – Т. 58, № 10. – С. 2040-2047.
17. Дрейден Г.В., Порубов А.В., Самсонов А.М., Семенова И.В., Сокуринская Е.В. Об экспериментах по распространению солитонов деформации в нелинейно-упругом стержне // *ПЖТФ.* – 1995. – Т. 21, № 11. – С. 42-46.
18. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Кикеев В.А., Холин С.А. К визуализации нелинейных волн деформации // *ВАНТ. Серия: Теоретическая и прикладная физика.* – 2012. – № 2. – С. 18-23.
19. Порубов А.В., Самсонов А.М. Уточнение модели распространения продольных волн деформации в нелинейно-упругом стержне // *Письма в ЖТФ.* – 1993. – Т. 19, № 12. – С. 26-29.
20. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Мальханов А.О. Нелинейные локализованные продольные волны в пластине, взаимодействующей с магнитным полем // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2010. – Т. 3, № 4. – С. 5-15. DOI
21. Erofeev V.I., Malkhanov A.O., Zemlyanukhin A.I., Catson V.M. Nonlinear magnetoelastic waves in a plate // *Advanced Structured Materials / Ed. by H. Altenbach, V. Eremeyev.* – 2011. – P. 125-134. (URL: <http://www.springer.com/la/book/9783642218545>).
22. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Нелинейные локализованные продольные магнитоупругие волны в пластине, находящейся в произвольно ориентированном магнитном поле // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2012. – Т. 5, № 1. – С. 79-84. DOI
23. Блинкова А.Ю., Блинков Ю.А., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними, с учетом рассеяния энергии // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 336-345. DOI
24. Potapov A.I., Vesnitsky A.I. Interaction of solitary waves under head-on collisions. Experimental investigation // *Wave Motion.* – 1994. – Vol. 19, no. 1. – P. 29-35. DOI
25. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Павлов И.С. Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в зернистой среде // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 140-150. DOI
26. Erofeev V.I., Kazhayaev V.V., Pavlov I.S. Inelastic interaction and splitting of strain solitons propagating in a one-dimensional granular medium with internal stress // *Advanced Structured Materials / Ed. by H. Altenbach, S. Forest.* – 2016. – P. 145-162. (URL: <http://www.springer.com/jp/book/9783319317199>).

## References

1. *Fizicheskiy entsiklopedicheskiy slovar* [Physical encyclopedic dictionary], ed. by A.M. Prokhorov. Moscow: Sovetskaya Entsiklopediya, 1984. 944 p.
2. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 1965, vol. 15, no. 6, pp. 240-243. DOI
3. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg–deVries equation. *Phys. Rev. Lett.*, 1967, vol. 19, no. 19, pp. 1095-1097. DOI
4. Zakharov V.E., Manakov S.V., Novikov S.P., Pitaevskii L.P. *Teoriya solitonov: metod obratnoy zadachi* [Theory of solitons: The inverse scattering method]. Moscow: Nauka, 1980. 320 p.
5. Artobolevsky I.I., Bobrovniitsky Yu.I., Genkin M.D. *Vvedenie v akusticheskuyu dinamiku mashin* [Introduction to acoustic dynamics of machines]. Moscow: Nauka, 1979. 296 p.
6. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. *Neklassicheskie teorii kolebanij stержnej, plastin i obolochek* [Non-classical theories of vibrations of bars, plates and shells]. Moscow: VINITI, 1973. 272 p.
7. *Vibratsii v tekhnike* [Vibrations in technics: Handbook], ed. by V.V. Bolotin. Moscow: Mashinostroenie, Vol. 1, 1999. 504 p.
8. Erofeev V.I., Kazhayaev V.V., Semerikova N.P. *Volny v stержnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelinejnost'* [Waves in rods. Dispersion. Dissipation. Non-linearity]. Moscow: Fizmatlit, 2002. 208 p.
9. Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods. *J. Math. Phys. Sci.*, 1970, vol. 4, pp. 64-73.

10. Nariboli G.A., Sedov A. Burgers's–Korteweg–De Vries equation for viscoelastic rods and plates. *J. Math. Anal. Appl.*, 1970, vol. 32, no. 3, pp. 661-677. DOI
11. Ostrovskii L.A., Sutin A.M. Nonlinear elastic waves in rods. *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 3, pp. 543-549. DOI
12. Ostrovskii L.A., Pelinovskii E.N. Approximate equations for waves in media with small nonlinearity and dispersion. *J. Appl. Math. Mech.*, 1974, vol. 38, no. 1, pp. 104-108. DOI
13. Erofeev V.I., Potapov A.I. Nelinejnye modeli prodol'nykh kolebanij sterzhnej [Nonlinear models of longitudinal rods oscillations]. *Gidroaeromekhanika i teoriya uprugosti* [Hydroaeromechanics and elasticity theory]. Dnepropetrovsk, 1984, vol. 32. Pp. 78-82.
14. Samsonov A.M. On existence of longitudinal strain solitons in an infinite nonlinearly elastic rod. *Sov. Phys. – Doklady*, 1988, vol. 33, pp. 298-300.
15. Samsonov A.M., Sokurinskaya E.V. On the excitation of a longitudinal deformation soliton in a nonlinear elastic rod. *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*, 1988, vol. 33, no. 8, pp. 989-991.
16. Dreiden G.V., Ostrovsky Y.I., Samsonov A.M., Semenova I.V., Sokurinskaya E.V. Formation and propagation of deformation solitons in a nonlinearly elastic solid. *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*, 1988, vol. 58, no. 10, pp. 2040-2047.
17. Dreiden G.V., Porubov A.V., Samsonov A.M., Semenova I.V., Sokurinskaya E.V. Experiments in the propagation of longitudinal strain solitons in a nonlinearly elastic rod. *Tech. Phys. Lett.*, 1995, vol. 21, no. 11, pp. 415-417.
18. Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Kikeev V.A., Kholin S.A. On visualizing non-linear strain waves. *VANT. Pure and Applied Physics*, 2012, no. 2, pp.18-23.
19. Porubov A.V., Samsonov A.M. Refinement of the model for the propagation of longitudinal strain waves in a rod with nonlinear elasticity. *Tech. Phys. Lett.*, 1993, vol. 19, no. 6, pp. 365-366.
20. Erofeev V.I., Zemlyanukhin A.I., Catson V.M., Malkhanov A.O. Nonlinear localized longitudinal waves in a plate under magnetic field. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 4, pp. 5-15. DOI
21. Erofeev V.I., Malkhanov A.O., Zemlyanukhin A.I., Catson V.M. Nonlinear magnetoelastic waves in a plate. *Advanced Structured Materials*, ed. by H. Altenbach, V. Eremeyev, 2011, pp. 125-134. (URL: <http://www.springer.com/la/book/9783642218545>).
22. Erofeev V.I., Malkhanov A.O. Nonlinear longitudinal localized magnetoelastic waves in a plate in an arbitrarily oriented magnetic field. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 1, pp. 79-84. DOI
23. Blinkova A.Y., Blinkov Y.A., Mogilevich L.I. Non-linear waves in coaxial cylinder shells containing viscous liquid inside with consideration for energy dispersion. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 336-345. DOI
24. Potapov A.I., Vesnitsky A.I. Interaction of solitary waves under head-on collisions. Experimental investigation. *Wave Motion*, 1994, vol. 19, no. 1, pp. 29-35. DOI
25. Erofeev V.V., Kazhaev V.V., Pavlov I.S. Inelastic interaction and splitting of strain solitons propagating in a granular medium. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 140-150. DOI
26. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Pavlov I.S. Inelastic interaction and splitting of strain solitons propagating in a one-dimensional granular medium with internal stress. *Advanced Structured Materials*, ed. by H. Altenbach, S. Forest, 2016. Pp. 145-162. (URL: <http://www.springer.com/jp/book/9783319317199>).

Поступила в редакцию 18.07.2016; опубликована в электронном виде 30.06.2017