

DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.1.5

УДК 532.5

## ВОЗБУЖДЕНИЕ КОНВЕКЦИИ В СИСТЕМЕ СЛОЕВ БИНАРНОГО РАСТВОРА И НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ В ПОЛЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВИБРАЦИЙ

Е.А. Колчанова<sup>1,2,3</sup>, Н.В. Колчанов<sup>3</sup><sup>1</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация<sup>2</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация<sup>3</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация

Исследуется возникновение конвекции в системе горизонтальных слоев бинарного раствора и неоднородной пористой среды, насыщенного раствором. Система подвергается поперечным вибрациям высокой частоты в поле силы тяжести. Считается, что пористость среды линейно зависит от вертикальной координаты. Проницаемость оценивается по формуле Кармана–Козени при различных значениях безразмерного градиента пористости  $m_z$ . Для описания конвекции жидкости при действии высокочастотных вибраций в поле силы тяжести применяется метод осреднения. Линейная задача устойчивости механического равновесия жидкости решается численно с помощью метода стрельбы. Определены значения критических параметров, соответствующих порогу возбуждения конвекции при подогреве системы снизу или сверху. При подогреве снизу отмечается резкая смена характера неустойчивости с изменением градиента пористости или интенсивности вибраций. Показано, что когда пористость растет с глубиной при  $m_z = -0,2$ , неустойчивость обуславливается развитием длинноволновых возмущений, охватывающих жидкий и пористый слои. Когда же пористость убывает с глубиной при  $m_z = 0,2$ , наиболее опасными становятся коротковолновые возмущения, локализованные в жидком слое. Для промежуточных значений градиента пористости  $-0,2 < m_z < 0,2$  значения минимальных чисел Рейля–Дарси, определяющие порог устойчивости равновесия относительно коротковолновых и длинноволновых возмущений, приближаются друг к другу. Нейтральные кривые бимодальны. При подогреве снизу вертикальные вибрации эффективно подавляют конвекцию в жидком слое, поэтому с ростом их интенсивности происходит переход от коротковолновых – наиболее опасных – возмущений к длинноволновым. Заметное повышение порога устойчивости наблюдается в случае, когда пористость убывает с глубиной. При подогреве сверху вибрации дестабилизируют равновесие в системе и приводят к уменьшению длины волны критических возмущений. Длина волны убывает монотонно. Ее максимальное изменение зафиксировано для слоев, пористость которых растет с глубиной.

*Ключевые слова:* конвекция, двухслойная система, бинарная жидкость, неоднородная пористая среда, высокочастотные вибрации, поле силы тяжести

## CONVECTION EXCITATION IN A SYSTEM OF A BINARY SOLUTION LAYER AND AN INHOMOGENEOUS POROUS MEDIUM LAYER IN THE FIELD OF HIGH-FREQUENCY VIBRATIONS

E.A. Kolchanova<sup>1,2,3</sup> and N.V. Kolchanov<sup>3</sup><sup>1</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation<sup>2</sup>Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation<sup>3</sup>Perm State University, Perm, Russian Federation

We investigate convection excitation in a two-layer system of a horizontal binary solution layer and an inhomogeneous porous medium layer saturated with the solution in the gravity field and in the field of transverse high-frequency vibrations. It is believed that porosity of medium linearly depends on the vertical coordinate. Permeability is estimated by the Carman–Kozeny relation for various values of a non-dimensional porosity gradient  $m_z$ . The averaging method is applied for a description of convection in the gravity field and the field of high-frequency vibrations. The linear stability problem for a mechanical equilibrium of fluid is solved numerically by the shooting method. The critical parameters corresponding to a threshold of convection excitation in the system heated either from below or above are found. When the system is heated from below, there is an abrupt change in the character of instability with the variation of porosity gradient or vibration intensity. It is shown that when porosity increases with depth at  $m_z = -0.2$ , the instability is due to the development of long-wave perturbations covering both fluid and porous layers. When porosity decreases with depth at  $m_z = 0.2$ , short-wave perturbations localized in the fluid layer are the most dangerous. For intermediate porosity gradients the critical Rayleigh–Darcy numbers determining the stability threshold of equilibrium with respect to long-wave and short-wave perturbations are of close values. Neutral curves are bimodal. When the system is heated from below, vertical vibrations effectively suppress convection in the fluid layer, so a transition from the most dangerous short-wave to long-wave perturbations occurs as vibration intensity grows. The most significant increase in the stability threshold is observed when porosity decreases with depth. When the system is heated from above, vibrations destabilize equilibrium in layers and lead to wavelength shortening for critical perturbations. Wavelength reduces monotonically. Its greatest change is fixed for the layers, whose porosity increases with depth.

*Key words:* convection, two-layer system, binary fluid, inhomogeneous porous medium, high-frequency vibrations

### 1. Введение

В поле силы тяжести при подогреве снизу конвективный тепло- и массоперенос в слоях однокомпонентной жидкости и пористой среды, насыщенной жидкостью, обусловлен неоднородностью плотности жидкости. Конвекция жидкости усиливает теплопередачу в слоях по сравнению с равновесной

ситуацией, в которой перенос тепла происходит посредством теплопроводности [1, 2]. Неоднородность плотности двухкомпонентной (бинарной) жидкости может быть связана как с градиентом температуры, так и с градиентом концентрации одного из компонентов жидкости. В отличие от горизонтального слоя однокомпонентной жидкости, в котором при подогреве сверху равновесие остается устойчивым по отношению к малым возмущениям, конвекция в слое бинарной жидкости может возникать пороговым образом [1, 2].

Высокочастотные поступательные вибрации действуют на неоднородную по плотности жидкость и приводят к возникновению в ней осредненного течения. В слоях однокомпонентной жидкости [3, 4] или пористой среды, насыщенной жидкостью [5–7] вибрации, в зависимости от ориентации их оси относительно градиента температуры и ускорения силы тяжести, могут повышать или понижать порог устойчивости квазиравновесия. В состоянии квазиравновесия средняя по периоду вибраций компонента скорости жидкости равняется нулю. Пульсационная компонента скорости в общем случае может быть ненулевой. Когда ось вибраций совпадает с направлением ускорения силы тяжести и градиента температуры, и наблюдается стабилизация механического равновесия жидкости.

Особый класс задач представляют задачи возникновения термоконцентрационной конвекции (или конвекции с двойной диффузией [8]) в слоях бинарной жидкости и насыщенной жидкостью пористой среды без учета «перекрестных эффектов» термодиффузии и диффузионной теплопроводности [1, 9–12]. Обобщение задачи Хордона–Роджерса–Лэпвуда на случай термоконцентрационной конвекции выполнено в [1, 9]. Исследовалась устойчивость механического равновесия бинарной жидкости в пористом слое при заданных на его твердых границах постоянных, но разных значениях температуры и концентрации. Получены аналитические выражения для границы устойчивости равновесия относительно монотонных и колебательных возмущений, соответственно, в виде:  $R_m + R_{mc} = 4\pi^2$  и  $(\omega^2/\pi^2)mLe_m = 4\pi^2 - (R_m + R_{mc})$ , где  $\omega$  — частота возмущений с волновым числом  $k = \pi$ ,  $m$  — пористость,  $Le_m$  — число Льюиса,  $R_m$  — число Релея для пористой среды (или число Релея–Дарси),  $R_{mc}$  — концентрационное число Релея–Дарси. В [13, 14] изучалось влияние вертикальных высокочастотных вибраций на возбуждение конвекции в пористом слое, заполненном бинарной жидкостью. Граничные условия и равновесные распределения температуры и концентрации задавались похожим образом. Установлено, что, в зависимости от тепловых и диффузионных свойств жидкости и соотношения между градиентами температуры и концентрации, вибрации могут стабилизировать или дестабилизировать механическое равновесие в слое.

Интерес к таким задачам связан с их применением в исследовании кристаллизации бинарных растворов или расплавов. Считается, что дефекты кристаллов, выращиваемых в земных условиях, могут быть обусловлены термоконцентрационной конвекцией в слое раствора (расплава) и переходной зоне между раствором (расплавом) и кристаллом [15–19]. Свойства переходной зоны близки к свойствам пористой среды. При охлаждении раствора снизу концентрация его тяжелого компонента (например, концентрация хлорида аммония в его водном растворе) убывает в направлении от раствора к кристаллу. Внутри образующейся пористой зоны возникает линейный градиент концентрации. В слое с раствором концентрация тяжелого компонента возрастает на промежутке от его границы с пористой зоной до невозмущенной области раствора с постоянной концентрацией. В [18, 19] предполагается, что пальцевидные ответвления вблизи границы раздела раствор — пористая зона и вертикальные каналы внутри этой зоны могут быть связаны с двумя разными модами неустойчивости механического равновесия жидкости. Одна из них определяется развитием возмущений в слое раствора — это коротковолновая мода неустойчивости. Другая — длинноволновая мода неустойчивости, обуславливается нарастанием возмущений в слое раствора и пористой зоне. Возмущения, проникающие в пористую зону, приводят к образованию в ней вертикальных каналов. Две аналогичные моды неустойчивости были получены при исследовании возбуждения термоконцентрационной конвекции в системе слоев бинарной жидкости и пористой среды, насыщенной той же жидкостью, в поле тяжести [10–12]. На внешних твердых границах системы задавались постоянные разные значения температуры и концентрации. Задача имела более простую постановку, в которой не учитывалось движение границы раздела слоев, зависимость проницаемости среды от пористости и другое. Изучение влияния различных факторов на две рассмотренные моды неустойчивости представляет интерес как с фундаментальной, так и с практической точки зрения.

Особенностью задачи возникновения конвекции в системах слоев одно- или двухкомпонентной жидкости и насыщенной пористой среды в поле тяжести являются бимодальные нейтральные кривые устойчивости равновесия жидкости [10–12, 20–24]. При некотором сочетании параметров системы (пористости и проницаемости среды, отношения толщин слоев, градиентов температуры и концентрации и другого) нейтральные кривые могут иметь два минимума, для которых критические числа Релея–Дарси принимают близкие значения. Один из минимумов лежит в области меньших волновых чисел и отвечает длинноволновым возмущениям, охватывающим пористый и жидкий слои. Другой минимум наблюдается при больших волновых числах и соответствует коротковолновым возмущениям,

локализованным в жидком слое. Термином «длинноволновые» в данном случае обозначаются возмущения с большой, но конечной длиной волны. Термин применяется для того, чтобы различать эти два вида критических возмущений [20]. С изменением какого-либо параметра системы, например, отношения толщин жидкого и пористого слоев  $d$ , один из минимумов нейтральной кривой исчезает. В [10] показано, что для тонких жидких слоев ( $d \leq 0,13$ ) наиболее опасна длинноволновая мода неустойчивости, связанная с конвективным движением жидкости преимущественно в пористом слое. При  $d \geq 0,14$  доминирует коротковолновая мода неустойчивости: возмущения локализуются в слое жидкости и слабо проникают в пористую среду. При промежуточных значениях, в интервале  $0,13 < d < 0,14$ , нейтральные кривые бимодальны. В [21] экспериментально исследовалось возникновение конвекции в подогреваемом снизу горизонтальном слое с водным раствором глицерина. Слой толщиной 4 см был частично заполнен стеклянными шарами диаметром 3 мм. Находилась длина волны конвективных структур, образующихся после потери устойчивости механического равновесия в слое. Зафиксировано восьмикратное уменьшение длины волны с ростом от 0,1 до 0,2 отношения толщин области раствора без шаров и области раствора, заполненной шарами.

Изменение пористости и проницаемости скелета пористой среды с глубиной влияет на характер неустойчивости равновесия в слоях [25–27]. Жидкость при движении испытывает сопротивление пористого скелета, поэтому рост (убывание) пористости с глубиной приводит к дестабилизации (стабилизации) равновесия. Главным образом это касается длинноволновых возмущений, охватывающих пористый и жидкий слои. Порог устойчивости по отношению к коротковолновым возмущениям слабо зависит от градиента пористости. При определенном значении градиента нейтральные кривые бимодальны.

Влияние вертикальных высокочастотных вибраций на устойчивость равновесия в двухслойной системе однокомпонентная жидкость – пористая среда, насыщенная той же жидкостью, в поле тяжести изучалась в [28–31]. Система подогревалась снизу. Пористый слой считался однородным. Показано, что вибрации повышают порог устойчивости и являются причиной роста длины волны наиболее опасных возмущений равновесия. Вследствие различной роли инерционных эффектов в слоях вибрации более эффективно подавляют конвекцию в жидком слое. Порог устойчивости равновесия для коротковолновых возмущений, локализованных в этом слое, значительно повышается с ростом интенсивности вибраций. Стабилизация равновесия относительно длинноволновых возмущений выражена гораздо слабее. В [30] построены диаграммы устойчивости равновесия для различных значений числа Дарси  $\varepsilon = K/h_m^2$  и отношения толщин жидкого и пористого слоев  $d = h_f/h_m$ , где  $K$  — проницаемость среды. Пористость оставалась постоянной. Выявлено, что при наличии вибраций длинноволновые возмущения становятся наиболее опасными при больших  $d$  и меньших  $\varepsilon$ , чем для системы в отсутствие вибраций.

Возникновение осредненного движения в двухслойной системе бинарная жидкость – насыщенная пористая среда в полях силы тяжести и вертикальных вибраций высокой частоты исследовалась в [32]. Свойства пористого слоя не зависели от координат. На внешних твердых границах системы поддерживались постоянные разные значения температуры и концентрации. Показано, что при подогреве сверху вибрации дестабилизируют равновесие жидкости с неустойчивой концентрационной стратификацией по плотности. Длина волны наиболее опасных возмущений уменьшается с ростом вибрационного ускорения. Стабилизирующий эффект вибраций проявляется при подогреве снизу для достаточно больших чисел Релея–Дарси.

В настоящей работе изучается влияние вертикальных высокочастотных вибраций на возбуждение конвекции в системе горизонтальных слоев бинарной жидкости и неоднородной пористой среды, насыщенной той же жидкостью, в поле силы тяжести. Равновесные градиенты температуры и концентрации вертикальны и постоянны. Применяются два способа воздействия на механическое равновесие в слоях, приводящие к смене характера неустойчивости: изменение пористости с глубиной и повышение интенсивности вибраций.

## 2. Постановка задачи. Определяющие уравнения и граничные условия

Исследуем возникновение конвективного движения в системе, состоящей из слоя бинарной жидкости толщиной  $h_f$  и расположенного под ним слоя пористой среды, насыщенной той же жидкостью, толщиной  $h_m$ , в поле силы тяжести. Система подвергается поперечным вертикальным вибрациям с амплитудой  $a$  и частотой  $\omega$ . На внешних твердых границах зададим постоянные, но разные значения температуры и концентрации. Предположим, что слои однородны вдоль горизонтальной координаты  $y$ .

Рассмотрим модельную пористую среду, представляющую собой систему упакованных сфер. Проницаемость такой среды можно оценить по формуле Кармана–Козени:  $K = D^2 m^3 / (180(1-m)^2)$ ,

где  $D$  — диаметр сферы,  $m$  — пористость среды [1, 33, 34]. Средняя пористость среды, состоящей из сплошных сфер (шаров), меняется в пределах от 0,34 до 0,4 [35–37]. Пористость среды можно увеличить, если использовать бусинки или полые трубки (кольца) длиной, равной их внешнему диаметру, как это было предложено в [36, 37]. Авторы экспериментально изучили конвективное движение в насыщенном жидкостью пористом слое вблизи порога неустойчивости равновесия. Пористость шаров и колец в экспериментах менялась от 0,34 до 0,64.

Пористую среду считаем неоднородной вдоль вертикальной оси  $z$ . Ее пористость линейно зависит от  $z$  по закону:  $m(z) = m_i + m_z z / h_m$ , где  $m_z$  — безразмерный градиент пористости или максимальное отклонение пористости от ее значения  $m_i = 0,5$  вблизи границы раздела слоев. Безразмерный градиент пористости будем изменять в пределах от  $-0,2$  до  $0,2$ . Отношение толщины пористого слоя к диаметру сфер, составляющих среду,  $h_m/D$ , возьмем равным 16, где  $D = 2$  мм. Итак, проницаемость зависит от  $z$  и определяется по формуле Кармана–Козени.

Конвекция в слое бинарной жидкости и насыщенной жидкостью пористой среде описываются с помощью уравнений движения, теплопроводности, диффузии и законов сохранения массы. Уравнения конвекции запишем в приближении Буссинеска [2]. Фильтрацию жидкости в пористой среде представим согласно закону Дарси [1]. Отклонение плотности бинарной жидкости  $\rho$  от некоторого ее среднего значения  $\rho_0$ , обусловленное неоднородностью температуры и концентрации, зададим в виде:  $\rho = \rho_0(1 - \beta_T T + \beta_C C)$ , где  $T$  и  $C$  — отклонения температуры бинарной жидкости и концентрации ее тяжелого компонента от некоторого среднего значения,  $\beta_T = -(1/\rho_0)(\partial\rho/\partial T)$  — коэффициент теплового расширения жидкости,  $\beta_C = -(1/\rho_0)(\partial\rho/\partial C)$  — коэффициент, связывающий плотность жидкости с концентрацией.

Считаем, что пористая среда не деформируется и колеблется вместе с полостью, в которой находится двухслойная система (шары могут быть закреплены тем или иным способом, например, склеены или удерживаются проницаемой перегородкой на границе раздела слоев). Как показано в [38], при незакрепленных шарах (рассматривались стеклянные шары, диаметр которых был в сотни раз меньше толщины пористого слоя) под действием вертикальных вибраций на границе раздела слоев возникал волновой рельеф. С ростом вибрационного ускорения граница раздела размывалась, и система переходила в псевдооживленное состояние. В предлагаемой вниманию работе обсуждается более простая ситуация. Полагаем, что пористая среда вместе с полостью совершает колебания как твердое тело. В этом случае уравнения конвекции бинарной жидкости можно записать в неинерциальной системе отсчета, связанной с полостью:

– для жидкого слоя

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_f} \nabla p_f + \nu_f \Delta \mathbf{v} + (\beta_T T - \beta_C C)(g - a \omega^2 \cos \omega t) \boldsymbol{\gamma}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \chi_f \Delta T, \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) C = D_f \Delta C, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0; \quad (3)$$

– для пористого слоя

$$\frac{1}{m(z)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \nabla p_m - \frac{\nu_f}{K(z)} \mathbf{u} + (\beta_T \vartheta - \beta_C S)(g - a \omega^2 \cos \omega t) \boldsymbol{\gamma}, \quad (4)$$

$$b(z) \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \vartheta = \text{div}(\chi_{eff}(z) \nabla \vartheta), \quad (5)$$

$$m(z) \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) S = \text{div}(D_m(z) \nabla S), \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (6)$$

Здесь:  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$  — скорость течения в жидком слое и скорость фильтрации жидкости в пористом слое;  $T$ ,  $\vartheta$  — отклонения температур от средних значений в жидком и пористом слоях;  $C$ ,  $S$  — отклонения концентраций тяжелого компонента бинарной жидкости от средних значений в жидком и пористом слоях;  $p$  — давление без учета гидростатической добавки;  $\rho_f$ ,  $\nu_f$  — плотность и вязкость бинарной жидкости;  $\chi_f = \kappa_f / (\rho C)_f$  — температуропроводность бинарной жидкости;  $D_f$ ,  $D_m = m D_f$  — коэффициенты

диффузии в бинарной жидкости и насыщенной жидкостью пористой среде;  $g$  — ускорение свободного падения;  $a$ ,  $\omega$  — амплитуда и частота вибраций;  $\gamma$  — орт вертикальной оси  $z$ . Индексы  $f$ ,  $m$  используются для обозначения свойств и переменных, стоящих в уравнениях конвекции бинарной жидкости в жидком и пористом слоях соответственно,  $\nabla$ ,  $\Delta$  — дифференциальные операторы.

Пористость и проницаемость среды зададим с учетом их значений  $m_i$  и  $K_i$  на границе раздела слоев:

$$m(z) = m_i \left( 1 + \frac{m_z}{m_i} z/h_m \right) = m_i f_1(z), \quad (7)$$

$$K(z) = K_i \frac{(1-m_i)^2}{m_i^3} \frac{(m_i + m_z z/h_m)^3}{(1-m_i - m_z z/h_m)^2} = K_i f_2(z), \quad (8)$$

где  $K_i = D^2 m_i^3 / (180(1-m_i)^2)$ .

Считаем, что в насыщенной пористой среде жидкая и твердая фазы распределены равномерно, теплоёмкость, теплопроводность и коэффициент диффузии зависят от объемных долей каждой из фаз [1]:

$$(\rho C)_m = m(\rho C)_f + (1-m)(\rho C)_s, \quad (9)$$

$$\kappa_m = m\kappa_f + (1-m)\kappa_s, \quad D_m = mD_f, \quad (10)$$

где  $(\rho C)_s$ ,  $\kappa_s$  — теплоёмкость и теплопроводность твердой фазы.

Принимая во внимание выражения (7), (9) и (10), определим отношение теплоемкостей насыщенной жидкостью пористой среды и жидкости  $b(z)$ , эффективную теплопроводность пористой среды  $\chi_{eff}(z)$  и коэффициент диффузии  $D_m(z)$  следующим образом:

$$b(z) = b(1 + m_z \delta_1 z/h_m) = b f_3(z), \quad (11)$$

$$\chi_{eff}(z) = \chi_{eff}(1 + m_z \delta_2 z/h_m) = \chi_{eff} f_4(z), \quad (12)$$

$$D_m(z) = D_{m_i} \left( 1 + \frac{m_z}{m_i} z/h_m \right) = D_{m_i} f_1(z), \quad (13)$$

где  $b = (\rho C)_{m_i} / (\rho C)_f$ ,  $\chi_{eff} = \kappa_{m_i} / (\rho C)_f$ ,  $\delta_1 = \frac{(\rho C)_f - (\rho C)_s}{(\rho C)_{m_i}}$ ,  $\delta_2 = \frac{\kappa_f - \kappa_s}{\kappa_{m_i}}$ . Значения теплоемкости

$(\rho C)_{m_i}$ , теплопроводности  $\kappa_{m_i}$  и коэффициента диффузии  $D_{m_i}$  в насыщенной жидкостью пористой среде находятся по формулам (9) и (10) при  $m = m_i$ .

На верхней и нижней твердых границах двухслойной системы зададим условия прилипания и непроницаемости соответственно, а также фиксированные значения температуры и концентрации:

$$z = h_f: \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = T_f, \quad C = C_f, \quad (14)$$

$$z = -h_m: \quad \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \vartheta = T_m, \quad S = C_m.$$

На границе раздела слоев бинарной жидкости и пористой среды поставим условия непрерывности температуры, тепловых потоков, концентрации и потоков вещества:

$$z = 0: \quad T = \vartheta, \quad \kappa_f \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa_{m_i} \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad C = S, \quad D_f \frac{\partial C}{\partial z} = D_{m_i} \frac{\partial S}{\partial z}. \quad (15)$$

В качестве гидродинамических условий на границе раздела слоев выберем условия равенства давлений и непрерывности вертикальных компонент скоростей, а также условие равенства нулю горизонтальной компоненты скорости жидкости, предложенное в [20]:

$$z = 0: \quad p_f = p_m, \quad \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad (16)$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  — орт горизонтальной оси  $x$ .

Уравнения движения в жидком и пористом слоях содержат дополнительные слагаемые с вибрационной силой. Для решения системы (1)–(6) с учетом граничных условий (14)–(16) будем действовать в соответствии с процедурой, предложенной в [3, 5–7] для описания конвективного движения жидкости при наличии вибраций. Представим каждое из полей (скорости, температуры, концентрации и давления) в виде суммы его средней по периоду вибраций компоненты  $F(x, z, t)$  и пульсационной (осциллирующей) компоненты  $\tilde{F}(x, z, t)$ . Для пульсационных компонент скорости и давления выделим амплитуды в каждом из слоев:  $\tilde{\mathbf{v}} = \text{Re}(\mathbf{V} e^{i\omega t})$ ,  $\tilde{p}_f = \text{Re}(P_f e^{i\omega t})$ ,  $\tilde{\mathbf{u}} = \text{Re}(\mathbf{W} e^{i\omega t})$ ,  $\tilde{p}_m = \text{Re}(P_m e^{i\omega t})$  где  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $P_f$ ,  $P_m$  — амплитуды пульсационных компонент соответствующих полей. Придем к системе уравнений для средних и пульсационных компонент полей.

Для решения полученной системы используем метод осреднения, примененный в более ранних работах при исследовании вибрационной конвекции в слоях одно- или двухкомпонентной жидкости и насыщенной жидкостью пористой среды [3, 5–7, 28, 29, 32]. Согласно методу период вибраций должен быть значительно меньше характерных времен распространения гидродинамических, тепловых и концентрационных возмущений; вибрации считаются неакустическими; не принимается во внимание сжимаемость жидкости.

Оценка диапазона частот, удовлетворяющих данным условиям, дает выражения:  $\min(v_f/h_f^2, \chi_f/h_f^2, D_f/h_f^2) \ll \omega \ll c/h_f$ , где  $c$  — скорость звука в жидкости. Для слоя с 26%-ным водным раствором хлорида аммония толщиной  $h_f = 1$  см этот диапазон составляет  $1,2 \cdot 10^{-2} \ll \omega \ll 1,5 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}$  или  $2 \cdot 10^{-3} \ll \omega/2\pi \ll 2 \cdot 10^4$  Гц [19, 39, 40]. Характерное время распространения гидродинамических возмущений в пористой среде определяется вязкостью жидкости и размером пор:  $\sqrt{K}$ . Значения проницаемостей для рассматриваемой в работе пористой среды малы и имеют порядок  $10^{-3} - 10^{-5} \text{ см}^2$ . В уравнении движения жидкости в пористом слое для пульсационных компонент полей сохраняем слагаемое, которое выражает плотность силы сопротивления скелета пористой среды движению жидкости в ней [28, 29]. В противном случае, в предположении, что  $\omega \gg v_f m/K$ , при  $K = 10^{-5} \text{ см}^2$  и толщине пористого слоя  $h_m = 1$  см диапазон изучаемых частот заметно сокращается:  $5 \cdot 10^2 \ll \omega \ll 1,5 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}$  или  $10^2 \ll \omega/2\pi \ll 2 \cdot 10^4$  Гц.

Амплитуда вибраций считается малой в том смысле, что  $a \ll \min(h_f/(\beta_T \theta_f), h_f/(\beta_c \Theta_f))$ , где  $\theta_f$  и  $\Theta_f$  — перепады температуры и концентрации на границах жидкого слоя. Так как параметр Буссинеска  $\beta_T \theta_f$  и безразмерный параметр  $\beta_c \Theta_f$  для растворов, как правило, малы [19, 39, 40], нелинейные слагаемые в уравнении движения в жидком слое для пульсационных компонент полей не учитываются. По аналогии опускаются нелинейные слагаемые в уравнении движения жидкости в пористой среде для пульсационных компонент полей. Введенные предположения позволяют получить замкнутую систему уравнений для осредненных компонент полей скорости, давления, температуры и концентрации и амплитуд их пульсационных компонент в каждом из слоев [31, 32].

Рассматриваемая задача допускает равновесное решение, при котором отсутствует осредненное движение жидкости в полях силы тяжести и вибраций с высокой частотой и малой амплитудой. В состоянии механического равновесия градиенты температуры и концентрации вертикальны и составляют:

– в жидком слое

$$\nabla T_0(z) = -A_f \gamma, \quad \nabla C_0(z) = B_f \gamma; \quad (17)$$

– в пористом слое

$$\nabla \vartheta_0(z) = -A_m f_5(z) \gamma, \quad \nabla S_0(z) = B_m f_6(z) \gamma. \quad (18)$$

В (17), (18) обозначено:  $A_f = (T_i - T_f)/h_f$  и  $A_m = (T_m - T_i)/h_m$  — постоянные части градиентов температуры в жидком и пористом слоях;  $B_f = (C_f - C_i)/h_f$  и  $B_m = (C_i - C_m)/h_m$  — постоянные части градиентов концентрации в жидком и пористом слоях;  $T_i$  и  $C_i$  — температура и концентрация на границе раздела слоев в состоянии равновесия;  $f_5(z) = -\frac{m_z \delta_2}{(1 + m_z \delta_2 z/h_m) \ln(1 - m_z \delta_2)}$ ,

$$f_6(z) = -\frac{m_z}{m_i} \left/ \left\{ \left( 1 + \frac{m_z}{m_i} z/h_m \right) \ln(1 - m_z/m_i) \right\} \right.$$

Проанализируем устойчивость равновесия относительно его малых возмущений. Для этого представим средние и пульсационные компоненты полей в виде сумм их равновесных значений  $F_0(x, z, t)$  и возмущений  $F(x, z, t)$ . Считая возмущения малыми и учитывая выражения (17) и (18), получим систему уравнений для возмущений средних компонент скорости, давления, температуры и концентрации и возмущений амплитуд их пульсационных компонент в виде:

– для жидкого слоя

$$\frac{\varepsilon}{\text{Pr}_m} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p_f + \varepsilon \Delta \mathbf{v} + (R_m T - R_{mc} C) \boldsymbol{\gamma} + p_v (b \tilde{\kappa} R_1^2 + m_i \tilde{m} R_2^2) \text{Re} \{ i \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\gamma} \} \boldsymbol{\gamma}, \quad (19)$$

$$\frac{\kappa}{b} \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \tilde{\kappa} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \Delta T, \quad (20)$$

$$(m_i \text{Le}_m) \frac{\partial C}{\partial t} + m_i \tilde{m} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \Delta C, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (21)$$

$$i \Omega \mathbf{V} = -\nabla P_f - \left( T - \frac{R_{mc}}{R_m} C \right) \boldsymbol{\gamma}, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0; \quad (22)$$

– для пористого слоя

$$0 = -\nabla p_m - \frac{\mathbf{u}}{f_1(z)} + (R_m \vartheta - R_{mc} S) g \boldsymbol{\gamma} + p_v (R_1^2 G_1(z) + R_2^2 G_2(z)) \text{Re} \{ i \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\gamma} \} \boldsymbol{\gamma}, \quad (23)$$

$$f_3(z) \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - f_5(z) (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \text{div} (f_4(z) \nabla \vartheta), \quad (24)$$

$$(m_i \text{Le}_m) f_1(z) \frac{\partial S}{\partial t} + f_6(z) (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \text{div} (f_1(z) \nabla S), \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{i \Omega}{m_i f_1(z)} \mathbf{W} = -\nabla P_m - \frac{\mathbf{W}}{f_2(z)} - \left( \vartheta - \frac{R_{mc}}{R_m} S \right) \boldsymbol{\gamma}, \quad \text{div } \mathbf{W} = 0. \quad (26)$$

При этом выполняются граничные условия:

$$\begin{aligned} z = d: \quad & \mathbf{v} = 0, \quad T = 0, \quad C = 0, \quad \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \\ z = -1: \quad & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \vartheta = 0, \quad S = 0, \quad \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \\ z = 0: \quad & T = \vartheta, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad C = S, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = m_i \frac{\partial S}{\partial z}, \\ & p_f = p_m, \quad \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad P_f = P_m, \quad \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \end{aligned} \quad (27)$$

где функции  $f_i(z)$  при  $i=1, 2, \dots, 6$  находятся из выражений (7), (8), (11)–(13) и (18), а  $G_1(z) = f_5(z)/f_3(z)$  и  $G_2(z) = f_6(z)/f_1(z)$ .

Система уравнений (19)–(26) с граничными условиями (27) записана в безразмерной форме. Для переменных величин выбраны масштабы: длины —  $h_m$ ; времени —  $b h_m^2 / \chi_{eff}$ ; средних компонент скорости —  $\chi_{eff} / h_m$ ; давления —  $(\rho_f \nu_f \chi_{eff}) / K_i$ ; температуры —  $A_m h_m$ ; концентрации —  $B_m h_m \chi_{eff} / D_{m_i}$ ; амплитуд пульсационных компонент скорости —  $(a \omega^2 \beta_T A_m h_m K_i) / \nu_f$ ; давления —  $(a \omega^2 \rho_f \beta_T A_m h_m^2)$  [28–32]. Задача содержит следующие безразмерные параметры: число Дарси  $\varepsilon = K_i / h_m^2$ ; число Релея–Дарси  $R_m = (g \beta_T A_m h_m^2 K_i) / (\nu_f \chi_{eff})$ ; концентрационное число Релея–Дарси  $R_{mc} = (g \beta_C B_m h_m^2 K_i) / (\nu_f D_{m_i})$ ; число Прандтля  $\text{Pr}_m = b \nu_f / \chi_{eff}$ ; число Льюиса  $\text{Le}_m = \chi_{eff} / (b D_{m_i})$ ; отношение теплопроводностей пористого и жидкого слоев  $\kappa = \kappa_{m_i} / \kappa_f$ ; отношение толщин жидкого и пористого слоев  $d = h_f / h_m$ ; вибрационный параметр  $p_v = \eta^2 \varepsilon / (2 \Omega \text{Pr}_m)$ , где  $\Omega = \omega K_i / \nu_f$  — безразмерная частота вибраций,

а  $\eta = a\omega^2/g$  — безразмерная амплитуда вибраций. Параметры  $R_1$  и  $R_2$  задаются выражениями:  $R_1^2 = R_m^2$  и  $R_2^2 = R_m R_{mc} / (m_i \text{Le}_m)$ . Отношения постоянных частей равновесных градиентов температуры  $\tilde{\kappa} = A_f / A_m = -\kappa m_z \delta_2 / \ln(1 - m_z \delta_2)$  и концентрации  $\tilde{m} = B_f / B_m = -m_z / \ln(1 - m_z / m_i)$  в жидком и пористом слоях находятся из условий непрерывности потоков тепла и вещества на границе раздела слоев, заданных в равновесном состоянии.

Исследуем устойчивость равновесия двухслойной системы относительно нормальных возмущений, периодических вдоль оси  $x$  [1, 2]. Для этого выделим в уравнениях (19)–(26) и граничных условиях (27) амплитуды полей  $F(z)$  и представим все переменные в виде:  $F(x, z, t) = F(z) \cdot \exp\{\lambda t + ikx\}$ , где  $\lambda$  — комплексный инкремент возмущений равновесия,  $k$  — волновое число возмущений. Будем искать нейтральные монотонные возмущения с  $\lambda = 0$ . Неустойчивость в неоднородно нагретой бинарной жидкости при определенном наборе параметров системы может быть колебательной [1, 2]. В работе ограничимся изучением монотонной неустойчивости. Колебательная неустойчивость станет предметом дальнейших исследований.

### 3. Метод численного исследования задачи

Полученную спектральную задачу решим численно с использованием метода стрельбы, основанного на алгоритме построения фундаментальной системы решений [41]. Осуществим ортогонализацию векторов частных решений. Выделим некоторые особенности приложения данного метода в рассматриваемой задаче.

Первая особенность заключается в том, что порядок обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд возмущений равновесия  $F(z)$ , записанных после преобразования  $F(x, z, t) = F(z) \cdot \exp\{\lambda t + ikx\}$ , в каждом из слоев разный. Кроме того, векторы решений с различным числом компонент в каждом из слоев необходимо находить отдельно. В слое жидкости вектор решений имеет вид:  $\mathbf{Y} = (v, v', v'', \varepsilon v''', T, T', C, C', V, V')$ , а в пористом слое задается как  $\mathbf{Z} = (u, u', \vartheta, \vartheta', S, S', W, W')$ , где  $v$  и  $u$  — нормальные компоненты средних скоростей в каждом из слоев,  $V$  и  $W$  — нормальные компоненты амплитуд пульсационных скоростей в слоях, штрихом обозначена производная по вертикальной координате  $z$ . Согласно методу векторы решений представляются в виде суперпозиции базисных линейно независимых векторов частных решений  $\mathbf{Y}^{(i)}$  в слое жидкости, которые удовлетворяют условиям на верхней границе двухслойной системы при  $z = d$ :  $\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^5 a_i \mathbf{Y}^{(i)}$ .

В слое пористой среды выбираются базисные векторы частных решений  $\mathbf{Z}^{(i)}$ , при которых выполняются условия на нижней границе двухслойной системы при  $z = -1$ . Их суперпозиция задается выражением:

$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^4 b_i \mathbf{Z}^{(i)}$ . Система обыкновенных дифференциальных уравнений для каждого из векторов частных

решений в слоях интегрируется методом Рунге–Кутты–Мерсона пятого порядка с автоматическим выбором шага. Решение отыскивается с точностью  $10^{-6}$ . При этом линейные комбинации векторов частных решений должны удовлетворять условиям на границе раздела слоев при  $z = 0$ . Таким образом, приходим к задаче на собственные значения, которые определяются из условия равенства нулю детерминанта полученной системы алгебраических уравнений. Собственные значения находятся численно методом секущих.

Второй особенностью приложения метода стрельбы в задаче исследования устойчивости равновесия в системе слоев бинарной жидкости и насыщенной жидкостью пористой среды является наличие малого параметра — числа Дарси  $\varepsilon$ , при старшей производной. Его значение составляет порядка  $10^{-5}$ . Малый параметр при старшей производной приводит к нарастанию погрешностей в алгоритме и расчетах. Для их сглаживания рекомендуется проводить ортогонализацию векторов частных решений в некоторых точках интервала интегрирования. В работе применяется алгоритм ортогонализации Грама–Шмидта [42]. Однако было установлено, что даже при проведении ортогонализации векторов частных решений в каждой точке интервала интегрирования для конечных значений волновых чисел  $k$  погрешность расчетов будет нарастать, поскольку в правой части дифференциальных уравнений для жидкого слоя стоит коэффициент  $k^2 p_v \text{Pr}_m R_m^2 / \varepsilon$ . Для устранения этой проблемы вместо обычной записи компоненты  $v'''$  вектора частного решения  $\mathbf{Y}^{(i)}$ , участвующей в сведении дифференциального уравнения более высокого порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка, используется перенормированная компонента  $\varepsilon v'''$ .

#### 4. Результаты работы

Численное решение задачи устойчивости было получено для системы, состоящей из слоя с водным раствором хлорида аммония и расположенного под ним слоя неоднородной пористой среды, насыщенной раствором. Пористая среда представляла собой систему упакованных стеклянных сфер. Параметры системы, использованные при вычислениях, приведены в таблице [19, 22, 39, 40].

Таблица. Параметры двухслойной системы

Название параметра	Обозначение	Значение	Единицы измерения
Кинематическая вязкость раствора	$\nu_f$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$\text{м}^2/\text{с}$
Плотность раствора	$\rho_f$	1050	$\text{кг}/\text{м}^3$
Теплопроводность раствора	$\kappa_f$	0,54	$\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
Теплоемкость раствора	$C_f$	$3,5 \cdot 10^3$	$\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$
Коэффициент диффузии в растворе	$D_f$	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$\text{м}^2/\text{с}$
Плотность стекла	$\rho_s$	2500	$\text{кг}/\text{м}^3$
Теплопроводность стекла	$\kappa_s$	1,10	$\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
Теплоемкость стекла	$C_s$	770	$\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$

Расчеты проводились при следующих значениях фиксированных безразмерных параметров:  $\kappa = 1,52$ ;  $b = 0,76$ ;  $\delta_1 = 0,48$ ;  $\delta_2 = -0,68$ ;  $\text{Pr}_m = 4,1$ ;  $\text{Le}_m = 345$ ;  $m_i = 0,5$ ;  $\varepsilon = 1,1 \cdot 10^{-5}$ . Определялся порог возникновения конвективного движения в слоях при подогреве системы снизу или сверху. Исследовалось влияние высокочастотных вибраций на устойчивость равновесия.

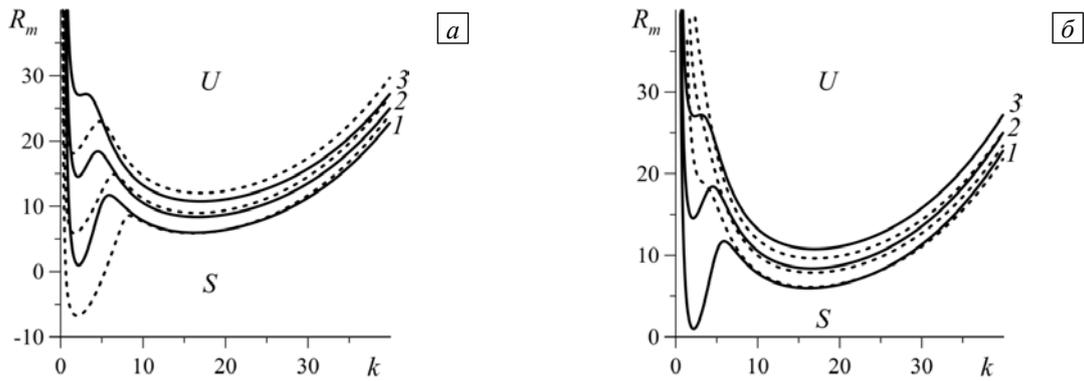
#### 4.1. Устойчивость равновесия в статическом поле тяжести

##### 4.1.1. Подогрев снизу ( $R_m > 0$ )

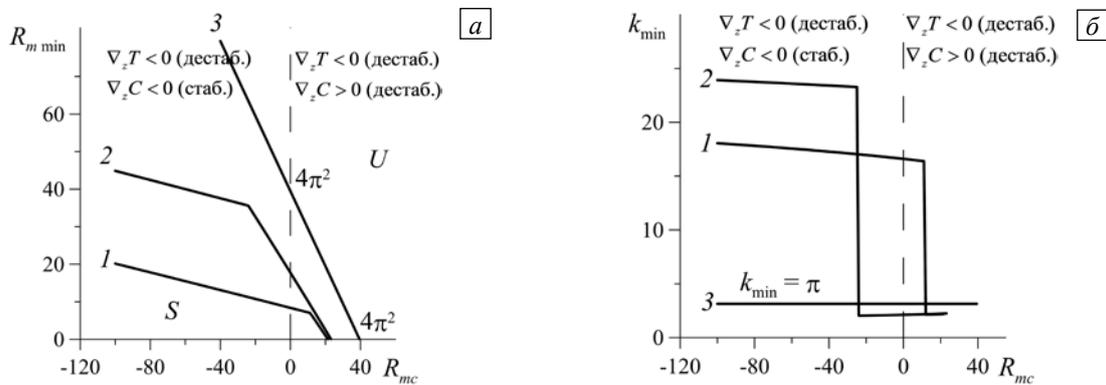
На рисунке 1 изображены нейтральные кривые монотонной неустойчивости в отсутствие вибраций для различных значений концентрационного числа Релея–Дарси  $R_{mc}$  и безразмерного градиента пористости  $m_z$  при  $d = 0,17$ . Отношение толщин жидкого и пористого слоев  $d$  выбрано таким образом, чтобы при  $m_z = 0$  (в случае однородного пористого слоя) нейтральные кривые имели два минимума. Один из них лежит в области малых волновых чисел и соответствует границе устойчивости равновесия к длинноволновым возмущениям, охватывающим оба слоя. Другой минимум находится в области больших волновых чисел и обозначает границу устойчивости к коротковолновым возмущениям, локализованным в жидком слое (сплошные кривые 1–3).

При подогреве снизу конвективное движение в слоях однокомпонентной жидкости ( $R_{mc} = 0$ ) и насыщенной жидкостью пористой среды возникает за счет неоднородности плотности, вызванной неоднородностью температуры в поле силы тяжести (линии 2, Рис. 1). При наличии примеси градиент концентрации тяжелого компонента бинарной жидкости, если он направлен вверх ( $R_{mc} > 0$ ), усиливает конвекцию в слоях и приводит к развитию термоконцентрационной неустойчивости (кривые 1, Рис. 1). Работают оба механизма неустойчивости — термогравитационный и концентрационно-гравитационный. Если градиент концентрации тяжелого компонента направлен вниз ( $R_{mc} < 0$ ), то он подавляет конвекцию (кривые 3, Рис. 1). С ростом  $|R_{mc}|$  порог устойчивости равновесия повышается по сравнению с порогом возбуждения тепловой конвекции однокомпонентной жидкости. Тормозящий и возбуждающий механизмы при определенном соотношении параметров бинарной жидкости могут привести к возникновению колебательной неустойчивости при  $R_{mc} < 0$  [1, 2]. В данной работе изучается лишь монотонная неустойчивость. Колебательная неустойчивость — предмет дальнейших исследований.

Проницаемость, связанная с пористостью по формуле Кармана–Козени [1, 33, 34], характеризует способность пористого скелета среды пропускать жидкость. Изменение пористости и проницаемости в пределах пористого слоя влияет преимущественно на длинноволновые возмущения, проникающие в этот слой. Коротковолновые возмущения, ограниченные слоем жидкости, менее чувствительны к изменению параметров пористой среды (Рис. 1). Когда пористость растет с глубиной ( $m_z < 0$ ), наиболее опасными становятся длинноволновые возмущения. Порог устойчивости равновесия к этим возмущениям заметно понижается с ростом  $|m_z|$  (штриховые кривые 1–3, Рис. 1а). При убывающей с глубиной пористости



**Рис. 1.** Нейтральные кривые устойчивости равновесия в системе слоев бинарной жидкости и пористой среды в отсутствие вибраций при  $d=0,17$  и различных значениях концентрационного числа Релея–Дарси  $R_{mc}$ : 20 (кривая 1), 0 (2),  $-20$  (3); сплошными линиями изображены нейтральные кривые для однородной пористой среды ( $m_z=0$ ), штриховыми линиями – нейтральные кривые для неоднородной пористой среды при  $m_z=-0,2$  (а) и  $m_z=0,2$  (б); буквами показаны области устойчивости (S) и неустойчивости (U)

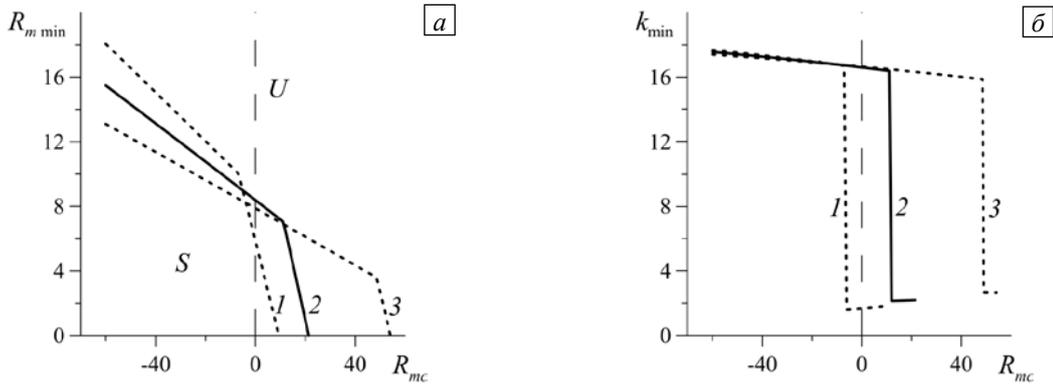


**Рис. 2.** Карты устойчивости равновесия в системе слоев бинарной жидкости и однородной пористой среды ( $m_z=0$ ) при различных значениях отношения толщин слоев  $d$ : 0,17 (кривая 1), 0,12 (2), 0 (3); (а) – минимальное критическое число Релея, (б) – волновое число наиболее опасных возмущений; буквами показаны области устойчивости (S) и неустойчивости (U)

( $m_z < 0$ ) доминирует коротковолновая мода неустойчивости. Влияние градиента пористости на порог устойчивости при коротковолновых возмущениях выражено гораздо слабее (штриховые линии 1–3, Рис. 1б). Полученный результат качественно согласуется с данными работ [25–27].

Для сравнения результатов приведем карты устойчивости, построенные для системы слоев бинарной жидкости и однородной пористой среды ( $m_z=0$ ) при различных значениях отношения толщин слоев (Рис. 2). При  $d=0$  имеется точное аналитическое решение для минимальных критических значений числа Релея–Дарси  $R_m$  и концентрационного числа Релея–Дарси  $R_{mc}$ , а также волнового числа, отвечающего наиболее опасным монотонным возмущениям равновесия:  $R_m + R_{mc} = 4\pi^2$ ,  $k = \pi$  [1] (кривые 3, Рис. 2). Критические параметры соответствуют порогу возникновения термоконцентрационной конвекции бинарной жидкости в однородном пористом слое. Неустойчивость обусловлена развитием возмущений с большой длиной волны. При  $d > 0$  возможна конкуренция коротковолновой и длинноволновой мод неустойчивости с изменением концентрационного числа Релея–Дарси. При определенных значениях  $R_{mc}$  нейтральные кривые бимодальны. Минимальные критические числа Релея–Дарси, характеризующие порог устойчивости при длинноволновых и коротковолновых возмущениях, принимают близкие значения. Излом кривых 1, 2 на рисунке 2а связан с переходом от коротковолновых к длинноволновым, наиболее опасным, возмущениям с ростом концентрационного числа Релея–Дарси (Рис. 2б). Результат согласуется с данными работ [11, 32].

На рисунке 3 изображены карты устойчивости равновесия для системы слоев бинарной жидкости и неоднородной пористой среды при  $d=0,17$ . Графики построены для различных значений концентрационного числа Релея–Дарси и безразмерного градиента пористости. Изменение пористости с глубиной оказывает влияние на переход от коротковолновых к длинноволновым, наиболее опасным

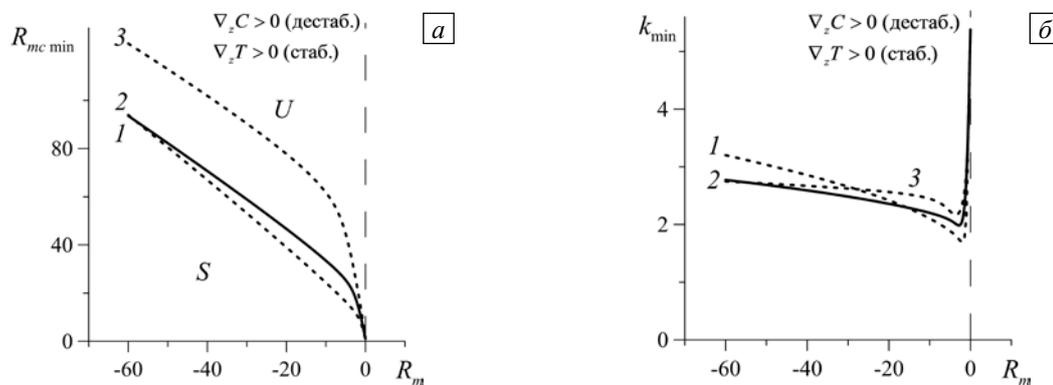


**Рис. 3.** Карты устойчивости равновесия в системе слоев бинарной жидкости и пористой среды при  $d = 0,17$  и различных значениях безразмерного градиента пористости  $m_z$ :  $-0,2$  (кривая 1),  $0$  (2),  $0,2$  (3); сплошными линиями изображены нейтральные кривые для однородной пористой среды ( $m_z = 0$ ), штриховыми линиями – нейтральные кривые для неоднородной пористой среды ( $m_z \neq 0$ ); (а) – минимальное критическое число Релея–Дарси, (б) – волновое число наиболее опасных возмущений; буквами показаны области устойчивости (S) и неустойчивости (U)

возмущениям (изломы кривых на Рис. 3). При пористости, растущей с глубиной, равновесие теряет устойчивость по отношению к длинноволновым возмущениям при меньших, чем в случае однородной пористой среды (кривые 1, Рис. 3) значениях концентрационного числа Релея–Дарси. И наоборот, когда пористость слоя уменьшается с глубиной, для возбуждения крупномасштабного движения в пористом и жидком слоях необходимо приложить большие градиенты концентрации при заданном градиенте температуры (линии 3, Рис. 3).

**4.1.2. Подогрев сверху ( $R_m < 0$ )**

При подогреве сверху системы слоев однокомпонентной жидкости ( $R_{mc} = 0$ ) и насыщенной жидкостью пористой среды равновесие остается устойчивым [1, 2]. Для бинарной жидкости при  $R_{mc} > 0$  возникновение конвекции в слоях обусловлено концентрационно-гравитационный механизм неустойчивости. Градиент температуры, направленный вверх ( $R_m < 0$ ), приводит к повышению порога устойчивости равновесия с ростом абсолютного значения числа Релея–Дарси  $|R_m|$  (Рис. 4а). Наблюдается стабилизация механического равновесия в слоях. С изменением параметров системы резкий переход от коротковолновых к наиболее опасным длинноволновым возмущениям не был зафиксирован. Даже при довольно больших значениях отношения толщин слоев ( $d = 0,50$ ) длина волны критических возмущений меняется монотонно с ростом  $|R_m|$  (Рис. 4б) [11, 27]. Для выбранного бинарного раствора с заданными



**Рис. 4.** Карты устойчивости равновесия в системе слоев бинарной жидкости и пористой среды при  $d = 0,50$  и различных значениях безразмерного градиента пористости  $m_z$ :  $-0,2$  (кривая 1),  $0$  (2),  $0,2$  (3); сплошными линиями изображены нейтральные кривые для однородной пористой среды ( $m_z = 0$ ), штриховыми линиями – нейтральные кривые для неоднородной пористой среды ( $m_z \neq 0$ ); (а) – минимальное критическое концентрационное число Релея–Дарси (буквами показаны области устойчивости (S) и неустойчивости (U)), (б) – волновое число наиболее опасных возмущений

значениями чисел Льюиса и Прандтля длинноволновая мода неустойчивости, связанная с развитием крупномасштабных возмущений в жидком и пористом слоях, доминирует уже при  $|R_m| > 5$  (Рис. 4б).

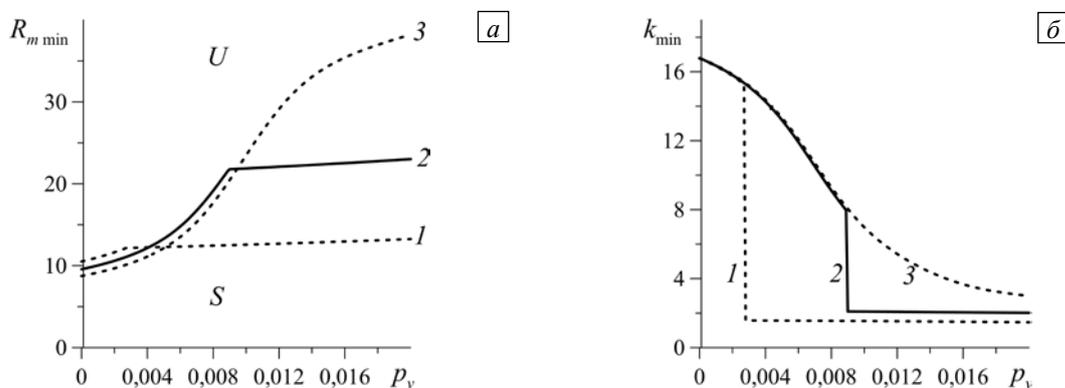
Для системы слоев бинарной жидкости и неоднородной пористой среды заметное изменение волнового числа наиболее опасных возмущений с ростом  $|R_m|$  наблюдается в случае, когда пористость растет с глубиной ( $m_z < 0$ ) (штриховая кривая 1, Рис. 4б). Порог устойчивости равновесия к таким возмущениям ниже порога возбуждения конвекции в системе слоев бинарного раствора и однородной пористой среды (штриховая линия 1, Рис. 4а). Уменьшение пористости с глубиной ( $m_z > 0$ ) приводит к стабилизации механического равновесия в слоях (штриховая кривая 3, Рис. 4а).

## 4.2. Влияние вибраций на устойчивость равновесия

### 4.2.1. Подогрев снизу ( $R_m > 0$ )

При подогреве снизу находящейся в поле силы тяжести системы слоев однокомпонентной жидкости ( $R_{mc} = 0$ ) и однородной пористой среды ( $m_z = 0$ ), насыщенной жидкостью, высокочастотные вертикальные вибрации являются причиной роста длины волны наиболее опасных возмущений механического равновесия жидкости [28–31]. Они существенно стабилизируют равновесие в случае коротковолновых возмущений, локализованных в жидком слое. Влияние вибраций на конвекцию в пористом слое, возникающую в виде крупномасштабных длинноволновых возмущений, выражено слабо. Это объясняется различной ролью инерционных эффектов в слоях. Данный факт был зафиксирован также в системе бинарная жидкость – однородная пористая среда при  $R_{mc} < 0$  [32].

Изменение пористости с глубиной оказывает на устойчивость равновесия к длинноволновым возмущениям, проникающим в пористый слой, большее влияние по сравнению с коротковолновыми возмущениями в жидком слое. Сочетание этих двух способов воздействия на конвективную неустойчивость — вибраций и переменной пористости — приводит к изменению характера перехода от коротковолновых к длинноволновым, наиболее опасным, возмущениям и его сдвигу в области параметров задачи (см. изломы кривых 1 и 2, Рис. 5). Когда пористость растет с глубиной ( $m_z < 0$ ) (штриховые кривые 1, Рис. 5), при рассмотренных значениях градиента пористости переход происходит резко. Чем больше абсолютное значение градиента пористости, тем меньшие значения вибрационного параметра  $p_v$  требуются для того, чтобы подавить конвекцию в жидком слое. Уже при  $p_v \geq 0,003$  вибрации стабилизируют равновесие относительно коротковолновых возмущений. Доминирует длинноволновая мода неустойчивости. Для этой моды стабилизирующий эффект вибраций выражен слабее. В случае убывания пористости с глубиной ( $m_z > 0$ ) (штриховые кривые 3, Рис. 5), возмущения в основном сосредоточены в жидком слое. Порог устойчивости равновесия к коротковолновым возмущениям заметно повышается с ростом интенсивности вибраций. Длина волны наиболее опасных возмущений растет монотонно с увеличением параметра  $p_v$ .



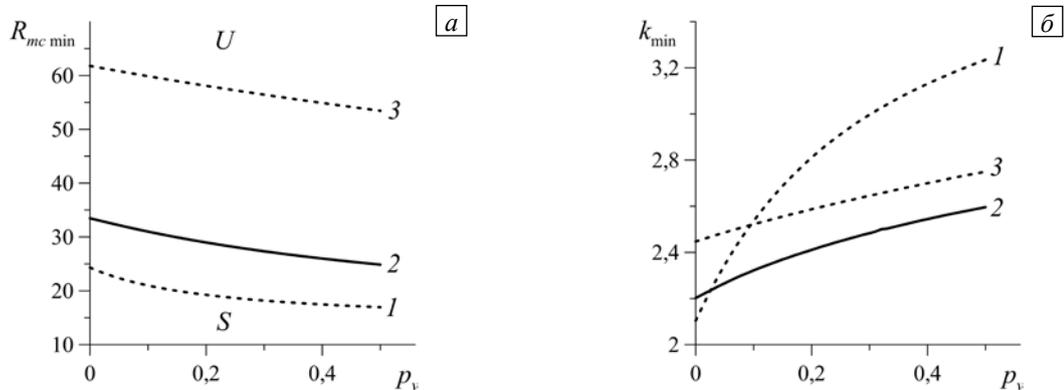
**Рис. 5.** Карты устойчивости равновесия в системе слоев бинарной жидкости и пористой среды при наличии вибраций для  $R_{mc} = -10$ ,  $d = 0,17$ ,  $\Omega = 0,1$  и различных значений безразмерного градиента пористости  $m_z$ :  $-0,2$  (кривая 1),  $0$  (2),  $0,2$  (3); сплошными линиями изображены нейтральные кривые для однородной пористой среды ( $m_z = 0$ ), штриховыми линиями – нейтральные кривые для неоднородной пористой среды ( $m_z \neq 0$ ); (а) – минимальное критическое число Рейля–Дарси (буквами показаны области устойчивости (S) и неустойчивости (U)), (б) – волновое число наиболее опасных возмущений

#### 4.2.2. Подогрев сверху ( $R_m < 0$ )

При подогреве сверху системы слоев бинарной жидкости в пористой среды вертикальные высокочастотные вибрации могут приводить к стабилизации или дестабилизации механического равновесия жидкости в зависимости от параметров задачи. Для однородного пористого слоя, насыщенного бинарной жидкостью ( $d = 0$ ), дестабилизирующее действие вибраций проявляется при  $(1 + R_{mc} / (R_m m Le_m)) < 0$  [13, 14]. Влияние вибраций сводится к появлению в выражении для границы монотонной неустойчивости добавочного слагаемого, которое зависит от интенсивности вибраций, от диффузионных и тепловых свойств среды и соотношения между градиентами температуры и концентрации:

$$R_m(k) = \frac{(\pi^2 + k^2)^2}{k^2} \left/ \left( 1 + \frac{R_{mc}}{R_m} \right) + \frac{p_v R_m^2 \Omega / m}{(1 + \Omega^2 / m^2)} \left( 1 + \frac{R_{mc}}{m Le_m R_m} \right) \frac{k^2}{(\pi^2 + k^2)} \right., \quad (28)$$

где  $m$  — пористость однородного пористого слоя,  $k$  — волновое число критических возмущений равновесия. В отсутствие вибраций, если положить в (28)  $p_v = 0$  и найти минимум функции, придем к известному выражению для минимальных значений критических параметров:  $R_m + R_{mc} = 4\pi^2$ ,  $k = \pi$  [1].



**Рис. 6.** Карты устойчивости равновесия в системе слоев бинарной жидкости и пористой среды при наличии вибраций для  $R_m = -10$ ,  $d = 0,50$ ,  $\Omega = 0,1$  и различных значений безразмерного градиента пористости  $m_z$ :  $-0,2$  (кривая 1),  $0$  (2),  $0,2$  (3); сплошными линиями изображены нейтральные кривые для однородной пористой среды ( $m_z = 0$ ), штриховыми — нейтральные кривые для неоднородной пористой среды ( $m_z \neq 0$ ); (а) — минимальное критическое концентрационное число Рейля–Дарси (буквами показаны области устойчивости (S) и неустойчивости (U)), (б) — волновое число наиболее опасных возмущений

Понижение порога устойчивости с ростом интенсивности вибраций при  $R_m < 0$  отмечается в двухслойной системе бинарная жидкость – однородная пористая среда, насыщенная жидкостью [32]. Этот эффект также имеет место в среде с переменной пористостью. На рисунке 6 представлены карты устойчивости при изменении интенсивности вибраций и безразмерного градиента пористости. Видно, что при всех рассмотренных значениях градиента вибрации дестабилизируют равновесие в системе (Рис. 6а) и приводят к уменьшению длины волны наиболее опасных возмущений (Рис. 6б). Дестабилизация проявляется ярче при росте пористости с глубиной (штриховые кривые 1, Рис. 6).

### 5. Заключение

Исследовано возникновение осредненного конвективного движения в системе слоев бинарного раствора и пористой среды, насыщенной раствором. Система подвергается поперечным высокочастотным вибрациям в поле силы тяжести. В состоянии равновесия градиенты температуры и концентрации одного из компонентов раствора вертикальны и постоянны. Внешние границы системы твердые и непроницаемые. Пористый слой считается неоднородным в поперечном направлении. Принимается линейная зависимость пористости от вертикальной координаты  $z$ :  $m(z) = m_i + m_z z / h_m$ , где  $m_i$  — пористость вблизи границы раздела слоев,  $m_z$  — безразмерный градиент пористости. Проницаемость среды оценивается по формуле Кармана–Козени как для системы плотно упакованных шаров [1, 33, 34]. Шары закреплены и колеблются вместе с полостью подобно твердому телу.

Конвекция бинарной жидкости в поле силы тяжести и высокочастотных вибраций описывается уравнениями, полученными с помощью метода осреднения [3, 2]. Период вибраций предполагается малым по сравнению с характерными временами задачи. Фильтрация жидкости в пористом слое представляется законом Дарси [1]. Линейная задача устойчивости равновесия в слоях решается численно с помощью метода стрельбы [41]. Находится граница устойчивости при подогреве системы снизу или сверху.

Показано, что при подогреве снизу в отсутствие вибраций происходит резкая смена характера неустойчивости с изменением градиента пористости для концентрационных чисел Релея–Дарси в интервале  $-6 < R_{mc} < 49$ . Отношение толщин жидкого и пористого слоев  $d$  задается равным 0,17. Когда пористость растет с глубиной при  $m_z = -0,2$ , неустойчивость вызывается развитием длинноволновых возмущений, охватывающих оба слоя. При убывании пористости с глубиной при  $m_z = 0,2$  потеря устойчивости равновесия связывается с возбуждением конвекции в жидком слое. Наиболее опасными становятся коротковолновые возмущения, практически не проникающие в пористую среду. Для градиентов пористости в интервале  $-0,2 < m_z < 0,2$  минимальные критические числа Релея–Дарси, соответствующие порогу устойчивости равновесия к коротковолновым и длинноволновым возмущениям, принимают близкие значения. Нейтральные кривые бимодальны. Обнаруженный результат качественно согласуется с результатами работ [25–27].

Выявлено, что вследствие различной роли инерционных эффектов в слоях вертикальные высокочастотные вибрации оказывают большее по сравнению с длинноволновой модой влияние на коротковолновую моду неустойчивости [28–32]. Они заметно подавляют конвекцию в жидком слое. Степень неоднородности пористого слоя определяет характер перехода от коротковолновых, наиболее опасных, возмущений к длинноволновым с ростом вибрационного параметра  $p_v$ . Найдено, что в случае роста пористости с глубиной при  $m_z = -0,2$  переход происходит резко и при значениях  $p_v$  меньших, чем в однородной пористой среде. Для заданных значений  $d = 0,17$  и  $R_{mc} = -10$  неустойчивость связана с развитием длинноволновых возмущений уже при  $p_v \approx 0,003$ . Когда пористость убывает с глубиной при  $m_z = 0,2$ , наиболее опасными становятся коротковолновые возмущения. Вибрации заметно повышают порог устойчивости равновесия относительно этих возмущений. Их длина волны увеличивается монотонно с ростом вибрационного параметра.

При подогреве сверху неустойчивость равновесия в слоях бинарного раствора и пористой среды, насыщенной раствором, определяется концентрационно-гравитационным механизмом возбуждения конвекции. Резкий переход от коротковолновых, наиболее опасных, возмущений к длинноволновым возмущениям с изменением пористости или интенсивности вибраций не был зафиксирован даже при довольно больших значениях  $d$ . При  $d = 0,50$  длина волны меняется монотонно с ростом вибрационного параметра для заданного числа Релея–Дарси  $R_m = -10$ . Показано, что вибрации приводят к дестабилизации равновесия в слоях и уменьшению длины волны критических возмущений. Эффект аналогичен действию вибраций на механическое равновесие в слоях бинарной жидкости и однородной пористой среды [13, 14, 32] и более ярко выражен, когда пористость растет с глубиной.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-60004-мол\_а\_дк).

## Литература

1. Nield D.A., Bejan A. Convection in porous media. – New York: Springer, 2013. – 778 p.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
3. Gershuni G.Z., Lyubimov D.V. Thermal vibrational convection. – N.Y.: Wiley, 1998. – 358 p.
4. Demin V.A., Gershuni G.Z., Verkholtantsev I.V. Mechanical quasi-equilibrium and thermovibrational convective instability in an inclined fluid layer // Int. J. Heat Mass Tran. – 1996. – Vol. 39, no. 9. – P. 1979-1991. DOI
5. Зеньковская С.М. Действие высокочастотной вибрации на фильтрационную конвекцию // ПМТФ. – 1992. – Т. 33, № 5. – С. 83-88. (English version DOI).
6. Зеньковская С.М., Роговенко Т.Н. Фильтрационная конвекция в высокочастотном вибрационном поле // ПМТФ. – 1999. – Т. 40, № 3. – С. 22-29. (English version DOI).
7. Bardan G., Mojtabi A. On the Horton–Rogers–Lapwood convective instability with vertical vibration: Onset of convection // Phys. Fluids. – 2000. – Vol. 12, no. 11. – P. 2723-2731. DOI
8. Huppert H.E., Turner J.S. Double-diffusive convection // J. Fluid Mech. – 1981. – Vol. 106. – P. 299-329. DOI
9. Nield D.A. Onset of thermohaline convection in a porous medium // Water Resour. Res. – 1968. – Vol. 4, no. 3. – P. 553-560. DOI
10. Chen F., Chen C.F. Onset of finger convection in a horizontal porous layer underlying a fluid layer // J. Heat Transf. – 1988. – Vol. 110, no. 2. – P. 403-409. DOI
11. Hirata S.C., Goyeau B., Gobin D. Stability of thermosolutal natural convection in superposed fluid and porous layers // Transp. Porous. Med. – 2009. – Vol. 78, no. 3. – P. 525-536. DOI

12. Zhao P., Chen C.F. Stability analysis of double-diffusive convection in superposed fluid and porous layers using a one-equation model // *Int. J. Heat Mass Tran.* – 2001. – Vol. 44, no. 24. – P. 4625-4633. DOI
13. Jounet A., Bardan G. Onset of thermohaline convection in a rectangular porous cavity in the presence of vertical vibration // *Phys. Fluids.* – 2001. – Vol. 13. – P. 3234-3246. DOI
14. Bardan G., Knobloch E., Mojtabi A., Khallouf H. Natural doubly diffusive convection with vibration // *Fluid Dyn. Res.* – 2001. – Vol. 28, no. 3. – P. 159-187. DOI
15. Chen C.F., Chen F. Experimental study of directional solidification of aqueous ammonium chloride solution // *J. Fluid Mech.* – 1991. – Vol. 227. – P. 567-586. DOI
16. Tait S., Jaupart C. Compositional convection in a reactive crystalline mush and melt differentiation // *J. Geophys. Res.* – 1992. – Vol. 97, no. B5. – P. 6735-6756. DOI
17. Worster M.G. Natural convection in a mushy layer // *J. Fluid Mech.* – 1991. – Vol. 224. – P. 335-359. DOI
18. Worster M.G. Instabilities of the liquid and mushy regions during solidification of alloys // *J. Fluid Mech.* – 1992. – Vol. 237. – P. 649-669. DOI
19. Chen F., Lu J.W., Yang T.L. Convective instability in ammonium chloride solution directionally solidified from below // *J. Fluid Mech.* – 1994. – Vol. 276. – P. 163-187. DOI
20. Любимов Д.В., Муратов И.Д. О конвективной неустойчивости в слоистой системе // *Гидродинамика.* – Пермь, 1977. – № 10. – С. 38-46.
21. Chen F., Chen C.F. Experimental investigation of convective stability in a superposed fluid and porous layer when heated from below // *J. Fluid Mech.* – 1989. – Vol. 207. – P. 311-321. DOI
22. Prasad V. Flow instabilities and heat transfer in fluid overlying horizontal porous layers // *Exp. Therm. Fluid Sci.* – 1993. – Vol. 6, no. 2. – P. 135-146. DOI
23. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Муратов И.Д. Конкуренция длинноволновой и коротковолновой неустойчивости в трехслойной системе // *Гидродинамика.* – Пермь, 2002. – № 13. – С. 121-127.
24. Kolchanova E., Lyubimov D., Lyubimova T. The onset and nonlinear regimes of convection in a two-layer system of fluid and porous medium saturated by the fluid // *Transp. Porous Med.* – 2013. – Vol. 97, no. 1. – P. 25-42. DOI
25. Chen F., Hsu L.H. Onset of thermal convection in an anisotropic and inhomogeneous porous layer underlying a fluid layer // *J. Appl. Phys.* – 1991. – Vol. 69. – P. 6289. DOI
26. Si-Cheng Z., Qiu-Sheng L., Henri N.-T., Bernard B. Gravity-driven instability in a liquid film overlying an inhomogeneous porous layer // *Chinese Phys. Lett.* – 2011. – Vol. 28, no. 2. – P. 024702. DOI
27. Chen F. Salt-finger instability in an anisotropic and inhomogeneous porous substrate underlying a fluid layer // *J. Appl. Phys.* – 1992. – Vol. 71. – P. 5222. DOI
28. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Муратов И.Д. Влияние вибраций на возбуждение конвекции в двухслойной системе пористая среда – однородная жидкость // *Гидродинамика.* – Пермь, 2004. – № 14. – С. 148-159.
29. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Муратов И.Д., Шишкина Е.А. Влияние вибраций на возникновение конвекции в системе горизонтального слоя чистой жидкости и слоя пористой среды, насыщенной жидкостью // *МЖГ.* – 2008. – № 5. – С. 132-143. (English version DOI).
30. Колчанова Е.А., Любимов Д.В., Любимова Т.П. Влияние эффективной проницаемости среды на устойчивость двухслойной системы «однородная жидкость – пористая среда» в поле вибраций высокой частоты // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 225-232. DOI
31. Lyubimov D., Kolchanova E., Lyubimova T. Vibration effect on the nonlinear regimes of thermal convection in a two-layer system of fluid and saturated porous medium // *Transp. Porous Med.* – 2015. – Vol. 106, no. 2. – P. 237-257. DOI
32. Колчанова Е.А. Исследование устойчивости и нелинейных режимов конвекции в двухслойных системах жидкость – пористая среда, насыщенная жидкостью / *Дисс... канд. физ.-мат. наук: 20.12.2012.* – Пермь, ИМСС УрО РАН, 2012. – 156 с.
33. Carman P.C. Fluid flow through granular beds // *T. I. Chem. Eng.-Lond.* – 1937. – Vol. 15. – P. 150-166.
34. Fand R.M., Kim B.Y.K., Lam A.C.C., Phan R.T. Resistance to the flow of fluids through simple and complex porous media whose matrices are composed of randomly packed spheres // *J. Fluids Eng.* – 1987. – Vol. 109, no. 3. – P. 268-273. DOI
35. Katto Y., Matsuoka T. Criterion for the onset of convective flow in a fluid in a porous medium // *Int. J. Heat Mass Tran.* – 1967. – Vol. 10, no. 3. – P. 297-309. DOI
36. Глухов А.Ф., Путин Г.Ф. Экспериментальное исследование конвективных структур в насыщенной жидкостью пористой среде вблизи порога неустойчивости механического равновесия // *Гидродинамика.* – 1999. – № 12. – С. 104-119.
37. Глухов А. Ф., Любимов Д. В., Путин Г. Ф. Конвективные движения в пористой среде вблизи порога неустойчивости // *ДАН СССР.* – 1978. – Т. 236, № 3. – С. 549-551.
38. Kozlov V.G., Ivanova A.A., Evesque P. Sand behavior in a cavity with incompressible liquid under vertical vibrations // *Europhys. Lett.* – 1998. – Vol. 42, no. 4. – P. 413-418. DOI
39. Peppin S.S.L., Huppert H.E., Worster M.G. Steady-state solidification of aqueous ammonium chloride // *J. Fluid Mech.* – 2008. – Vol. 599. – P. 465-476. DOI
40. Bejan A. *Convection heat transfer.* – Wiley: New York, 2013.
41. Лобов Н.И., Любимов Д.В., Любимова Т.П. Численные методы решения задач теории гидродинамической устойчивости: Учеб. пособие. – Пермь: Изд-во ПГУ, 2004. – 101 с.
42. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

## References

1. Nield D.A., Bejan A. *Convection in porous media.* New York: Springer, 2013. 778 p.
2. Gershuni G.Z., Zhukovitskii E.M. *Convective stability of incompressible fluids.* Jerusalem: Keter Publications, 1976.
3. Gershuni G.Z., Lyubimov D.V. *Thermal vibrational convection.* N.Y.: Wiley: N.Y., 1998. 358 p.

4. Demin V.A., Gershuni G.Z., Verkholtantsev I.V. Mechanical quasi-equilibrium and thermovibrational convective instability in an inclined fluid layer. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1996, vol. 39, no. 9, pp. 1979-1991. DOI
5. Zen'kovskaya S.M. Effect of high-frequency vibration on filtration convection. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1992, vol. 33, no. 5, pp. 691-695. DOI
6. Zen'kovskaya S.M., Rogovenko T.N. Filtration convection in a high-frequency vibration field. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1999, vol. 40, no. 3, pp. 379-385. DOI
7. Bardan G., Mojtabi A. On the Horton–Rogers–Lapwood convective instability with vertical vibration: Onset of convection *Phys. Fluids*, 2000, vol. 12, no. 11, pp. 2723-2731. DOI
8. Huppert H.E., Turner J.S. Double-diffusive convection. *J. Fluid Mech.*, 1981, vol. 106, pp. 299-329. DOI
9. Nield D.A. Onset of thermohaline convection in a porous medium. *Water Resour. Res.*, 1968, vol. 4, no. 3, pp. 553-560. DOI
10. Chen F., Chen C.F. Onset of finger convection in a horizontal porous layer underlying a fluid layer. *J. Heat Transf.*, 1988, vol. 110, no. 2, pp. 403-409. DOI
11. Hirata S.C., Goyeau B., Gobin D. Stability of thermosolutal natural convection in superposed fluid and porous layers. *Transp. Porous. Med.*, 2009, vol. 78, no. 3, pp. 525-536. DOI
12. Zhao P., Chen C.F. Stability analysis of double-diffusive convection in superposed fluid and porous layers using a one-equation model. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2001, vol. 44, no. 24, pp. 4625-4633. DOI
13. Jounet A., Bardan G. Onset of thermohaline convection in a rectangular porous cavity in the presence of vertical vibration. *Phys. Fluids.*, 2001, vol. 13, pp. 3234-3246. DOI
14. Bardan G., Knobloch E., Mojtabi A., Khallouf H. Natural doubly diffusive convection with vibration. *Fluid Dyn. Res.*, 2001, vol. 28, no. 3, pp.159-187. DOI
15. Chen C.F., Chen F. Experimental study of directional solidification of aqueous ammonium chloride solution. *J. Fluid Mech.*, 1991, vol. 227, pp. 567-586. DOI
16. Tait S., Jaupart C. Compositional convection in a reactive crystalline mush and melt differentiation. *J. Geophys. Res.*, 1992, vol. 97, no. B5, pp. 6735-6756. DOI
17. Worster M.G. Natural convection in a mushy layer. *J. Fluid Mech.*, 1991, vol. 224, pp. 335-359. DOI
18. Worster M.G. Instabilities of the liquid and mushy regions during solidification of alloys. *J. Fluid Mech.*, 1992, vol. 237, pp. 649-669. DOI
19. Chen F., Lu J.W., Yang T.L. Convective instability in ammonium chloride solution directionally solidified from below. *J. Fluid Mech.*, 1994, vol. 276, pp. 163-187. DOI
20. Lyubimov D.V., Muratov I.D. O konvektivnoi neustoichivosti v sloistoi sisteme [About the convective instability in a layered system]. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics], Perm, 1977, no. 10, pp. 38-46.
21. Chen F., Chen C. F. Experimental investigation of convective stability in a superposed fluid and porous layer when heated from below. *J. Fluid Mech.*, 1989, vol. 207, pp. 311-321. DOI
22. Prasad V. Flow instabilities and heat transfer in fluid overlying horizontal porous layers. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 1993, vol. 6, no. 2, pp. 135-146. DOI
23. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Muratov I.D. Konkurentsia dlinnovolnovoi i korotkovolnovoi neustoichivosti v trekhslonoi sisteme [Competition of long-wave and short-wave instabilities in three-layer system] *Gidrodinamika* [Hydrodynamics], Perm, 2002, no. 13, pp. 121-127.
24. Kolchanova E., Lyubimov D., Lyubimova T. The onset and nonlinear regimes of convection in a two-layer system of fluid and porous medium saturated by the fluid. *Transp. Porous. Med.*, 2013, vol. 97, no. 1, pp. 25-42. DOI
25. Chen F., Hsu L.H. Onset of thermal convection in an anisotropic and inhomogeneous porous layer underlying a fluid layer. *J. Appl. Phys.*, 1991, vol. 69, pp. 6289. DOI
26. Si-Cheng Z., Qiu-Sheng L., Henri N.-T., Bernard B. Gravity-driven instability in a liquid film overlying an inhomogeneous porous layer. *Chinese Phys. Lett.*, 2011, vol. 28, no. 2, pp. 024702. DOI
27. Chen F. Salt-finger instability in an anisotropic and inhomogeneous porous substrate underlying a fluid layer. *J. Appl. Phys.*, 1992, vol. 71, pp. 5222. DOI
28. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Muratov I.D. Vliyanie vibratsii na vzbuzhdenie konveksii v dvukhsloinoi sisteme poristaya sreda – odnorodnaya zhidkost' [Vibration effect on the excitation of convection in a two-layer system the porous medium – homogeneous fluid]. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics], Perm, 2004, no. 14, pp. 148-159.
29. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Muratov I.D., Shishkina E.A. Vibration effect on convection onset in a system consisting of a horizontal pure liquid layer and a layer of liquid-saturated porous medium. *Fluid Dyn.*, 2008, vol. 43, no. 5, pp. 789-798. DOI
30. Kolchanova E.A., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P. Influence of effective medium permeability on stability of a two-layer system “pure fluid–porous medium” under high-frequency vibrations. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 225-232. DOI
31. Lyubimov D., Kolchanova E., Lyubimova T. Vibration effect on the nonlinear regimes of thermal convection in a two-layer system of fluid and saturated porous medium. *Transp. Porous Med.*, 2015, vol. 106, no. 2, pp. 237-257. DOI
32. Kolchanova E.A. *Issledovanie ustoichivosti i nelineynykh rezhimov konveksii v dvukhsloinykh sistemakh zhidkost' – poristaya sreda, nasyshchennaya zhidkost'yu* [Investigation of stability and nonlinear regimes of convection in two-layer systems the fluid – porous medium saturated with the fluid]. PhD Dissertation, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, 2012. 156 p.
33. Carman P.C. Fluid flow through granular beds. *T. I. Chem. Eng.-Lond.*, 1937, vol. 15, pp. 150-166.
34. Fand R.M., Kim B.Y.K., Lam A.C.C., Phan R.T. Resistance to the flow of fluids through simple and complex porous media whose matrices are composed of randomly packed spheres. *J. Fluids Eng.*, 1987, vol. 109, no. 3, pp. 268-273. DOI
35. Katto Y., Matsuoka T. Criterion for onset of convective flow in a fluid in a porous medium. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1967, vol. 10, no. 3, pp. 297-309. DOI

36. Glukhov A.F., Putin G.F. Eksperimental'noe issledovanie konvektivnykh struktur v nasyshchennoi zhidkost'yu poristoi srede vblizi poroga neustoiichivosti mekhanicheskogo ravnovesiya [Experimental study of the convective structures in a porous medium saturated with the fluid near the onset of instability of the mechanical equilibrium]. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics], Perm, 1999, no. 12, pp. 104-119.
37. Glukhov A.F., Lyubimov D.V., Putin G.F. Convective motions in a porous medium near the equilibrium instability threshold. *Sov. Phys. Dokl.*, 1978, vol. 23, pp. 28-32.
38. Kozlov V.G., Ivanova A.A., Evesque P. Sand behavior in a cavity with incompressible liquid under vertical vibrations. *Europhys. Lett.*, 1998, vol. 42, no. 4, pp. 413-418. [DOI](#)
39. Peppin S.S.L., Huppert H.E., Worster M.G. Steady-state solidification of aqueous ammonium chloride. *J. Fluid Mech.*, 2008, vol. 599, pp. 465-476. [DOI](#)
40. Bejan A. *Convection heat transfer*. Wiley: New York, 2013.
41. Lobov N.I., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P. *Chislennyye metody resheniya zadach teorii gidrodinamicheskoy ustojchivosti* [Numerical methods of solving the problems of the hydrodynamical stability theory]. Perm: Perm State University, 2004. 101 p.
42. Voevodin V.V. *Vychislitel'nye osnovy lineinoi algebrы* [Computational foundations of linear algebra]. Moscow: Nauka, 1977. 304 p.

*Поступила в редакцию 02.09.2016; опубликована в электронном виде 30.03.2017*

---

*Сведения об авторах*

*Колчанова Екатерина Андреевна*, кфмн, нс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: [ekaterina\\_shishk@mail.ru](mailto:ekaterina_shishk@mail.ru)

*Колчанов Николай Викторович*, асс. каф., Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 614990, Пермь, ул. Букирева, д. 15; e-mail: [kolchanovn@gmail.com](mailto:kolchanovn@gmail.com)