

DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.10
УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО СЛОЯ

А.О. Ватульян^{1,2}, С.А. Нестеров²

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

²Южный математический институт ВЦ РАН, Владикавказ, Российская Федерация

Приведена общая постановка задачи движения неоднородного термоэлектроупругого тела. Требуется определить наведенный в результате пирозффекта потенциал, возникающий на поверхности материала из пьезокерамики класса 6 mm. В качестве примера рассмотрена задача теплового удара по функционально-градиентному слою. При этом одна плоскость слоя заземлена, а на другой, в силу пирозффекта, наводится электрический потенциал. Осуществляется обезразмеривание начально-краевой задачи термоэлектроупругости, в результате которого выделяются параметры связанности. Исключение из постановки электрического потенциала позволяет преобразовать задачу термоэлектроупругости в задачу термоупругости с модифицированными коэффициентами. После применения к полученной задаче преобразования Лапласа задача термоупругости записывается в трансформантах, а затем сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Система интегральных уравнений решается численно методом коллокаций с использованием квадратурной формулы трапеций. Оригиналы решений находятся на основе теории вычетов. На примере однородного слоя, изготовленного из титаната бария, проведено сравнение результатов численного и аналитического решений. Изучена связь характера наведенного потенциала с наиболее распространенными на практике типами тепловой нагрузки. Выяснено, как параметр дискретизации системы интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода и разрядность чисел, которые задаются компьютеру, отражаются на точности численного решения. Исследована зависимость наведенного потенциала от распределения неоднородности в классах степенных и экспоненциальных функций. Выяснено, что вид законов распределения неоднородности коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости существенно влияет на форму наведенного потенциала. Показано, что вид законов распределения неоднородности модуля упругости, плотности материала и коэффициента температурного напряжения на форме наведенного потенциала не сказывается. Установленные результаты объясняются малостью параметра термомеханической связанности для реальных материалов. Эти факты следует учитывать при проектировании различных технических устройств на основе функционально-градиентных пьезоматериалов с заданными свойствами.

Ключевые слова: термоэлектроупругость, тепловой удар, функционально-градиентный слой

THE DYNAMIC PROBLEM OF THERMOELECTROELASTICITY FOR FUNCTIONALLY GRADED LAYER

A.O. Vatulyan^{1,2} and S.A. Nesterov¹

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

²Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz, Russian Federation

A general formulation for the problem of motion of inhomogeneous thermoelectroelastic body is considered. The problem of heat flow impact on the functionally graded layer made of piezoceramics is considered as an example. One plane of the layer is grounded, while the other has an electric potential induced by a pyroelectric effect. Nondimensionalization of the boundary value problem of thermoelectroelasticity allows us to identify the coupling parameters. After excluding the electric potential from the formulation, the problem of thermoelectroelasticity is reduced to the problem of thermoelasticity with modified coefficients. Upon the application of the Laplace transformation, the problem of thermoelasticity is reduced to the system of the Fredholm integral equations of the second kind and is solved numerically by the collocation method using the trapezoid quadrature formula. The original solutions are found using the residue theory. A comparison between the results of the numerical and analytical solutions is made, using as an example, a homogeneous layer of barium titanate. The influence of different forms of the thermal impact on the behavior of the induced electric potential is investigated. The dependence of the induced electrical potential on the distribution of inhomogeneities in the class of power and exponential functions is explored. It has been found that the form of the laws governing the distribution of inhomogeneity of heat conduction and heat capacity coefficients has an essential effect on the shape of the induced potential. And vice versa, the form of the laws governing the distribution of inhomogeneity of the elastic modulus, material density and coefficient of thermal stresses do not affect the shape of the induced potential. These findings are attributed to smallness of the thermomechanical coupling parameter for real materials and should be taken into account in designing various technical devices, which make use of functionally-graded materials with specified properties.

Key words: thermoelectroelasticity, thermal impact, functionally gradient layer

1. Введение

Бесконтактные методы определения температуры играют важную роль в медицинской диагностике, при контроле сложных динамических систем, в идентификации параметров и другом. При создании предназначенных для этого различных температурных датчиков в настоящее время широко применяются пирозлектрические материалы, обладающие эффектом взаимной связанности теплового, электрического и упругих полей [1]. При этом наибольший интерес представляет трансформация теплового импульса в электрический. Ее анализ может быть осуществлен по модели линейного термоэлектроупругого тела при условии теплового удара по его поверхности. Заметим, что подобная задача в рамках несвязанной

термоупругости впервые рассмотрена В.И. Даниловской в [2], где проанализированы динамические эффекты распределения напряжений.

Уравнения термоэлектроупругости впервые были получены в начале 60-х годов XX века Миндлином [3, 4]. Большой вклад в развитие теории термопьезоэлектричества внес Новацкий [5, 6]. В настоящее время динамические задачи термоэлектроупругости для однородных [7–9] и слоистых [10, 11] тел изучены достаточно хорошо. Так, в [7] рассматривается распространение плоских волн в неограниченной термоэлектроупругой среде. В работах [8, 9] для полупространства и слоя установлена операторная связь между температурой и наведенным потенциалом, построены передаточные функции и их асимптотики.

В последние годы в различных областях техники все шире внедряются функционально-градиентные пьезоматериалы [12, 13]. Функционально-градиентные материалы — композиты, обладающие переменными физическими свойствами, в них отсутствуют скачки термомеханических свойств через поверхность раздела, а также расслоения и растрескивания, присущие слоистым материалам. При этом материальные характеристики являются не константами, а некоторыми функциями пространственных координат. В случае неоднородных тел решения задач термоэлектроупругости найдены только при степенных и экспоненциальных законах распределения неоднородности [14–21]. В тоже время актуальной является реализация решения связанной задачи термоэлектроупругости при произвольном распределении неоднородности.

Цель данной работы состоит в постановке задачи движения неоднородного термоэлектроупругого тела из пьезокерамики класса 6 mm, эффективном обезразмеривании ее постановки, построении численного метода определения наведенного потенциала термоэлектроупругого слоя, тестировании его на примере однородного слоя, проведении вычислительных экспериментов по определению наведенного потенциала при разных типах тепловой нагрузки и законах распределения неоднородности, анализе полученных результатов.

2. Постановка задачи термоэлектроупругости для неоднородного тела

Уравнения связанной термоэлектроупругости в линейном приближении, впервые построенные Миндлином, состоят из уравнений динамики сплошной среды, уравнений Максвелла в квазистатическом приближении и уравнений притока тепла [6]:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1)$$

$$D_{k,k} + \sigma = 0, \quad (2)$$

$$-q_{k,k} + T_0 \dot{\eta} + w = 0. \quad (3)$$

Входящие в них элементы представимы в форме:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} - \gamma_{ij} \theta + e_{kij} \varphi_{,k}, \quad (4)$$

$$\eta = \gamma_{ij} u_{i,j} + \frac{c_\epsilon}{T_0} \theta - g_i \varphi_{,i}, \quad (5)$$

$$D_i = e_{ikl} u_{k,l} + g_i \theta - \varepsilon_{ik} \varphi_{,k}, \quad (6)$$

$$q_i = -k_{ij} \theta. \quad (7)$$

В (1)–(7) принято: σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; F_i — компоненты вектора объемных сил; ρ — плотность; u_i — компоненты вектора перемещения; D_i — компоненты вектора электрической индукции; σ — плотность электрического заряда; q_i — компоненты вектора потока тепла; T_0 — температура естественного состояния; η — энтропия; w — плотность теплового источника; c_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости; γ_{ij} — компоненты тензора температурных напряжений; $\theta = T - T_0$ — приращение температуры T ; e_{kij} — компоненты тензора пьезоэлектрических модулей; φ — электрический потенциал; c_ϵ — удельная объемная теплоемкость при постоянном тензоре деформации; g_i — компоненты тензора пироккоэффициентов; ε_{ij} — компоненты тензора диэлектрических проницаемостей; k_{ij} — компоненты тензора коэффициента теплопроводности; точка над символом означает дифференцирование по времени, запятая в нижних индексах — дифференцирование по координате с индексом, следующим за запятой. Подставляя (4)–(7) в (1)–(3), получим общую систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую движение неоднородной термоэлектроупругой среды:

$$(c_{ijk}u_{k,l})_{,j} + (e_{kij}\varphi_{,k})_{,j} - (\gamma_{ij}\theta)_{,j} + F_i = \rho\ddot{u}_i, \quad (8)$$

$$(e_{ikl}u_{k,l})_{,i} - (\varepsilon_{ik}\varphi_{,k})_{,i} + (g_i\theta)_{,i} = -\sigma, \quad (9)$$

$$(k_{ij}\theta_{,j})_{,i} - c_\varepsilon\dot{\theta} - T_0(\gamma_{ij}\dot{u}_{i,j} - g_i\dot{\varphi}_{,i}) = -w, \quad (10)$$

Для системы уравнений (8)–(10) необходимо сформулировать граничные и начальные условия. Для этого рассмотрим движение термоэлектроупругого тела V , ограниченного поверхностью S и находящегося под действием механических, тепловых и электрических нагрузок. Поверхность может быть представлена в виде: $S = S_u \cup S_\sigma$, $S = S_T \cup S_q$, $S = S_+ \cup S_- \cup S_H$, где индексами u , σ , T и q помечены части границы тела, на которых, соответственно, заданы перемещения, напряжения, температура и тепловой поток. На части границы S_- и S_+ наводится разность потенциалов, граница S_H неэлектродирована.

Граничные условия для термоэлектроупругого тела имеют вид:

– механические

$$u_i|_{S_u} = u_{i0}, \quad \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = p_i; \quad (11)$$

– тепловые

$$\theta|_{S_T} = \theta_0, \quad -k_{ij}\theta_{,i}n_j|_{S_q} = q; \quad (12)$$

– электрические

$$\varphi|_{S_\pm} = \pm\varphi_0, \quad D_i n_i|_{S_H} = 0. \quad (13)$$

Здесь n — нормаль к соответствующей части границы.

Начальные условия записываются следующим образом:

$$u_i(x,0) = f_{1i}(x), \quad \dot{u}_i(x,0) = f_{2i}(x), \quad \theta(x,0) = f_3(x), \quad \varphi(x,0) = f_4(x). \quad (14)$$

Пироэлектрический эффект может проявляться в диэлектрических кристаллах и пьезокерамиках, принадлежащих одному из 10 полярных классов симметрии. Важной, с точки зрения технических приложений, является пьезо керамика класса 6 mm. Пьезо керамическая текстура в этом случае обладает единственной осью симметрии и продольными плоскостями симметрии, а определяющие соотношения выглядят так [6]:

$$\sigma_{11} = c_{11}u_{1,1} + c_{12}u_{2,2} + c_{13}u_{3,3} + e_{31}\varphi_{,3} - \gamma_{11}\theta, \quad (15)$$

$$\sigma_{22} = c_{12}u_{1,1} + c_{11}u_{2,2} + c_{13}u_{3,3} + e_{31}\varphi_{,3} - \gamma_{11}\theta, \quad (16)$$

$$\sigma_{33} = c_{13}(u_{1,1} + u_{2,2}) + c_{33}u_{3,3} + e_{33}\varphi_{,3} - \gamma_{33}\theta, \quad (17)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = c_{44}(u_{1,3} + u_{3,1}) + e_{13}\varphi_{,1}, \quad (18)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = c_{44}(u_{2,3} + u_{3,2}) + e_{15}\varphi_{,2}, \quad (19)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = (c_{11} - c_{12})(u_{2,1} + u_{1,2})/2, \quad (20)$$

$$D_1 = e_{15}(u_{3,1} + u_{1,3}) - \varepsilon_{11}\varphi_{,1}, \quad (21)$$

$$D_2 = e_{15}(u_{3,2} + u_{2,3}) - \varepsilon_{11}\varphi_{,2}, \quad (22)$$

$$D_3 = e_{13}(u_{1,1} + u_{2,2}) + e_{33}u_{3,3} - \varepsilon_{33}\varphi_{,3} + g_3\theta. \quad (23)$$

Большое практическое значение для проектирования температурных датчиков имеет решение задачи нахождения наведенного потенциала в пироэлектрических телах. В случае, когда разность потенциалов есть результат теплового или механического воздействий на элемент и необходимо определить ее значение, используются условия для тока в момент включения элемента в электрическую цепь. Величина наведенной разности потенциалов находится из соотношения [9]:

$$\int_{S_+} \dot{D}_i n_i ds = -I(t). \quad (24)$$

где $I(t)$ — сила тока в цепи.

3. Постановка задачи термоэлектроупругости для неоднородного слоя

Рассмотрим задачу воздействия тепловым потоком на неоднородный слой толщиной H из пьезокерамики класса 6 mm, поляризованный вдоль оси x_3 . Одна плоскость слоя — $x_3 = 0$, заземлена, а на другой — $x_3 = H$, в силу пирозффекта, наводится электрический потенциал. Ограничимся случаем, когда все начальные условия нулевые. Тогда начально-краевая задача (8)–(14) с учетом определяющих соотношений (15)–(23) в предположении об одномерности исследуемого процесса ($u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = u(x_3, t)$, $\theta = \theta(x_3, t)$, $\varphi = \varphi(x_3, t)$, $\varphi = \varphi(x_3, t)$) при условиях $F_i = 0$, $\sigma = 0$, $w = 0$ будет описываться следующей системой:

$$(c_{33}u')' + (e_{33}\varphi)' - (\gamma_{33}\theta)' = \rho\ddot{u}, \quad (25)$$

$$(e_{33}u')' - (\varepsilon_{33}\varphi)' + (g_3\theta)' = 0, \quad (26)$$

$$-T_0(\gamma_{33}\dot{u}' - g_3\dot{\varphi}') + (k_{33}\theta)' - c_\varepsilon\dot{\theta} = 0, \quad (27)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \sigma_{33}(H, t) = 0, \quad (28)$$

$$\theta(0, t) = 0, \quad -k_{33}\theta'(H, t) = q(t), \quad (29)$$

$$\varphi(0, t) = 0, \quad \varphi(H, t) = \varphi_0(t), \quad (30)$$

$$u(x_3, 0) = \dot{u}(x_3, 0) = \theta(x_3, 0) = \varphi(x_3, 0) = 0. \quad (31)$$

Символ «штрих» в уравнениях означает дифференцирование по координате x_3 .

Уравнение (24) преобразуем к виду:

$$\frac{d}{dt} \int_{s_+} (e_{33}u' - \varepsilon_{33}\varphi' + g_3\theta) \Big|_{x_3=H} dS = 0. \quad (32)$$

Положим, что коэффициенты e_{33} , ε_{33} , g_3 постоянны, а остальные материальные характеристики — функции переменной x_3 . Проведем обезразмеривание задачи (25)–(31), позволяющее выявить параметры связанности полей, для чего введем обозначения: $z = x_3/H$, $U = u/H$, $W = \theta/\theta_0$, $V = \varphi/\varphi_0$, $\theta_0 = \sqrt{T_0 s_0 / c_0}$, $\varphi_0 = H \sqrt{s_0 / \varepsilon_{33}}$, $s_0 = \max_{x_3 \in [0, H]} c_{33}^*(x_3)$, $c_0 = \max_{x_3 \in [0, H]} c_\varepsilon^*(x_3)$, $c_\varepsilon^* = c_\varepsilon - T_0 g_3^2 / \varepsilon_{33}$, $q_1 = q/q_0$, $q_0 = k_0 \theta_0 / H$, $k_0 = \max_{x_3 \in [0, H]} k_{33}(x_3)$, $t_1 = H/v_0$, $t_2 = H^2 c_0 / k_0$, $v_0 = \sqrt{s_0 / \rho_0}$, $\rho_0 = \max_{x_3 \in [0, H]} \rho(x_3)$, $c_{33}^* = c_{33} + e_{33}^2 / \varepsilon_{33}$, $\gamma_{33}^* = \gamma_{33} - e_{33} g_3 / \varepsilon_{33}$, $\tau = t/t_2$, $\bar{s}(z) = c_{33}^*(x_3) / s_0$, $\bar{k}(z) = k_{33}(x_3) / k_0$, $\bar{\rho}(z) = \rho(x_3) / \rho_0$, $\bar{c}(z) = c_\varepsilon^*(x_3) / c_0$, $\bar{\gamma}(z) = \gamma_{33}^*(x_3) / \gamma_0$, $\gamma_0 = \max_{x_3 \in [0, H]} \gamma_{33}^*(x_3)$, $\delta_0 = t_1 / t_2$, $d_1 = \gamma_0 \sqrt{T_0 / (s_0 c_0)}$, $\Omega = \sigma_{33} / s_0$.

После операций обезразмеривания и исключения потенциала, выполненных аналогично работе [9], задача термоэлектроупругости (25)–(31) сведется к задаче термоупругости с модифицированными коэффициентами:

$$(\bar{s}(z)U')' - d_1(\bar{\gamma}(z)W)' = \delta_0^2 \bar{\rho}(z)\ddot{U}, \quad (33)$$

$$(\bar{k}(z)W')' - \bar{c}(z)W - d_1\bar{\gamma}(z)\dot{U}' = 0, \quad (34)$$

$$U(0, \tau) = 0, \quad \Omega(1, \tau) = 0, \quad (35)$$

$$W(0, \tau) = 0, \quad -k(1)W'(1, \tau) = q_1(\tau), \quad (36)$$

$$U(z, 0) = \dot{U}(z, 0) = W(z, 0) = 0. \quad (37)$$

Здесь $\Omega(z, \tau) = \bar{s}(z)U'(z, \tau) - d_1\bar{\gamma}(z)W(z, \tau)$ — безразмерное напряжение. Штрих рядом с символом означает дифференцирование по безразмерной координате z .

Безразмерный наведенный потенциал, найденный в результате интегрирования условия (32), примет вид:

$$V_0(\tau) = d_2 \int_0^1 W(\xi, \tau) d\xi + d_3 U(1, \tau). \quad (38)$$

4. Решение задачи термоэлектроупругости для неоднородного слоя

Для отыскания наведенного потенциала по формуле (38) необходимо установить смещение и температуру из решения задачи (33)–(37). С этой целью применим преобразование Лапласа по времени к (33)–(36) и учтем начальные условия (37). В результате получим краевую задачу в трансформантах:

$$(\bar{s}(z)\tilde{U}')' - d_1(\bar{\gamma}(z)\tilde{W})' = \delta_0^2 p^2 \rho(z)\tilde{U}, \quad (39)$$

$$(\bar{k}(z)\tilde{W}')' - p\bar{c}(z)\tilde{W} - d_1 p \bar{\gamma}(z)\tilde{U}' = 0, \quad (40)$$

$$\tilde{U}(0, p) = 0, \quad \tilde{\Omega}(1, p) = 0, \quad (41)$$

$$\tilde{W}(0, p) = 0, \quad -k(1)\tilde{W}'(1, p) = \tilde{q}_1(p). \quad (42)$$

Краевая задача (39)–(42) при произвольных законах изменения коэффициентов дифференциальных операторов может быть решена лишь численно, например, методом сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода [22, 23]. Для этого перейдем от краевой задачи (39)–(42) к канонической системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами:

$$\tilde{W}' = \frac{1}{\bar{k}(z)}\tilde{Q}(z, p), \quad (43)$$

$$\tilde{Q}' = p(\bar{c}(z) + d_1 \frac{\bar{\gamma}^2(z)}{\bar{s}(z)})\tilde{W}(z, p) + p d_1 \frac{\bar{\gamma}(z)}{\bar{s}(z)}\tilde{\Omega}(z, p), \quad (44)$$

$$\tilde{\Omega}' = \delta_0^2 p^2 \bar{\rho}(z)\tilde{U}(z, p), \quad (45)$$

$$\tilde{U}' = \frac{1}{\bar{s}(z)}\tilde{\Omega}(z, p) + \frac{\bar{\gamma}(z)}{\bar{s}(z)}\tilde{W}(z, p). \quad (46)$$

Проинтегрировав систему (43)–(46) по z на отрезке $[0, z]$, найдя постоянные интегрирования из граничных условий (41), (42) и исключив \tilde{U} , \tilde{Q} , придем к системе интегральных уравнений для определения функций $\tilde{W}(z, p)$ и $\tilde{\Omega}(z, p)$:

$$\tilde{W}(z, p) = -p \int_0^z \frac{1}{\bar{k}(\xi)} \int_{\xi}^1 (\bar{c}(\eta) + d_1 \frac{\bar{\gamma}^2(\xi)}{\bar{s}(\xi)}) \tilde{W}(\eta, p) d\eta d\xi - p d_1 \int_0^z \frac{1}{\bar{k}(\xi)} \int_{\xi}^1 \frac{\bar{\gamma}(\eta)}{\bar{s}(\eta)} \tilde{\Omega}(\eta, p) d\eta d\xi - \tilde{q}_1(p) \int_0^z \frac{d\xi}{\bar{k}(\xi)}, \quad (47)$$

$$\tilde{\Omega}(z, p) = -\delta_0^2 p^2 \int_z^1 \bar{\rho}(\xi) \int_0^{\xi} \frac{1}{\bar{s}(\xi)} \tilde{\Omega}(\eta, p) d\eta d\xi - \delta_0^2 p^2 \int_z^1 \bar{\rho}(\xi) \int_0^{\xi} \frac{\bar{\gamma}(\eta)}{\bar{s}(\eta)} \tilde{W}(\eta, p) d\eta d\xi. \quad (48)$$

Поменяв порядок интегрирования в двойных интегралах системы (47), (48), получим систему интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода:

$$\tilde{W}(z, p) = \int_0^1 K_1(z, \xi, p) \tilde{W}(\xi, p) d\xi + \int_0^1 K_2(z, \xi, p) \tilde{\Omega}(\xi, p) d\xi + g(z, p), \quad (49)$$

$$\tilde{\Omega}(z, p) = \int_0^1 K_3(z, \xi, p) \tilde{W}(\xi, p) d\xi + \int_0^1 K_4(z, \xi, p) \tilde{\Omega}(\xi, p) d\xi. \quad (50)$$

Здесь ядра $K_1(z, \xi, p)$, $K_2(z, \xi, p)$, $K_3(z, \xi, p)$, $K_4(z, \xi, p)$ и правая часть $g(z, p)$ имеют вид:

$$K_1(z, \xi, p) = -p(\bar{c}(\xi) + d_1 \frac{\bar{\gamma}^2(\xi)}{\bar{s}(\xi)}) \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)}, \quad K_2(z, \xi, p) = -p d_1 \frac{\bar{\gamma}(\xi)}{\bar{s}(\xi)} \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)},$$

$$K_3(z, \xi, p) = -\delta_0^2 p^2 \frac{\bar{\gamma}(\xi)}{\bar{s}(\xi)} \int_{\min\{z, \eta\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta, \quad K_4(z, \xi, p) = -\delta_0^2 p^2 \frac{1}{\bar{s}(\xi)} \int_{\min\{z, \eta\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta,$$

$$g(z, p) = \tilde{q}_1(p) \int_0^z \frac{d\xi}{\bar{k}(\xi)}.$$

Система уравнений (49), (50) решается численно методом коллокаций с использованием квадратурной формулы трапеций. Для этого вводится равномерное разбиение отрезка $[0,1]$ на n отрезков с координатами узловых точек $z_i = \Delta z(i-1)$ ($i=1, \dots, n+1$), где $\Delta z = 1/n$ — шаг разбиения. Удовлетворяя систему интегральных уравнений (49), (50) на наборе точек z_i , в соответствии с методом коллокаций, сведем задачу к решению линейной алгебраической системы размерностью $2(n+1)$ относительно узловых неизвестных.

Для определения трансформанты наведенного потенциала необходимо знать $\tilde{W}(z, p)$ и $\tilde{U}(1, p)$. Величину $\tilde{U}(1, p)$ определим, воспользовавшись (46):

$$\tilde{U}(1, p) = \int_0^1 \left(\frac{1}{\bar{s}(\xi)} \tilde{\Omega}(\xi, p) + \frac{\bar{\gamma}(\xi)}{\bar{s}(\xi)} \tilde{W}(\xi, p) \right) d\xi. \quad (51)$$

Оригиналы функций по их трансформантам можно установить, если применить обратное преобразование Лапласа, то есть вычислить контурный интеграл:

$$F(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \tilde{F}(p) e^{p\tau} dp. \quad (52)$$

В случае, когда под знаком интеграла в (52) стоит мероморфная функция $\tilde{F}(p)$, интеграл можно преобразовать. Применяв методы контурного интегрирования и теорию вычетов, получим выражение для оригинала путем его разложения в ряды по показательным функциям:

$$F(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res} \left(\tilde{F}(p) e^{p\tau} \right), \quad \tau > 0, \quad (53)$$

где члены ряда (53) соответствуют особым точкам изображения $\tilde{F}(p)$.

Численно-аналитические решения СЛАУ, последовавшей из дискретизации системы (49), (50), показали, что трансформанты температуры и напряжений в узловых точках являются дробно-рациональными функциями параметра преобразования Лапласа p . Для нахождения оригиналов температуры и напряжений в узловых точках в работе применялась теория вычетов: оригиналы находились в виде конечной суммы показательных функций, причем показатели последних соответствовали полюсам функций, являющихся трансформантами температуры и напряжений в этих точках. В случае $d_1 = 0$ эти полюса разделяются на два подмножества. Первое включает в себя пары чисто мнимых чисел, отвечающих задаче теории упругости, а второе содержит вещественные отрицательные числа, соответствующие задаче теплопроводности. При $d_1 \neq 0$ корни имеют отрицательные вещественные части и трансформируются в комплексно-сопряженные пары.

5. Тестирование решения задачи для слоя

Для того чтобы убедиться в достоверности результатов решения задачи (33)–(37), произведено сравнение аналитического решения для однородного термоэлектроупругого слоя, изготовленного из титаната бария (BaTiO_3) с численным, полученным из решения системы (49), (50) и применения обращения преобразования Лапласа на основе теории вычетов. Аналитическое решение строилось путем дифференцирования системы дифференциальных уравнений в трансформантах (39)–(42) при постоянных значениях безразмерных коэффициентов, равных единице. В итоге система сводилась к дифференциальному уравнению 4-го порядка, которое решалось аналитически в системе Maple. Обращение трансформант решений осуществлялось с помощью метода Дурбина [24], который имеет высокую точность вычислений оригиналов.

При нахождении безразмерных параметров δ_0 , d_1 , входящих в соотношения для расчета наведенного потенциала, использовались значения физических постоянных титаната бария (представителя керамики класса 6 mm): $c_{33} = 16,2 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $e_{33} = 18,6$ Кл/м²; $\varepsilon_{33} = 12,57 \cdot 10^{-9}$ Ф/м; $k_{33} = 0,036$ Вт/(м·К); $\gamma_{33} = 3,94 \cdot 10^5$ Н/(м²·К); $g_3 = 2,0 \cdot 10^{-4}$ Кл/(м²·К); $c_e = 3 \cdot 10^6$ Дж/(м³·К); $\rho = 4,5 \cdot 10^3$ кг/м³. Исходя из этих данных, во всех дальнейших расчетах полагалось: $\delta_0 = 2,1 \cdot 10^{-9}$, $d_1 = 9,8 \cdot 10^{-3}$.

Рассматривались следующие законы изменения тепловой нагрузки, наиболее распространенные на практике [8, 9]: 1) $q_1(\tau) = \delta(\tau)$; 2) $q_1(\tau) = H(\tau)$; 3) $q_1(\tau) = H(\tau) - H(\tau - \tau_1)$. Здесь $\delta(\tau)$ — импульсная дельта-функция Дирака, $H(\tau)$ — функция Хевисайда. В таблице приведены значения наведенного электрического потенциала для некоторых моментов времени при нагрузке $q_1(\tau) = \delta(\tau)$, полученные аналитическим путем и численно при различных значениях параметра дискретизации n системы (49), (50). Из анализа содержимого таблицы следует, что точность вычисления наведенного потенциала зависит от выбора значения параметра дискретизации n и количества значащих цифр после запятой (параметра *Digits*).

Таблица. Значения наведенного потенциала (38) при первом типе нагрузки для некоторых моментов времени

Моменты времени τ	Аналитическое решение	Численное решение			
		$n = 12$, <i>Digits</i> = 10	Относительная погрешность, %	$n = 40$, <i>Digits</i> = 50	Относительная погрешность, %
10^{-15}	$6,4 \cdot 10^4$	$6,9 \cdot 10^5$	2056	$7,4 \cdot 10^4$	131
10^{-10}	183,4	185,8	102,6	93,8	1,04
10^{-7}	1,474	1,688	14,5	1,492	0,52
10^{-5}	$1,2506 \cdot 10^{-1}$	$1,2562 \cdot 10^{-1}$	0,45	$1,253 \cdot 10^{-1}$	0,19
$1 \cdot 10^{-1}$	$8,694 \cdot 10^{-3}$	$8,702 \cdot 10^{-3}$	0,21	$8,704 \cdot 10^{-3}$	0,11
2	$2,864 \cdot 10^{-5}$	$2,868 \cdot 10^{-5}$	0,14	$2,866 \cdot 10^{-5}$	0,07

Достоверность результатов решения задачи (33)–(37) исследовалась также при нагрузке второго — $q_1(\tau) = H(\tau)$, и третьего — $q_1(\tau) = H(\tau) - H(\tau - \tau_1)$, типов. Выяснилось, что на больших временах (при тепловой нагрузке первого типа это — $\tau > 10^{-5}$, и $\tau > 10^{-2}$ — при нагрузках второго и третьего типов) для достижения относительной погрешности решения менее 1% необходимо брать $n = 12$ и *Digits* = 10. На малых временах ($\tau \in [10^{-10}, 10^{-5}]$ при нагрузке первого типа и $\tau \in [10^{-7}, 10^{-2}]$ при нагрузке второго и третьего типов) необходимо брать $n = 40$, *Digits* = 50. На временах $\tau < 10^{-10}$ при нагрузке первого типа и $\tau < 10^{-7}$ при других типах нагрузки обеспечить хорошую точность невозможно даже при $n = 40$. К тому же дальнейшее увеличение n сильно замедляет работу компьютера.

В работе изучалось также влияние типа тепловой нагрузки на характер поведения наведенного потенциала однородного слоя. На рисунке 1 изображены графики наведенного электрического потенциала в зависимости от времени при различных типах тепловой нагрузки, действующей на верхней грани слоя. В вычислениях принято $n = 12$.

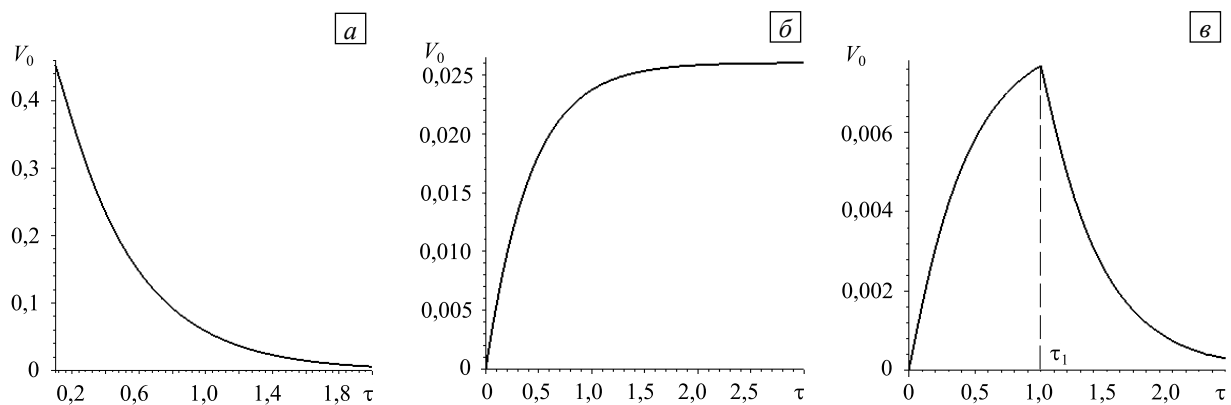


Рис. 1. Поведение во времени наведенного потенциала однородного слоя, полученное численным методом при различных тепловых нагрузках: первый (а), второй (б), третий (в) типы

Из рисунка 1 видно, что при первом типе нагрузки потенциал экспоненциально убывает; при втором типе потенциал монотонно растет от нуля и со временем выходит на некоторое предельное значение; в случае третьего типа потенциал монотонно растет от нуля до пикового значения, достигаемого при $\tau = \tau_1$, а затем с ростом τ быстро стремится к нулю.

6. Исследование влияния законов неоднородности на электрический потенциал

Численное исследование влияния на электрический потенциал законов неоднородности различных параметров функционально-градиентного материала слоя включало две серии вычислительных экспериментов. Первая серия имела целью узнать, изменение каких модулей может оказывать влияние на наведенный потенциал. Для этого каждый из модулей по очереди увеличивался в два раза (все остальные оставались неизменными) и наблюдался характер наведенного потенциала. Выяснилось, что электрический потенциал сильно зависел только от изменения модулей $\bar{k}(z)$, $\bar{c}(z)$. В тоже время манипуляции с модулями $\bar{\gamma}(z)$, $\bar{s}(z)$ и $\bar{\rho}(z)$ практически не оказывали влияния на характер его поведения во времени. Это объясняется тем, что для реальных материалов, например для титаната бария, параметр связанности d_1 , входящий в ядра интегральных уравнений системы (49), (50) является небольшой

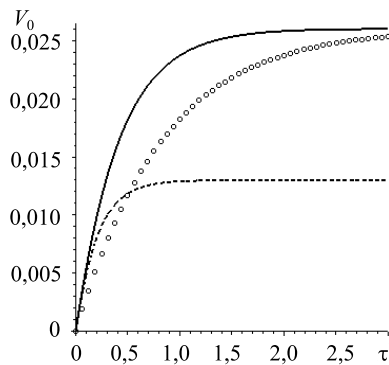


Рис. 2. Поведение во времени наведенного потенциала при нагрузке второго типа для титаната бария (сплошная линия) и для материала с другим коэффициентом теплопроводности (штриховая линия) и другой удельной теплоемкостью (кружки)

величиной.

На рисунке 2 изображен электрический потенциал в зависимости от времени. Графики построены на основе результатов численного решения при тепловой нагрузке $q_1(\tau) = H(\tau)$: сплошная линия — для материала титаната бария; штриховая линия — для материала с увеличенным в 2 раза по сравнению с титанатом бария коэффициентом теплопроводности; кружки — для материала с увеличенной в 2 раза удельной теплоемкостью. Графики свидетельствуют, что наиболее сильное влияние на электрический потенциал оказывает изменение коэффициента теплопроводности.

Во второй серии вычислительных экспериментов выяснялось влияние на наведенный потенциал неоднородности модулей $\bar{k}(z)$ и $\bar{c}(z)$. Это обуславливалось тем, что при моделировании функционально-градиентные материалы часто рассматриваются как неоднородные материалы

со степенным или экспоненциальным законом распределения неоднородности [12, 13]. Поэтому с практической точки зрения было важно знать, как может изменяться электрический потенциал при наиболее распространенных на практике градиентных зависимостях каждого из модулей.

На рисунке 3 представлены графики изменения наведенного электрического потенциала при различных законах изменения коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости. Сплошными линиями обозначены графики временной зависимости потенциала, наведенного тепловыми нагрузками $q_1(\tau) = H(\tau)$ (Рис. 3а) и $q_1(\tau) = \delta(\tau)$ (Рис. 3б) в случае однородного слоя, штриховыми линиями — при $\bar{k}(z) = 1,1z^2 + z + 0,5$ (Рис. 3а) и $\bar{c}(z) = 1,3 - 0,2z^2$ (Рис. 3б), кружками — при $\bar{k}(z) = e^{-z}$ (Рис. 3а) и $\bar{c}(z) = e^z$ (Рис. 3б). Из рисунка видно, что различные законы распределения $\bar{k}(z)$, $\bar{c}(z)$, особенно в виде экспоненциальных функций, оказывают сильное влияние на характер изменения наведенного потенциала. Это фактор важно учитывать при проектировании различных технических устройств на основе функционально-градиентных пьезоматериалов с заданными свойствами.

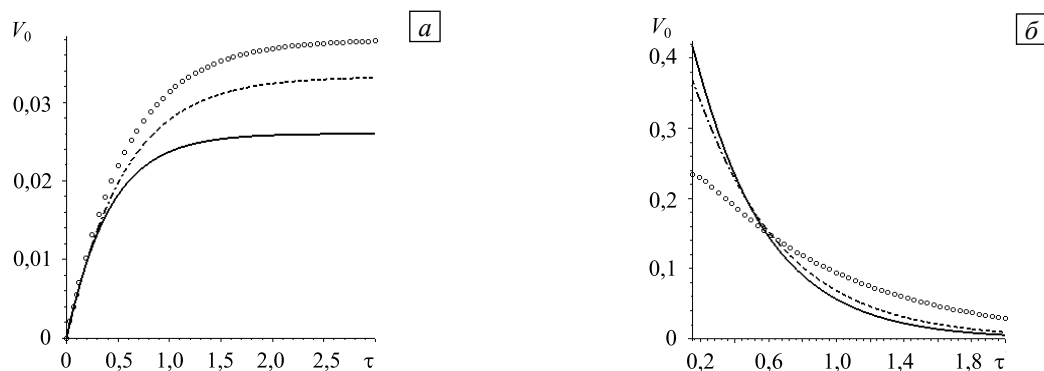


Рис. 3. Поведение во времени наведенного потенциала при различных законах неоднородности параметров материала слоя: коэффициента теплопроводности (а), где сплошная линия – однородный слой при тепловой нагрузке $q_1(\tau) = H(\tau)$, штриховая линия – $\bar{k}(z) = 1,1z^2 + z + 0,5$, кружки – $\bar{k}(z) = e^{-z}$; удельной теплоемкости (б), где сплошная линия – однородный слой под нагрузкой $q_1(\tau) = \delta(\tau)$, штриховая линия – $\bar{c}(z) = 1,3 - 0,2z^2$, кружки – $\bar{c}(z) = e^z$

7. Выводы

В работе предложен метод нахождения наведенного потенциала неоднородного термоэлектроупругого слоя из пьезокерамики класса 6 mm, основанный на сведении исходной задачи к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода в трансформантах Лапласа и применении теории вычетов. Проведено тестирование предложенного метода на примере однородного слоя, изготовленного из титаната бария. Выяснено, что точность вычисления наведенного потенциала зависит от выбора величины параметра дискретизации системы интегральных уравнений и разрядности чисел, которые задаются компьютеру. Для пьезокерамики класса 6 mm исследовано влияние различных типов тепловой нагрузки и распределения неоднородности на характер изменения наведенного электрического потенциала. Установлено, что различные законы распределения коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости сильно влияют на поведение во времени наведенного потенциала. В тоже время законы распределения плотности, модуля упругости и коэффициента температурного напряжения такого влияния не оказывают. Это объясняется тем, что реальные пьезокомпозиты имеют небольшой коэффициент связности теплового и механических полей. Предложенный метод нахождения наведенного потенциала и результаты изучения связи характера наведенного потенциала с различными видами неоднородности могут быть использованы при проектировании и оптимизации температурных датчиков, изготовленных из функционально-градиентных пироматериалов класса 6 mm.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00354-а), Южного математического института ВНИЦ РАН и программы Президиума РАН №1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования» (проект № 114072870112).

Литература

1. Hussain T.M., Baig A.M., Saadawi T.N., Ahmed S.A. Infrared pyroelectric sensor for detection of vehicular traffic using digital signal processing techniques // IEEE T. Veh. Technol. – 1995. – Vol. 44, no. 3. – P. 683-689. DOI
2. Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева границы // ПММ. – 1952. – Т. 16, № 3. – С. 341-344.
3. Mindlin R.D. On the equations of motion of piezoelectric crystals // Problems of continuum mechanics / Ed. by N.I. Muskhilishvili. – Philadelphia: SIAM, 1961. – P. 282-290.
4. Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates // Int. J. Solids Struct. – 1974. – Vol. 10, no. 6. – P. 625-637. DOI
5. Nowacki W. Some general theorems of thermopiezoelectricity // J. Therm. Stresses. – 1978. – Vol. 1, no. 2. – P. 171-182. DOI
6. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
7. Ватульян А.О., Кирютенко А.Ю., Наседкин А.В. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектроупругости // ПМТФ. – 1996. – Т. 37, № 5. – С. 135-142.
8. Ватульян А.О., Кирютенко А.Ю., Федорова В.В. Задача Даниловской в термоэлектроупругости // Межвузовский сборник научных трудов «Интегро-дифференциальные операторы и их приложения». – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 1997. – № 2. – С. 25-30.
9. Ватульян А.О. Тепловой удар по термоэлектроупругому слою // Вестник ДГТУ. – 2001. – Т. 1(7), № 1. – С. 82-89.
10. Bassiouny E., Youssef H.M. Two-temperature generalized thermopiezoelectricity of finite rod subjected to different types of thermal loading // J. Therm. Stresses. – 2008. – Vol. 31, no. 3. – P. 233-245. DOI
11. Bassiouny E., Youssef H.M. Thermo-elastic properties of thin ceramic layers subjected to thermal loadings // J. Thermoelasticity. – 2013. – Vol. 1, no. 1. – P. 4-12. (URL: <http://researchpub.org/journal/jot/number/vol1-no1/vol1-no1-1.pdf>).
12. Zhu X., Meng Z. Operational principle, fabrication and displacement characteristics of a functionally graded piezoelectric ceramic actuator // Sensors Actuat. A-Phys. – 1995. – Vol. 48, no. 3. – P. 169-176. DOI
13. Wu C.C.M., Kahn M., Moy W. Piezoelectric ceramics with functional gradients: A new application in material design // J. Am. Ceram. Soc. – 1996. – Vol. 79, no. 3. – P. 809-812. DOI
14. Shen S., Kuang Z.-B. An active control model of laminated piezothermoelastic plate // Int. J. Solids Struct. – 1999. – Vol. 36, no. 13. – P. 1925-1947. DOI
15. Lee W.Y., Stinton D.P., Berndt C.C., Erdogan F., Lee Y.-D., Mutasim Z. Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications // J. Am. Ceram. Soc. – 1996. – Vol. 79, no. 12. – P. 3003-3012. DOI
16. Wang B.L., Noda N. Design of a smart functionally graded thermopiezoelectric composite structure // Smart. Mater. Struct. – 2001. – Vol. 10, no. 2. – P. 189-193. DOI
17. Wu X.-H., Shen Y.-P., Chen C. An exact solution for functionally graded piezothermoelastic cylindrical shell as sensor or actuators // Mater Lett. – 2003. – Vol. 57, no. 22-23. – P. 3532-3542. DOI
18. Ying C., Zhefei S. Exact solutions of functionally gradient piezothermoelastic cantilevers and parameter identification // J. Intel. Mat. Syst. Str. – 2005. – Vol. 16, no. 6. – P. 531-539. DOI
19. Zhong Z., Shang E.T. Exact analysis of simply supported functionally graded piezothermoelectric plates // J. Intel. Mat. Syst. Str. – 2005. – Vol. 16, no. 7-8. – P. 643-651. DOI
20. Ootao Y., Tanigawa Y. The transient piezothermoelastic problem of a thick functionally graded thermopiezoelectric strip due to nonuniform heat supply // Arch. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 74, no. 7. – P. 449-465. DOI
21. Ootao Y., Tanigawa Y. Transient piezothermoelastic analysis for a functionally graded thermopiezoelectric hollow sphere // Compos. Struct. – 2007. – Vol. 81, no. 7. – P. 540-549. DOI

22. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // *Int. J. Solids Struct.* – 2014. – Vol. 51, no. 3-4. – P. 767-773. DOI
23. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // *Инженерно-физический журнал.* – 2014. – Т. 87, № 1. – С. 217-224. (English version DOI)
24. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // *Comput. J.* – 1974. – Vol. 17, no. 4. – P. 371-376. DOI

References

1. Hussain T.M., Baig A.M., Saadawi T.N., Ahmed S.A. Infrared pyroelectric sensor for detection of vehicular traffic using digital signal processing techniques. *IEEE T. Veh. Technol.*, 1995, vol. 44, no. 3, pp. 683-689. DOI
2. Danilovskaya V.I. Temperaturnye napryazheniya v uprugom poluprostranstve, vznikayushchie vsledstvie vnezapnogo nagreva granitsy [Thermal stresses in an elastic half-space due to sudden heating of its boundary]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Applied Mathematics and Mechanics*, 1952, vol. 16, no. 3, pp. 341-344.
3. Mindlin R.D. On the equations of motion of piezoelectric crystals. *Problems of continuum mechanics*, ed. by N.I. Muskhilishvili. Philadelphia: SIAM, 1961. Pp. 282-290.
4. Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates. *Int. J. Solids Struct.*, 1974, vol. 10, no. 6, pp. 625-637. DOI
5. Nowacki W. Some general theorems of thermopiezoelectricity. *J. Therm. Stresses*, 1978, vol. 1, no. 2, pp. 171-182. DOI
6. Nowacki W. *Electromagnetic effects in deformable solids*. Warsaw: PWN, 1983. [In Polish].
7. Vatulyan A.O., Kirutenko A.Yu., Nasedkin A.V. Ploskie volny i fundamentalnye resheniya v lineynoy termoelektrouprugosti [Plane waves and fundamental solutions in linear thermoelectroelasticity]. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1996, vol. 37, no. 5, pp. 135-142.
8. Vatulyan A.O., Kirutenko A.Yu., Fedorova V.V. Zadacha Danylovskoy v termoelektrouprugosti [Danilovskaya's problem in thermoelectroelasticity], *Integro-differentsialnye operatory i ikh prilozheniya* [Integro-differential operators and their applications]. Rostov-on-Don: Don State Technical University, 1997, vol. 2, pp. 25-30.
9. Vatulyan A.O. Teplovoy udar po termoelektrouprugomu sloyu [Thermal shock on thermoelectroelasticity layer]. *Vestnik DSTU*, 2001, vol. 1, no. 1, pp. 82-89.
10. Bassiouny E., Youssef H.M. Two-temperature generalized thermopiezoelectricity of finite rod subjected to different types of thermal loading. *J. Therm. Stresses*, 2008, vol. 31, no. 3, pp. 233-245. DOI
11. Bassiouny E., Youssef H.M. Thermo-elastic properties of thin ceramic layers subjected to thermal loadings. *J. Thermoelasticity*, 2013, vol. 1, no. 1, pp. 4-12. (URL: <http://researchpub.org/journal/jot/number/vol1-no1/vol1-no1-1.pdf>).
12. Zhu X., Meng Z. Operational principle, fabrication and displacement characteristics of a functionally gradient piezoelectric ceramic actuator. *Sensors Actuat. A-Phys.*, 1995, vol. 48, no. 3, pp. 169-176. DOI
13. Wu C.C.M., Kahn M., Moy W. Piezoelectric ceramics with functional gradients: A new application in material design. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1996, vol. 79, no. 3, pp. 809-812. DOI
14. Shen S., Kuang Z.-B. An active control model of laminated piezothermoelastic plate. *Int. J. Solids Struct.*, 1999, vol. 36, no. 13, pp. 1925-1947. DOI
15. Lee W.Y., Stinton D.P., Berndt C.C., Erdogan F., Lee Y.-D., Mutasim Z. Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1996, vol. 79, no. 12, pp. 3003-3012. DOI
16. Wang B.L., Noda N. Design of a smart functionally graded thermopiezoelectric composite structure. *Smart. Mater. Struct.*, 2001, vol. 10, no. 2, pp. 189-193. DOI
17. Wu X.-H., Shen Y.-P., Chen C. An exact solution for functionally graded piezothermoelastic cylindrical shell as sensor or actuators. *Mater Lett.*, 2003, vol. 57, no. 22-23, pp. 3532-3542. DOI
18. Ying C., Zhefei S. Exact solutions of functionally gradient piezothermoelastic cantilevers and parameter identification. *J. Intel. Mat. Syst. Str.*, 2005, vol. 16, no. 6, pp. 531-539. DOI
19. Zhong Z., Shang E.T. Exact analysis of simply supported functionally graded piezothermoelectric plates. *J. Intel. Mat. Syst. Str.*, 2005, vol. 16, no. 7-8, pp. 643-651. DOI
20. Ootao Y., Tanigawa Y. The transient piezothermoelastic problem of a thick functionally graded thermopiezoelectric strip due to nonuniform heat supply. *Arch. Appl. Mech.*, 2005, vol. 74, no. 7, pp. 449-465. DOI
21. Ootao Y., Tanigawa Y. Transient piezothermoelastic analysis for a functionally graded thermopiezoelectrical hollow sphere. *Compos. Struct.*, 2007, vol. 81, no. 7, pp. 540-549. DOI
22. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod. *Int. J. Solids Struct.*, 2014, vol. 51, no. 3-4, pp. 767-773. DOI
23. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. A method of identifying thermoelastic characteristics for inhomogeneous bodies. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2014, vol. 87, no. 1, pp. 225-232. DOI
24. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *Comput. J.*, 1974, vol. 17, no. 4, pp. 371-376. DOI

Поступила в редакцию 18.10.2016; опубликована в электронном виде 30.03.2017

Сведения об авторах

Ватульян Александр Ованесович, дфмн, проф., зав. каф., Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (ИММиКН ЮФУ), 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru
 Нестеров Сергей Анатольевич, кфмн, снс, Южный математический университет ВНЦ РАН (ЮМИ ВНЦ РАН), 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, д. 22; e-mail: 1079@list.ru