

DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.1.8
УДК 532.595:519.635

ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В ИЗОГНУТОМ ТРУБОПРОВОДЕ

О.П. Ткаченко, А.С. Рябоконт

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Российская Федерация

Задача поставлена в контексте проблемы исследования гидравлического удара в трубопроводных системах сложной конфигурации. Как правило, в литературе экспериментальные данные о таких трубопроводах ограничены графиками искомых функций. Для подобного случая, когда в эталонном первоисточнике данные представлены только в виде графиков функций, выбраны числовые критерии оценки адекватности математической модели трубопровода и предложен алгоритм ее количественной верификации. Сформулирована новая математическая модель гидравлического удара в изогнутом трубопроводе, и на ее основе проведены численные эксперименты для различных задач. При верификации модели выбраны две механические системы: трубопровод длиной 48 м, составленный из семи участков, и плавно изогнутая труба длиной 624 мм. Дополнительно рассчитаны акустические колебания изогнутой трубы длиной 300 мм. Исходя из литературных данных об указанных трубопроводах, с помощью оригинальных расчетов найдены количественные характеристики адекватности предлагаемой математической модели. Ими являются результаты статистического анализа дискретных рядов, в виде которых записываются распределения функций давления жидкости в зависимости от времени. Ряды получаются путем оцифровки соответствующих графиков из статей-первоисточников и последующего нахождения численного решения уравнений тестируемой модели. Установлено, что описание результатов натурных экспериментов посредством новой модели имеет точность, близкую к точности, достигнутой в первоисточниках. В случае, когда труба состоит из семи участков, выявлено, что решение можно улучшить, если прибегнуть к методам идентификации параметров. Полученные результаты показывают, что авторская математическая модель адекватно изображает явление гидравлического удара в трубах и охватывает различные случаи гидроупругих колебаний с единых позиций.

Ключевые слова: гидравлический удар, изогнутый трубопровод, верификация математической модели, гидроупругость

NUMERICAL ESTIMATES OF THE ADEQUACY OF A MATHEMATICAL MODEL OF HYDROELASTIC OSCILLATIONS IN CURVED PIPELINES

O.P. Tkachenko and A.S. Ryabokon'

Computer Center FEB RAS, Khabarovsk, Russian Federation

The problem was set in the research context of water hammer in the pipeline system with complex configuration. Usually, the experimental data in the literature on such pipelines are limited to the charts of the unknown functions. Numerical criteria of the adequacy of a mathematical model for a pipeline and an algorithm for its quantitative verification are selected for the case where data is presented in a reference source only by the charts of functions. A new mathematical model is presented and a series of numerical experiments for the water hammer in a variety of curved pipelines have been performed. To verify the model, two pipelines are taken: a pipeline consisting of seven sections of the total length of 48 m, and a smoothly curved pipe of the total length of 624 mm. In addition, acoustic oscillations of a bent pipe of 300 mm in length are calculated. Based on the published data on these pipelines and the results of numerical experiments, quantitative characteristics of the adequacy of the mathematical model proposed are found. These characteristics are the results from statistical analysis of discrete time series of fluid pressure, which are obtained by digitizing charts from the articles referenced here and by solving equations of the tested model. It has been found that the description of the results of field experiments by the proposed mathematical model exhibits accuracy close to that of a mathematical description of the reference sources. In the case when a pipe consists of seven sections, its accuracy can be improved using the parameter identification methods. Thus, the proposed mathematical model adequately describes the results obtained for hydraulic shock in pipes and covers different cases of hydro-elastic vibrations from a unified viewpoint.

Key words: water hammer, bent pipeline, mathematical model verification, hydro-elasticity

1. Введение

Трубопроводный транспорт имеет разветвленную структуру, его трасса включает многочисленные повороты [1]. В процессе эксплуатации по различным причинам (из-за собственной неустойчивости, подвижки грунта, вибраций от техногенных процессов, сейсмической активности и другого), трубопроводы могут испытывать значительные смещения по отношению к своему начальному положению [2, 3]. Теоретически возможным является нахождение координат изменения профиля трубопровода по результатам анализа распространения в нем гидроупругих колебаний. Практический и научный интерес представляет изучение в сложных городских трубопроводных системах волнового процесса, вызываемого гидравлическим ударом [4].

В настоящее время имеется множество математических моделей трубопроводных систем, учитывающих различные аспекты их поведения. Главные физические принципы построения и анализа моделей гидроупругих колебаний в трубах установлены в [5, 6]. Ниже представлены некоторые классы моделей, основанных на теории стержней.

Классическая математическая модель гидравлического удара в прямой трубе создана Н.Е. Жуковским [5]. На протяжении длительного времени она была единственной и общепризнанной. Продвинуться в исследовании гидравлического удара удалось в 1960-е годы Г.Т. Алдошину, создавшему теорию, адекватно учитывающую некоторые явления в предварительно деформированной трубе [7]. Обзор решений этой и других задач выполнен в [8].

Предварительный скачок давления при гидравлическом ударе объяснен в работе [9] как следствие эффекта Пуассона. Далее эта теория была применена и развита в [10, 11] в приложении к трубопроводным системам, состоящим из нескольких прямолинейных участков. Более полный учет движения трубы при гидравлическом ударе рассматривается в [12, 13] и других работах. Обзор состояния исследований взаимодействия системы труб с жидкостью в рамках модели трубы как стержня есть в [14]. В целом эта тематика относится к проблемам гидроупругости (Fluid-Structure Interaction). В труде [15] осуществлен обзор задач, связанных с колебаниями подводных трубопроводов.

Подход к описанию трубопроводов как стержней является апробированным и хорошо обоснованным. В то же время он имеет ряд недостатков. Можно отметить два из них: 1) необходимость построения различных моделей для разных профилей трубопроводов даже при небольшом изменении постановки задачи; 2) слабая изученность деформаций и напряжений в местах соединения элементов, поскольку здесь может иметь место изменение вида профиля (например, стыкуются дуга и прямая).

В настоящей работе, во-первых, рассмотрен вопрос адекватности численного подхода к математическому моделированию колебаний в трубопроводах при представлении трубы как оболочки. Количественная апробация реализована с использованием двух различных наборов экспериментальных данных. Один получен на экспериментальной установке по изучению гидравлического удара [11] (на этих данных протестирована модель [16]), второй взят в литературе [17], где получен на установке, отличающейся от установки из [11] и конструкцией, и методикой постановки опытов. Во-вторых, для полноты картины рассчитаны параметры акустических колебаний для трубопровода из [18], где был проведен только численный анализ.

Ткаченко О.П. и Рукавишниковым В.А. (см. [19]) была предложена оригинальная математическая модель, описывающая все случаи, рассматриваемые в [11, 17, 18]. Дополнительное уточнение и развитие этой модели сделано в [20]. На качественном уровне работоспособность модели продемонстрирована в [21]. Цель предлагаемой вниманию статьи состоит в поиске количественных критериев. Разработана методика численной оценки адекватности математической модели из [19, 20] при наличии гидроупругих колебаний трубопровода и показана ее правомерность, дано численное сравнение: количественное с математическими моделями из [11, 17] и качественное с моделью из [18]. Анализ результатов данной статьи и работы [21] позволил сделать вывод о большей общности математической модели [19] по сравнению со стандартными стержневыми моделями трубопроводных систем.

2. Математическая модель распространения гидроупругих колебаний в трубопроводе

2.1. Механические и геометрические свойства трубопровода

Ниже цитируются основные теоретические положения, изложенные в нескольких статьях, в частности в [19–22]. Раздел 2 содержит постановку начально-краевой задачи колебаний трубопровода и формулировку алгоритма ее решения.

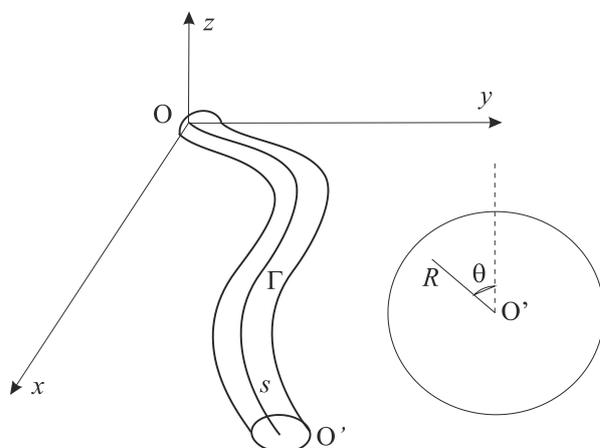


Рис. 1. Геометрия механической системы и используемые системы координат: $Oxyz$ – глобальная декартова, $O's\theta R$ – криволинейная

Рассматривается металлический трубопровод длиной L с круглым поперечным сечением. Труба имеет малую толщину стенки h и радиус срединной поверхности R_0 . Осевая линия трубы — слабоизогнутая плоская кривая $\Gamma_0 = \{x_0, y_0 : x_0 = x_0(s), y_0 = y_0(s)\}$, где s — естественный параметр (длина дуги). Предполагается, что начальный радиус кривизны осевой линии $\rho_0(s)$ велик по сравнению с R_0 .

Системы координат, используемые для математического моделирования движения трубопровода, описаны в [19, 22] (Рис. 1). Криволинейные координаты $\{s, \theta, R\}$ строятся на оси Γ так, что s — длина дуги (OO') , а $\{\theta, R\}$ — полярные координаты в поперечном сечении трубы.

При моделировании трубопровода полагается малым параметр

$$\lambda = \frac{R_0}{\min |\rho_0|} \ll 1, \quad (1)$$

и считается, что справедливы условия применимости теории полубезмоментных оболочек [23]:

$$h/R_0 \leq 0,1; \quad \min(L, \rho_0)/R_0 \geq 4. \quad (2)$$

В основу математического представления динамики стенки трубы под нагрузкой положены уравнения движения полубезмоментной оболочки, выведенные в [19, 20] и совпадающие с точностью до обозначений с уравнениями из [23]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial I^{(0)}}{\partial s} - \frac{1-\nu}{B} \frac{\partial \chi_0}{\partial \theta} + (1-\nu) \left(k_1 k_2 u - \frac{k_2}{A} \frac{\partial w}{\partial s} \right) &= -\frac{1-\nu^2}{Eh} (X - k_1 m_0), \\ \frac{1}{B} \frac{\partial I^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{A} \frac{\partial \chi_0}{\partial s} + (1-\nu) \left(k_1 k_2 v - \frac{k_1}{B} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) &= -\frac{1-\nu^2}{Eh} (Y + k_2 m_s), \\ -(k_1 + k_2) \cdot I^{(0)} + \frac{1-\nu}{AB} \left[2ABk_1 k_2 w + \frac{\partial}{\partial s} (Bk_2 u) + \frac{\partial}{\partial \theta} (Ak_1 v) \right] - \frac{h^2}{12} \nabla_e^2 \left[(k_1^2 + k_2^2) w \right] - \\ - \frac{h^2}{12} \nabla_e^2 \nabla_e^2 w &= -\frac{1-\nu^2}{Eh} \left\{ Z + \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (Am_s) - \frac{\partial}{\partial s} (Bm_0) \right] \right\}; \\ \nabla_e^2 &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial \cdot}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial \cdot}{\partial \theta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь: $I^{(0)}$ — первый инвариант тензора деформаций; χ_0 — линейное кручение; u, v, w — перемещения срединной поверхности трубы в направлениях s, θ, R соответственно; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона; X, Y, Z — действующие на трубу внешние силы и силы инерции, приведенные к ее срединной поверхности; m_s, m_0 — моменты внешних поверхностных сил; A, B — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности трубы; k_1, k_2 — главные кривизны срединной поверхности; ∇_e^2 — обобщенный оператор Лапласа, введенный В.З. Власовым в [23].

Предполагается, что труба заполнена капельной слабо сжимаемой жидкостью. Движение жидкости представляется в виде суммы стационарной и колебательной составляющих [19]. Стационарное течение описывается уравнениями Эйлера, дополненными законом трения [24]:

$$\rho_f (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla p_0 - \Phi(v_{0f}), \quad (\nabla \cdot \mathbf{v}_0) = 0, \quad \rho_f = \text{const}, \quad (4)$$

колебательное движение — линеаризованными уравнениями вида:

$$\rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right] = -\nabla p_1, \quad 1/c_f^2 \left[\frac{\partial p_1}{\partial t} + \nabla \cdot (p_1 \mathbf{v}_0) \right] + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}_1) = 0. \quad (5)$$

В (4), (5) приняты обозначения: \mathbf{v}_0 — вектор стационарной скорости; p_0 — давление в стационарном потоке; ρ_f — плотность жидкости; v_{0f} — скорость жидкости на входе в трубу; \mathbf{v}_1, p_1 — нестационарные составляющие скорости и давления; c_f — скорость звука в жидкости; ∇ — стандартный дифференциальный оператор набла [24]; $\Phi(v_{0f})$ — сила сопротивления, действующая на жидкость, выражающаяся соотношениями [24, 25] $\Phi(v_{0f}) = \beta v_{0f}^2$, где $\beta = \lambda_1 \rho_f / (4R_0)$, $\text{Re} = 2v_{0f} R_0 / \nu_f$, $\nu_f = \mu_f / \rho_f$; μ_f — коэффициент динамической вязкости жидкости; коэффициент λ_1 принимает значения $\lambda_1 = 64/\text{Re}$ при $\text{Re} < 2000$ и $\lambda_1 = 0,0032 + 0,221/\text{Re}^{0,237}$ при $\text{Re} \geq 2000$ (формулы для величин λ_1, β взяты из работы И. Никурадзе [25], они же приведены и в классическом труде Л.Г. Лойцянского [24], в котором излагается методика учета трения потока жидкости в шероховатых трубах).

Для колебательного движения жидкости полагается малым параметр:

$$\alpha = R_0/l \ll 1,$$

где $l = c_f/\omega$ — характерная длина волны, ω — характерная частота колебаний.

2.2. Формулировка дифференциальной начально-краевой задачи

В [19, 20, 22] изложено построение математической модели сложно изогнутого трубопровода круглого поперечного сечения как технической оболочки. В [19] предложен, а в [20] дополнительно обоснован алгоритм редукции полученной задачи гидроупругих колебаний оболочки (3), (5) к одномерной постановке с учетом условия периодичности решения по угловой координате (то есть вдоль окружности поперечного сечения трубы). Окончательные уравнения модели имеют следующий вид:

– для перемещений стенки трубы u_i , w_i :

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2} + \alpha v \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} - c^{-2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} - h_- \tilde{\beta} v_{0f}^2 / \alpha^2 \right) - h_+ \delta_k \frac{\partial}{\partial \tau} \left(u_0 - 0,5 \cdot h^* \alpha \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \right) = 0, \\ & (1 + h_+ KR_0 / E^*) w_0 + \alpha v \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} + \frac{h^{*2}}{12} \cdot \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta^2} + \alpha^4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial \zeta^4} \right) + c^{-2} (1 + \rho_f h_- / 2\rho_i) \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} + \\ & + \frac{h_- v_{0f} \rho_f c^{-2}}{2\rho_i} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau \partial \zeta} + 0,5 \alpha (1 + 0,5 h^*) \delta_k \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta} \left(u_0 - 0,5 h^* \alpha \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \right) = \\ & = \frac{P_a}{E^*} \left[h_- (1 + l\beta v_{0f}^2 (L - \zeta) / \rho_f a^2 + p_0) - h_+ p_{ex} / p_a \right], \\ & c^{-2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} + (1 - \nu) u_1 / 2 + \frac{\delta_k}{h^*} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + 0,5 \cdot (1 + \nu) \alpha \frac{\partial v_2}{\partial \zeta} - \alpha v \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} = (1 - \nu) f u_0 / 2 - \\ & - 2\alpha^2 f \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2} - \delta_k f \frac{\partial u_0}{\partial \tau} + (1 - \nu) \alpha f \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} - \tilde{\beta} f v_{0f}^2, \\ & c^{-2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \tau^2} - \alpha^2 \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \zeta^2} + v_2 + \frac{\delta_k}{h^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left(v_2 - \frac{h^*}{2} w_1 \right) - w_1 - \frac{1 + \nu}{2} \alpha \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} = f w_0 - \frac{3 - \nu}{2} \alpha f \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}, \\ & (1 + KR_0 / E^* h^*) w_1 + \frac{h^{*2}}{12} \alpha^2 \left(\alpha^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial \zeta^4} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} \right) + c^{-2} \left(1 + \frac{\rho_f}{\rho_i h^*} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} + \frac{\rho_f v_{0f}}{\rho_i h^* c^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau \partial \zeta} - v_2 - \\ & - \frac{\delta_k}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(v_2 - h^* w_1 / 2 - \alpha \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \right) + \alpha v \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} = h^{*2} \alpha^4 \frac{f}{3} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \zeta^4} - 2\nu f w_0 - (1 - \nu) f \alpha \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} + Z_0^1 / E^*; \end{aligned} \quad (6)$$

– для скорости v_i и давления p_j в жидкости:

$$\frac{\partial v_{s0}}{\partial \tau} + v_{0f} \frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} = -a \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} + F(\tau, \zeta), \quad a \left(\frac{\partial p_0}{\partial \tau} + v_{0f} \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} + 2 \frac{\partial w_0}{\partial \tau} = 0, \quad v_{r0} = \alpha r \frac{\partial w_0}{\partial \tau}; \quad (7)$$

– соотношения, описывающие связанное движение стенки трубы и потока жидкости:

$$\begin{aligned} Z_0^1 &= \frac{P_a v_{0f} f}{ah^*} (v_{0f} + 2v_{s0}) + \frac{\rho_f \omega^2 R_0^2}{h^*} v_{0f} \left(3f \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau \partial \zeta} - 0,25 \cdot \tilde{F}_1(\tau, \zeta) \right) - \\ & - 0,5 \cdot p_a f \left[1 + \frac{l\beta v_{0f}^2}{\rho_f a} (L - \zeta) - \frac{\alpha^2}{2a} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} + v_{0f} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau \partial \zeta} \right) + p_{ex} / p_a + KR_0 w_0 / p_a \right], \\ p_1 &= 2rv_{0f} f v_{s0} / a + \frac{\alpha^2 r}{a} \left[3fv_{0f} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau \partial \zeta} - \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} + v_{0f} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau \partial \zeta} \right) + (r^2 - 3)v_{0f} \tilde{F}_1 / 8 \right], \\ \tilde{F}_1(\tau, \zeta) &= 2f \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + v_{0f} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 v_{s0} + \frac{af}{v_{0f}} \frac{\partial^2 p_0}{\partial \zeta^2} + 7f \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau \partial \zeta} - \frac{l\beta f}{\rho_{f0}} \frac{\partial w_0}{\partial \tau} - \\ & - f \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + v_{0f} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(2a \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} + \frac{1}{v_{0f}} \left(\frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_0}{\partial \tau} \right) \right), \quad \tilde{F}_2 = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (8)$$

В (6)–(8) опущены уравнения первого приближения по малому параметру λ (1), получающиеся заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$.

Согласно алгоритму редукции искомые функции связаны с перемещениями, скоростям и давлением следующим образом [19, 20]:

$$\begin{aligned} u'(\zeta, \theta, \tau) &= u_0(\zeta, \tau) + \lambda u_1(\zeta, \tau) \sin \theta + \lambda u_2(\zeta, \tau) \cos \theta + O(\lambda^2); \\ v'(\zeta, \theta, \tau) &= v_0(\zeta, \tau) + \lambda v_1(\zeta, \tau) \sin \theta + \lambda v_2(\zeta, \tau) \cos \theta + O(\lambda^2); \\ w'(\zeta, \theta, \tau) &= w_0(\zeta, \tau) + \lambda w_1(\zeta, \tau) \sin \theta + \lambda w_2(\zeta, \tau) \cos \theta + O(\lambda^2); \\ v'_s &= v_{s0}(\zeta, r, \tau) + \lambda v_{s1}(\zeta, r, \tau) \sin \theta + \lambda v_{s2}(\zeta, r, \tau) \cos \theta + O(\lambda^2); \\ p' &= p_0(\zeta, r, \tau) + \lambda p_1(\zeta, r, \tau) \sin \theta + \lambda p_2(\zeta, r, \tau) \cos \theta + O(\lambda^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Основные обозначения: u' , v' , w' — перемещения стенки трубы, нормированные на радиус ее поперечного сечения; v_{s0} — продольная скорость течения жидкости; p' — давление в жидкости, нормированное на атмосферное давление p_a ; $\tau = \omega t$ — безразмерное время; $\zeta = s/l$ — безразмерная продольная координата; $r = R/R_0$ — безразмерная радиальная координата в поперечном сечении трубы; ρ_t — плотность материала трубы; k — коэффициент вязкого трения внешней среды; p_{ex} — постоянное давление внешней среды. Также присутствуют составные коэффициенты: $c^{-2} = \rho_t R_0^2 \omega^2 / E^*$; $E^* = E / (1 - \nu^2)$; $\tilde{\beta} = \alpha \beta l / 2 \rho_t$; $\delta_k = k \omega R_0 \rho_{gr} g h_0 / E^*$; $h^* = h / R_0$; $a = p_a / \rho_f c_f^2$; $f = \min \rho_0 / \rho_0$. Прочие обозначения стандартны и приведены в [21, 22].

Преобразование (9) является универсальным и обусловленным только геометрией изогнутой трубы. Уместно отметить, что в [26] для слабоизогнутой трубы аналогичное преобразование записано для функции тока.

Уравнения (6)–(8) одномерны по пространству и рассматриваются на отрезках $0 \leq s \leq L$ и $0 \leq t \leq T_{end}$ пространства и времени соответственно. Начальные условия для стенки трубы всюду полагаются однородными, а для жидкости они зависят от постановки задачи. Условия на краях интервала изменения переменной s для перемещений стенки трубы во всех рассмотренных далее примерах однородные:

$$u_i = w_i = v_i = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial v_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial w_i}{\partial \zeta} = 0 \quad (i = 0, 1, 2). \quad (10)$$

Для жидкости краевые условия имеют вид:

$$\mu_1 v_{s0}(0, \tau) + \mu_2 p_0(0, \tau) = F_{01}(\tau), \quad \mu_3 v_{s0}(L, \tau) + \mu_4 p_0(L, \tau) = F_{02}(\tau), \quad (11)$$

где μ_i определяется видом задачи и принимает значения 0 или 1. В качестве результата представлены значения усредненного по сечению динамического давления $\bar{p}'(s, t)$. Полные функции (9) зависят от всех переменных.

2.3. Алгоритм численного решения задачи

Уравнения движения жидкости (7) решены численным методом характеристик, уравнения движения трубы (6), (8) — полуявным методом конечных разностей. Процедуры решений изложены в [19–22]. Метод построения полуявной разностной схемы для задач газовой динамики, примененный для решения уравнений (6), (8), описан в [27].

Строилась равномерная прямоугольная сетка с шагом h_τ по времени, и с шагом h_ζ по пространству. Непрерывные функции, представляющие перемещения стенки трубы, скорости и давления жидкости, заменялись их разностными аналогами. Использовались стандартные методы для замены дифференциальных уравнений разностными соотношениями.

Оригинальность построенной разностной схемы состоит в том, что значения перемещений точек стенки трубы $w_i'^{j+1}$, $v_i'^{j+1}$ на $(j+1)$ -м слое по времени вычисляются по явной разностной схеме, а значения $u_i'^{j+1}$ — по неявной схеме. Попытки вычислить компоненты перемещения $u_i'^{j+1}$ по явной схеме не позволяют добиться вычислительной устойчивости разностной схемы ни при каком, даже сколь угодно малом, шаге по времени.

Шаг по времени и пространству выбирался путем деления отрезка пополам и сравнения результатов на предыдущем и последующем шагах.

3. Оценка адекватности математической модели для системы водопроводных труб

Рассматривается система соединенных под прямым углом труб (Рис. 2) [11]. Параметры трубопровода и потока следующие: $L_1 = 12,27$ м, $L_2 = 7,65$ м, $L_3 = 3,08$ м, $R_0 = 13$ мм, $h = 1,27$ мм, $\rho_t = 8940$ кг/м³, $E = 117$ ГПа, $\nu = 0,34$, $\rho_{f0} = 998$ кг/м³. Эти величины соответствуют потоку воды в медной трубе. Полная длина системы труб составляет $L = 47,94$ м. Прямолинейные участки труб соединяются между собой при помощи стандартных фитингов с радиусом изгиба 20,6 мм. Все фитинги жестко закреплены на внешних опорах, кроме соединения участков 1 и 2. Поток течет в указанном на рисунке направлении под действием перепада давления, создаваемого насосом, расположенным на участке 1, и отсекается клапаном за $t_k \approx 4$ мс (время срабатывания), после чего в системе труб возникают гидроупругие колебания.

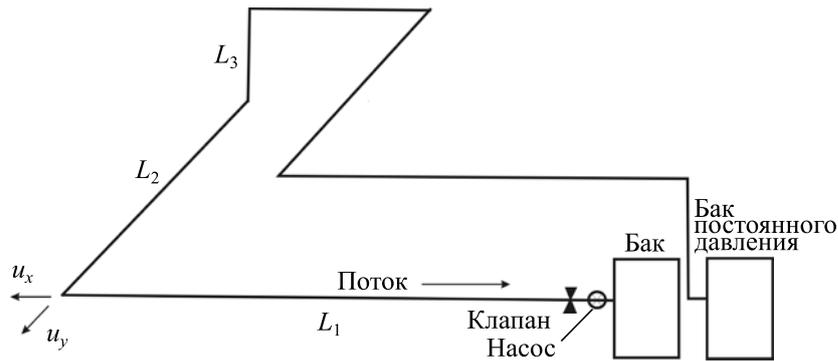


Рис. 2. Проекция на плоскость трехмерной установки для изучения гидравлического удара

Расчет колебаний давления в жидкости осуществлен по математической модели (6)–(8), и проведено сравнение полученных значений давления с экспериментальными данными и численно найденными в [11].

Выполнена оцифровка экспериментальных и расчетных графиков [11] при помощи свободно распространяемой программы Plot Digitizer [28]. Это позволило перевести графическое представление данных из статьи-первоисточника в цифровую форму, и затем интерполировать их в свободно распространяемом пакете прикладных программ Maxima [29] для определения величины равномерного шага по времени.

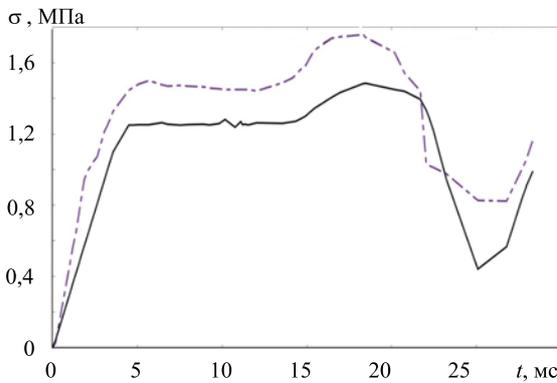


Рис. 3. Графики давления возле клапана: штрихпунктирная линия — экспериментальные значения, сплошная линия — авторские численные результаты

Результат наложения графиков давления, полученных из модели (6)–(8), и экспериментальных графиков [11] изображен на рисунке 3. По оси абсцисс отложено время, по оси ординат — давление слева от клапана, отсекающего поток жидкости от насоса.

После оцифровки графиков и модельных расчетов путем статистического анализа данных определено относительное отклонение давления как случайная величина X :

$$X = \Delta p = \frac{|p_{calc} - p_{exp}|}{|p_{calc}|}, \tag{12}$$

где p_{calc} и p_{exp} — вычисленное и экспериментальное давление. Математическое ожидание случайной величины установлено в предположении ее дискретного распределения [30]:

$$MX = \sum_{i=1}^n X_i / n, \tag{13}$$

где X_i — значения давления, n — количество элементов в выборке. Дисперсия DX и среднеквадратичное отклонение σ находились по формулам [30]:

$$DX = \frac{\sum_i X_i^2 - \left(\sum_i X_i\right)^2 / n}{n-1}, \quad \sigma = \sqrt{DX}. \quad (14)$$

В таблице 1 для одинаковых моментов времени приведены данные, рассчитанные по предложенной математической модели, и численные данные с оцифрованных графиков из [11]. Полная выборка содержит 129 совпадающих временных точек. Всего же оцифровано 330 позиций с графика экспериментальных данных.

Таблица 1. Результаты расчета давления по авторской модели (6)–(8), экспериментальные и численные данные из [11]

Время, мс	Давление, экспериментальные значения [11], МПа,	Расчетное давление по модели (6)–(8), МПа,	Расчетное давление по модели [11], МПа	Относительное отклонение данных расчета по модели (6)–(8) от опытных [11]	Относительное отклонение данных расчета [11] от опытных [11]	Относительное отклонение данных, рассчитанных по модели (6)–(8), от расчетных значений из [11]
0,17	0,02692	0,0416584	0,057692307	0,547488856	0,533386661	0,277921058
1,10	0,51538	0,3314700	0,250000000	0,356843494	1,061520000	0,325880000
1,36	0,63846	0,4133440	0,307692291	0,352592175	1,074995113	0,343368073
2,03	0,98846	0,6218900	0,488461517	0,370849604	1,023618987	0,273160686
2,63	1,07308	0,8082430	0,815384583	0,246800798	0,316041562	0,008758546
3,39	1,28462	1,0469000	0,811538452	0,185050832	0,582944094	0,290018973
3,56	1,32692	1,0990900	0,953846130	0,171698369	0,391125841	0,152271803
4,75	1,46154	1,2512200	1,726922974	0,143903006	0,153673892	0,275462763
5,68	1,50000	1,2520100	1,611538452	0,165326667	0,069212405	0,223096415
6,44	1,47692	1,2644400	1,507692261	0,143866966	0,020410174	0,161340790
7,97	1,46923	1,2532600	1,469230713	0,146995365	0,000000485	0,146995779
10,76	1,45000	1,2376600	1,442307617	0,146441379	0,005333386	0,141889022
11,36	1,45000	1,2546000	1,442307617	0,134758621	0,005333386	0,130143955
11,53	1,45000	1,2506800	1,442307617	0,137462069	0,005333386	0,132861821
14,15	1,51538	1,2689300	1,465384521	0,162632475	0,034117652	0,134063461
14,32	1,53077	1,2707900	1,473076904	0,169836096	0,039165027	0,137322704
14,58	1,55769	1,2829600	1,476923096	0,176370138	0,054685924	0,131329178
14,92	1,58462	1,3011500	1,515384521	0,178888314	0,045688390	0,141373043
15,42	1,66923	1,3433600	1,538461548	0,195221749	0,084999493	0,126816005
18,31	1,75769	1,4832300	1,634615356	0,156148126	0,075292725	0,092612219
20,76	1,54231	1,4402500	1,457692261	0,066173467	0,058049110	0,011965668
26,78	0,82308	0,5671770	0,811538452	0,310909025	0,014221813	0,301108902
27,71	1,00769	0,8443350	0,984615356	0,162108387	0,023435186	0,142472241
29,07	1,41923	1,0939300	1,330769165	0,229208796	0,066473463	0,177971636

Для эксперимента (Рис. 3) получены значения:

$$MX = 0,152, \quad DX = 0,006, \quad \sigma = 0,077. \quad (15)$$

Максимальное относительное отклонение друг от друга численных по модели (6)–(8) и экспериментальных (см. [11]) данных на отрезке времени от 1 мс до 41 мс не превышает 0,5. Максимальное отклонение расчетных данных в первоисточнике [11] от опытных из него же достигает 1,07 в начале расчета, и затем с течением времени уменьшается до средних значений $\sim 0,05$. Сравнение результатов численного эксперимента из [11] и настоящей работы дает значения: $MX = 0,153$, $DX = 0,011$, $\sigma = 0,105$.

Из рисунка 3 видно, что расчетные данные по авторской модели (6)–(8) регулярно занижены по сравнению с экспериментальными значениями. В таблице 1 численные отклонения между данными по модели и из первоисточника равномерны. Из этого следует, что математическая модель (6)–(8)

нуждается в дополнительной идентификации параметров [31] для количественного описания изучаемой механической системы. Проблема идентификации параметров относится к другой научной дисциплине и здесь не рассматривается.

В заключение следует заметить, что модель (6)–(8) качественно правильно воспроизводит распространение колебаний в изучаемой механической системе. Математическая модель [11], разработанная специально для представления данного эксперимента, количественно изображает систему лучше, чем модель, предложенная в настоящей работе, но регулярный характер распределения ошибок вычислений позволяет надеяться на успешное применение процедуры идентификации параметров последней.

4. Оценка адекватности авторской математической модели для плавно изогнутой трубы

В [17] рассмотрен гидравлический удар в полимерном трубопроводе (Рис. 4). Параметры течения и материала трубы были следующими: $E = 3,2$ ГПа; $\nu = 0,4$; $\rho_t = 1470$ кг/м³ — плотность материала трубы; $L = 624$ мм; $h = 1,5$ мм; $R_0 = 20$ мм; заполняющая жидкость — вода с начальной скоростью $v_{0f} = 0$ м/с; $\lambda \approx 0,143$; $\min \rho_0/R_0 = 7$.

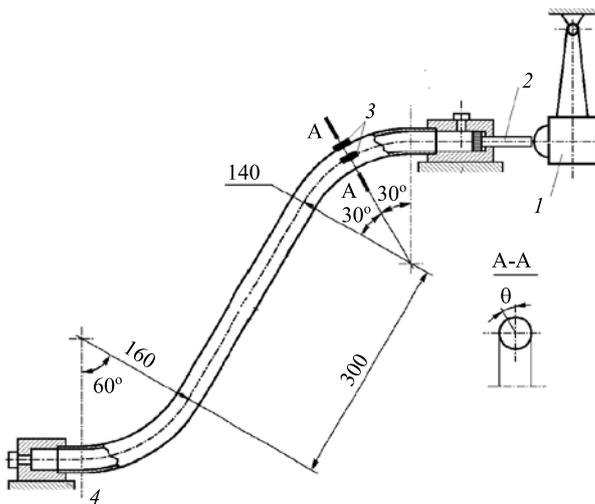


Рис. 4. Схема натурального эксперимента (опубликовано в [17])

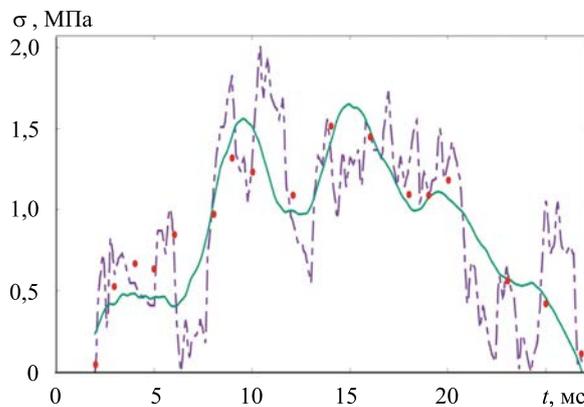


Рис. 5. Графики давления в оконечном сечении трубы: штрихпунктирная линия — экспериментальные значения из [17], сплошная линия — численные результаты по модели (6)–(8), точки — значения, найденные численно в [17]

Для численного анализа были взяты значения шага по пространству $\Delta s = 2$ см, $\Delta t = 0,005$ мс. Шаг по времени выбирался из условия устойчивости разностной схемы [27]. Для расчетов использовалась полуневьяная разностная схема, которая создавалась для решения задач газовой динамики [27]. Подробности ее построения описаны ранее в [19–22].

Результаты расчета давления на выходном конце трубы по модели (6)–(8) и соответствующие экспериментальные данные показаны на рисунке 5. Наблюдается их качественное согласование.

Для более детального сравнения в таблице 2 представлены относительные отклонения результатов расчета давления по авторской модели от опытных и расчетных данных из первоисточника [17], а также моделей первоисточника друг от друга.

Гидроупругие колебания в системе возбуждались ударом копра 1 по поршню 2, и значения давления считывались в начале 3 и в конце 4 трубы. В [17] построена математическая модель для решения этой задачи и проведено сравнение численных и экспериментальных результатов. Численные эксперименты по авторской модели (6)–(8) осуществлялись на примере этой же трубы. В качестве краевого условия при $s = 0$ использовались результаты измерения давления из работы-первоисточника [17]. При $s = L$ скорость жидкости равнялась нулю. Значения коэффициентов в условии (11) составляли: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 1$, $\mu_4 = 0$.

Давление в начальной точке трубы $s = 0$ дано в [17] в виде графика, поэтому для получения численных значений применялась вышеупомянутая программа Plot Digitizer [28]. Полученные значения давления, по аналогии с предыдущим разделом, интерполировались в пакете Maxima для получения равномерного шага по времени. Этим способом определена функция $F_{01}(\tau)$ для условий (11). На закрытом конце трубки $F_{02}(\tau) = 0$. Краевые условия (10) оставались неизменными.

Таблица 2. Сравнение результатов расчета давления по модели (6)–(8) с экспериментальными и численными результатами [17]

Время, мс	Экспериментальные значения давления [17], МПа	Расчетное давление по модели (6)–(8), МПа	Расчетное давление по модели [17], МПа	Относительное отклонение расчета по модели (6)–(8) от опыта	Относительное отклонение расчета [17] от опыта	Относительное отклонение расчета по модели (6)–(8) от расчета [17]
1,98	0,000	0,238	0,050	1,00	1,00	3,869
2,99	0,600	0,421	0,530	0,43	0,13	0,206
4,03	0,550	0,483	0,680	0,14	0,18	0,289
5,02	0,480	0,461	0,640	0,02	0,27	0,280
6,03	0,820	0,404	0,850	0,78	0,15	0,524
8,02	1,090	1,044	0,980	0,04	0,11	0,065
8,99	1,880	1,459	1,320	0,22	0,35	0,105
10,00	1,300	1,513	1,230	0,14	0,06	0,230
12,05	0,940	0,994	1,090	0,05	0,14	0,088
14,02	1,350	1,418	1,520	0,05	0,11	0,068
16,00	1,500	1,498	1,450	0,00	0,03	0,032
18,03	1,290	1,020	1,090	0,26	0,18	0,064
19,02	1,100	1,084	1,090	0,02	0,01	0,015
20,02	1,310	1,069	1,180	0,23	0,11	0,094
23,02	0,620	0,585	0,560	0,08	0,11	0,028
25,04	1,050	0,448	0,420	1,34	1,50	0,068
28,04	0,010	-0,080	0,110	1,14	0,91	1,640

Из таблицы 2 видно, что обе математические модели примерно одинаково описывают колебания в изогнутой трубе. Существенные отклонения наблюдаются на краях расчетного временного отрезка, что можно объяснить влиянием неучтенных колебаний в точках закрепления трубы [11] и различными подходами к построению численного метода. Для выяснения причин расхождения был выполнен расчет статистических величин (12)–(14) для различных диапазонов времени. Получено следующее:

– при учете всех точек расчетного отрезка времени имеют место оценки $MX = 0,350$, $DX = 0,190$, $\sigma = 0,436$, и максимальные относительные отклонения наблюдаются в первой и последней точках;

– при исключенных концах отрезка времени те же оценки составляют $MX = 0,254$, $DX = 0,132$, $\sigma = 0,364$.

Без учета значений на концах отрезка анализ относительных отклонений для расчета [17] от опыта дает результаты: $MX = 0,229$, $DX = 0,131$, $\sigma = 0,362$, а для численного эксперимента [17] от величин, вычисленных по модели (6)–(8) — $MX = 0,143$, $DX = 0,019$, $\sigma = 0,138$.

Следует обратить внимание на то, что в таблице 2 использовано всего семнадцать точек, и по столь малому количеству данных нельзя делать окончательные выводы о пригодности или непригодности модели, предложенной авторами. Поэтому был выполнен анализ для 684 точек по времени. Экспериментальные данные для них получались путем оцифровки графиков давления в оконечном сечении трубы из [17], а данные численного эксперимента находились по модели (6)–(8). Этим наборам данных соответствуют графики рисунка 5.

Удалось однозначно оцифровать информацию для отрезка $1,98 \div 26,75$ мс, для которого

$$MX = 0,471, \quad DX = 0,306, \quad \sigma = 0,553.$$

Уменьшение отрезка до $2,02 \div 24,91$ мс дало лучшие значения величин:

$$MX = 0,358, \quad DX = 0,082, \quad \sigma = 0,286.$$

Дальнейшее сокращение отрезка времени расчета до $2,02 \div 21,79$ мс привело к дополнительному улучшению оценок:

$$MX = 0,316, \quad DX = 0,068, \quad \sigma = 0,261.$$

Но лучшие оценки получились для отрезка времени $7,69 \div 20,86$ мс:

$$MX = 0,214, \quad DX = 0,022, \quad \sigma = 0,148. \quad (16)$$

Дальнейшее изменение расчетного времени нецелесообразно, поскольку от начала и конца диапазона, в котором распознаны экспериментальные данные, убрано примерно 5,5 мс при его полной длине 24,77 мс. Можно сделать вывод, что оценка качества математической модели (16) является окончательной. Она хуже, чем оценка (15) для системы труб из предыдущего раздела. Такое различие может быть вызвано комплексом причин, связанных с особенностями как самих механических систем, так и примененных вычислительных подходов.

5. Расчет акустических колебаний изогнутой трубы

В [18] разработана математическая модель акустических колебаний криволинейного трубопровода и выполнен расчет колебаний колена в виде фрагмента тора без учета влияния прямолинейных участков, которые оно соединяет. В настоящей статье использована отличающаяся от [18] постановка задачи и проделаны дополнительные вычисления, чтобы установить информацию о взаимном влиянии трубопровода и заполняющей его жидкости.

Труба представляет собой фрагмент тора с радиусом осевой линии $\rho_0 = 0,4$ м, радиусом сечения $R_0 = 0,0015$ м и длиной оси $L = 0,3$ м. Остальные параметры механической системы были следующими: $h = 0,0006$ м; $\rho_i = 7800$ кг/м³; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho_{f0} = 870$ кг/м³; $c_f = 1300$ м/с; $P_0 = 2 \cdot 10^5$ Па; $\omega_0 = 150$ Гц. Здесь ω_0 и P_0 — частота и амплитуда гармонических колебаний давления. Этим параметрам отвечают $h/R_0 = 0,4$; $\lambda = 0,00375$; $L/R_0 = 200$. К сожалению, в [18] не указаны в явном виде краевые условия для давления, поэтому было положено:

$$p(0, t) = P_0 \cos \omega_0 t; \quad p(L, t) = 0.$$

Расчеты перемещения стенки u в [18] проведены для волны давления с указанными параметрами P_0 , ω_0 . В силу того, что давление в жидкости было известной функцией, уравнение для его нахождения не требовалось. Последнее является существенным различием между моделями (6)–(8) и [18], поэтому сравнение можно было осуществить только качественное и только относительно самых принципиальных характеристик.

Спектральный анализ, реализованный в [18] методом рядов Фурье, показал наличие двух основных характерных частот: 150 Гц на частоте вынужденных колебаний и 425 Гц на частоте собственных колебаний колена. Расчет продольных перемещений колена u_0 при координате $s = 0,1$ м по модели авторов (6)–(8) дал картину колебаний, которую содержит рисунок 6. Очевидно, что принципиальные результаты данной статьи и работы [18] в рамках рассматриваемой задачи совпадают: начиная с 4-й миллисекунды наблюдается разделение колебаний на две ветви — высокочастотную затухающую и низкочастотную незатухающую.

К сожалению, непосредственное преобразование Фурье в пакете Mathematica привело к очень сложному спектру. Результат преобразования Фурье, полученный после фильтрации сигнала и отсечения шума, изображен на рисунке 7. На спектре хорошо видны пики, отвечающие частотам 150 и 425 Гц, что говорит об адекватности математической модели (6)–(8) в достижении основного результата работы [18].

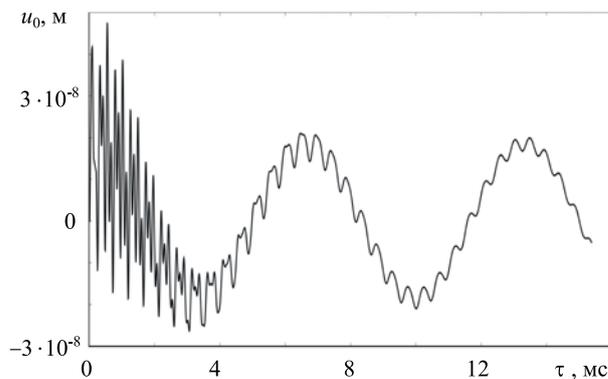


Рис. 6. Продольное перемещение трубы на расстоянии 0,1 м от ее начала

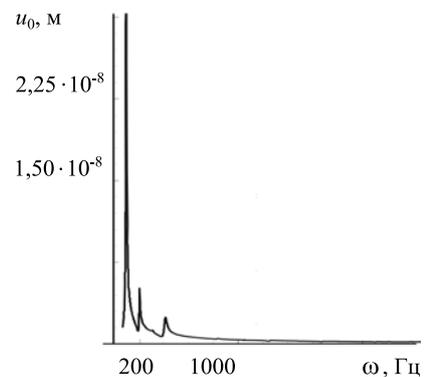


Рис. 7. Спектр продольных колебаний стенки трубы

6. Заключение

На примерах двух различных трубопроводных систем [11, 17] осуществлена численная верификация предложенной в [19, 20] математической модели динамики изогнутого трубопровода. Выполнен расчет криволинейного трубопровода [18], и проведено сравнение результатов. Установлено, что авторская модель качественно правильно воспроизводит рассмотренные системы и дает результаты близкие к тому, что получаются по моделям из статей-первоисточников, а также по моделям других авторов [13, 16].

Показано, что для повышения точности математического образа технической трубопроводной системы необходима процедура идентификации параметров модели. Эта задача является самостоятельной научной проблемой [31]. Для изучаемого круга задач точность численных результатов, как показано в [21], сильно зависит от точности исходных данных.

Необходимо заметить, что по отклонениям численных данных от опыта можно увидеть связь рассматриваемых задач исследования колебательных процессов в трубопроводах с проблемой краевого эффекта. Вероятно, расхождение результатов вычислений на краях расчетного отрезка времени появляется за счет игнорирования колебаний торцов трубы. Поскольку трубопровод рассматривается как техническая оболочка, эта задача связана с общей проблемой краевого эффекта в оболочках [32]. В [11] также упомянута проблема большого отклонения в начале расчетного времени численных результатов на клапане от данных эксперимента, что объяснено быстрыми неучтенными колебаниями клапана. Известно [32], что именно принятие во внимание существенного вклада изгибающих моментов на краю оболочки делает математическое описание таких явлений более точным. Таким образом, при постановке задач для трубопровода, рассматриваемого как оболочка, необходимо описывать краевой эффект.

Итак, предложен алгоритм верификации математических моделей трубопроводов на основе представленных графически литературных данных. При реализации этого алгоритма используется только свободно распространяемое программное обеспечение. Для эталонных натурных и численных экспериментов найдены количественные характеристики их приближения с помощью предложенной новой математической модели.

В заключение, учитывая, что вместо четырех математических моделей [11, 16, 17, 18] приемлемые результаты получены в рамках одной математической модели (6)–(8), можно сделать вывод, что построенная модель охватывает большее разнообразие трубопроводных колебательных систем, чем ранее предложенные. Ее главными отличиями являются подход с позиций теории оболочек и алгоритм редукции постановки задачи к одномерному виду. Для применимости модели (6)–(8) к трубопроводной системе элементы последней должны удовлетворять условиям технической теории оболочек (2) и малости параметра (1).

Литература

1. Critical urban infrastructure handbook / Editor-in-Chief M. Hamada. – London, New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2014. – 581 p.
2. *Towhata I.* Geotechnical earthquake engineering. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 684 p.
3. *Феодосьев В.И.* О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инженерный сборник. – 1951. – Т. 10. – С. 169-170.
4. *Kwon H.J.* Computer simulations of transient flow in a real city water distribution system // KSCE J. Civ. Eng. – 2007. – Vol. 11, no. 1. – P. 43-49. DOI
5. *Жуковский Н.Е.* О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 104 с.
6. *Svetlitsky V.A.* Dynamics of rods. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. – 448 p.
7. *Алдошин Г.Т.* Гидравлический удар в деформированном трубопроводе // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. механики, математики и астрономии. – 1961. – В. Ч. – С. 93-102.
8. *Алдошин Г.Т.* К истории гидроупругости от Эйлера до наших дней // МТТ. – 2007. – № 27. – С. 184-191.
9. *Skalak R.* An extension of the theory of water hammer // Trans. ASME. – 1956. – Vol. 78, no. 1. – P. 105-116.
10. *Otwell R.S.* The effect of elbow translations on pressure transient analysis of piping systems // Fluid Transients and Fluid-Structure Interaction, ASME PVP. – 1982. – Vol. 64. – P. 127-136.
11. *Wiggert D.C., Otwell R.S., Hatfield F.J.* The effect of elbow restraint of pressure transients // J. Fluids Eng. – 1985. – Vol. 107, no. 3. – P. 402-406. DOI
12. *Lavooij C.S.W., Tusseling A.S.* Fluid-structure interaction in liquid-filled piping systems // J. Fluids Struct. – 1991. – Vol. 5, no. 5. – P. 573-595. DOI
13. *Tijsseling A.S., Vardy A.E., Fan D.* Fluid-structure interaction and cavitation in a single-elbow pipe system // J. Fluids Struct. – 1996. – Vol. 10, no. 4. – P. 395-420. DOI
14. *Paidoussis M.P.* Fluid-structure interactions. Slender structures and axial flow. – San Diego, London: Academic Press, 1998. – 574 p.
15. *Bai Y.* Pipelines and risers. – London, New York, Tokyo: Elsevier Science Ltd., 2003. – 500 p.
16. *Егунов Ю.В., Кочетков А.В.* Численное исследование нелинейной динамики гидроупругосвязанных плоских криволинейных стержней // ПМТФ. – 1999. – Т. 40, № 1. – С. 212-219. (English version DOI)
17. *Куликов Ю.А., Лоскутов Ю.В., Максимов М.А., Зданович Ю.К.* Расчетно-экспериментальное исследование упругого деформирования трубопровода из полимерной пленки при действии ударной нагрузки // ПМТФ. – 2001. – Т. 42, № 2(246). – P. 122-128. (English version DOI)

18. Миронова Т.Б., Прокофьев А.Б., Шахматов Е.В. Разработка конечноэлементной модели виброакустических процессов в трубопроводе с пульсирующим потоком рабочей жидкости // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2008. – № 3. – С. 157-162.
19. Руквишиников В.А., Ткаченко О.П. Численное и асимптотическое решение уравнений распространения гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе // ПИМТФ. – 2000. – Т. 41, № 6. – С. 161-169. (English version DOI).
20. Ткаченко О.П. Кинематика и динамика подземного трубопровода при конечных перемещениях // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 97-107.
21. Руквишиников В.А., Ткаченко О.П. Численный анализ математической модели гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе // Матем. моделирование. – 2011. – Т. 23, № 1. – С. 51-64. (English version DOI).
22. Ткаченко О.П. Численный анализ динамики криволинейного трубопровода // Вычисл. мех. сплош. среды. – 2012. – Т. 5, № 3. – С. 345-353. (English version DOI).
23. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике // Власов В.З. Избранные труды. – Т. 1. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – С. 15-439.
24. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
25. Nikuradse J. Laws of flow in rough pipes. – Washington: NASA, Technical Memorandum 1292, 1950. – 63 p.
26. Shin-itiro Goto Amplitude equations for a linear wave equation in a weakly curved pipe // J. Phys. A-Math. Theor. – 2009. – Vol. 42, no. 44. – 445205. DOI
27. Самарский А.А., Понов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992. – 424 с.
28. Plot Digitizer <http://plotdigitizer.sourceforge.net/> (дата обращения: 16.01.2017).
29. De Souza P.N., Fateman R.J., Moses J., Yapp C. The Maxima Book, 2004. <http://maxima.sourceforge.net/docs/maximabook/maximabook-19-Sept-2004.pdf> (дата обращения: 16.01.2017).
30. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
31. Ljung L. System identification: Theory for the User. – New Jersey: Prentice Hall PTR, 1999. – 609 p.
32. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. – 380 с.

References

1. *Critical urban infrastructure handbook*, editor-in-chief M. Hamada. London, New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2014. 581 p.
2. Towhata I. *Geotechnical earthquake engineering*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 684 p.
3. Feodosyev V.I. O kolebaniyakh i ustoichivosti truby pri protekaniy cherez nee zhidkosti [On oscillations and stability of the pipe when it contains the flow of fluid]. *Inzhenerniy sbornik*, 1951, vol. 10, pp. 169-170.
4. Kwon H.J. Computer simulations of transient flow in a real city water distribution system. *KSCE J. Civ. Eng.*, 2007, vol. 11, no 1, pp. 43-49. DOI
5. Zhukovskii N.E. *O gidravlicheskom udare v vodoprovodnykh trubakh* [About hydraulic shock in water pipes]. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1949. 104 p.
6. Svetlitsky V.A. *Dynamics of rods*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. 448 p.
7. Aldoshin G.T. Gidravlicheskiy udar v deformirovannom truboprovode [Water hammer in a deformed pipeline]. *Vestnik of the Leningrad University. Mathematics*, 1961, pp. 93-102.
8. Aldoshin G.T. K istorii gidrouprugosti ot Eulera do nashikh dnei [To the history of hydroelasticity from Euler to our days]. *Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*, 2007, no. 27, pp. 184-191.
9. Skalak R. An extension of the theory of water hammer. *Trans. ASME*, 1956, vol. 78, no. 1, pp. 105-116.
10. Otwell R.S. The effect of elbow translations on pressure transient analysis of piping systems. *Fluid Transients and Fluid-Structure Interaction*, ASME PVP, 1982, vol. 64, pp. 127-136.
11. Wiggert D.C., Otwell R.S., Hatfield F.J. The effect of Elbow restraint of pressure transients. *J. Fluids Eng.*, 1985, vol. 107, no. 3, pp. 402-406. DOI
12. Lavooij C.S.W., Tusseling A.S. Fluid-structure interaction in liquid-filled piping systems. *J. Fluids Struct.*, 1991, vol. 5, no. 5, pp. 573-595. DOI
13. Tijsseling A.S., Vardy A.E., Fan D. Fluid-structure interaction and cavitation in a single-elbow pipe system. *J. Fluids Struct.*, 1996, vol. 10, no. 4, pp. 395-420. DOI
14. Paidoussis M.P. *Fluid-structure interactions. Slender structures and axial flow*. San Diego, London: Academic Press, 1998. 574 p.
15. Bai Y. *Pipelines and risers*. London, New York, Tokyo: Elsevier Science Ltd., 2003. 500 p.
16. Egunov Yu.V., Kochetkov A.V. Numerical study of nonlinear dynamics of hydroelastically connected, plane curvilinear rods. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1999, vol. 40, no.1, pp. 183-189. DOI
17. Kulikov Yu.A., Loskutov Yu.V., Maksimov M.A., Zdanovich Yu.K. Numerical-experimental investigation of the elastic deformation of a polymeric pipeline under impact. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2001, vol. 42, no. 2, pp. 294-299. DOI
18. Mironova T.B., Prokofiev A.B., Shachmatov E.V. Development of the finite element model of vibroacoustical characteristics of pipe system. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*, 2008, no. 3, pp. 157-162.
19. Rukavishnikov V.A., Tkachenko O.P. Numerical and asymptotic solution of the equations of propagation of hydroelastic vibrations in a curved pipe. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2000, vol. 41, no. 6, pp. 1102-1110. DOI
20. Tkachenko O.P. Kinematics and dynamics of the underground pipeline by finite displacements. *Vychislitelnye tekhnologii – Computational Technologies*, 2003, vol. 8, no. 4, pp. 97-107.

21. Rukavishnikov V.A., Tkachenko O.P. Numerical analysis of the mathematical model of hydroelastic oscillations in a curved pipeline. *Math. Models Comput. Simul.*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 508-516. DOI
22. Tkachenko O.P. Numerical analysis of the dynamics of a curvilinear pipeline. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2012, vol. 5, no. 3, pp. 345-353. DOI
23. Vlasov V.Z. *Izbrannye trudy* [Selected works]. Moscow: Academy of Sciences USSR, 1962, vol. 1, pp.15-439.
24. Loitsyanskii L.G. *Mechanics of liquids and gases*. Pergamon Press, 1966. 804 p.
25. Nikuradse J. *Laws of flow in rough pipes*. Washington, NACA, Technical Memorandum 1292, 1950. 61 p.
26. Shin-itiro Goto. Amplitude equations for a linear wave equation in a weakly curved pipe. *J. Phys. A-Math. Theor.*, 2009, vol. 42, no. 44, p. 445205. DOI
27. Samarskii A.A., Popov Y.P. *Raznostnye metody resheniya zadach gazovoi dinamiki* [Difference methods for solving problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka, 1992. 424 p.
28. Plot Digitizer <http://plotdigitizer.sourceforge.net/> (accessed 16 January 2017).
29. De Souza P.N., Fateman R.J., Moses J., Yapp C. *The Maxima Book*, 2004. <http://maxima.sourceforge.net/docs/maximabook/maximabook-19-Sept-2004.pdf> (accessed 16 January 2017).
30. Chistyakov V.P. *Kurs teorii veroyatnostei* [Course of probability theory]. Moscow: Nauka, 1982. 256 p.
31. Ljung L. *System identification: Theory for the User*. New Jersey: Prentice Hall PTR, 1999. 609 p.
32. Novozhilov V.V. *The theory of thin shell*, ed. by J.R.M. Radok. Netherlands: Springer, 2014. 433 p.

Поступила в редакцию 22.08.2016; опубликована в электронном виде 30.03.2017